
BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

<36700081700010
<36700081700010
Bayer. Staatsbibliothek

Phl. 2729. b.
Math. a. 237-1

Math. A. 237-1

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

R

Einleitung
zur
Berechnung der Leibrenten
und
Anwartſchaften

die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Perſonen abhangen

mit

Tabellen zum practiſchen Gebrauch

von

Joh. Nicol. Tetens
Profeſſor der Philoſophie und Mathematik zu Kiel.

Leipzig
bey Weidmanns Erben und Reich.
1785.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Bey der in Deutschland ziemlich bekannt gewordenen Veränderung mit der Calenbergischen Wittwencasse fiel es mir als eine Pflicht zu, mit dem Theil der Arithmetik, der in dieser Einleitung vorkommt, mich näher zu befassen. Es kamen gleich anfangs bey jenem Geschäfte verschiedene Fragen vor, über die Anwendbarkeit der allgemeinen Mortalitätstabellen, über die Grösse des Risico der Casse, und andere, die sehr in Betracht gezogen werden mussten, und die ich nirgends erörtert fand. Man sieht nicht besser, was der Theorie noch fehlt, als wenn man sie zur Anwendung bringen soll. Da ich darüber aus war, diese Puncte zu untersuchen, kam ich auf manches andere, was mir auch nicht unerheblich schien, und so entstund endlich der Gedanke, eine eigene Einleitung zu entwerfen, in der

am füglichſten und am kürzeſten angebracht werden konnte, was ich glaubte zu dem bisher bekannten zuſetzen zu können.

Ueber den Nutzen dieſer Berechnungsarten etwas zu ſagen, iſt jetzo unnöthig. Der Erfolg hat zu ſehr gezeiget, wie gefährlich hierin Rechnungsfehler ſind. Ich glaube, man kann erwarten, daſs man in Zukunft ſie noch weit mehr nutzen werde, als bisher geſchehen iſt. Jedes Land, und jede anſehnliche Stadt kann, wenn man will, eine eigene Wittwen- und Wayſencaſſe, ſogar eine eigene allgemeine Verſorgungsanſtalt haben, und zwar durch freywillige geſellſchaftliche Verbindungen ohne Beläſtigung des gemeinen Weſens. Es kommt nur darauf an, daſs die Ideen von dieſen Inſtituten in einem und dem andern Puncte noch etwas berichtiget, noch mehr aber, daſs die richtigen Ideen davon verbreitet werden. Man hat vorher zu viel davon erwartet. Da dieſe eitlen Hoffnungen getäuſchet ſind; ſo mag man vielleicht jetzo zu wenig aus ihnen machen. Mit wenig oder nichts ſich oder den Seinigen reichliche Verſorgung verſchaffen zu können, das geht nicht an, und wer das glaubt heraus gerechnet zu haben, kann ſicher ſeyn, daſs er ſich geirret. Aber mehr Verſorgung

gung ſich oder den Seinigen auf Lebens- und Todesfälle zu verſichern, als durch eigene Aufſparung des dazu beſtimmten Geldes möglich iſt, das geht an, dadurch, daſs man dieſs Geld, als verloren für ſich ſelbſt, für andere hingiebt; in dem Fall, daſs der Umſtand nicht eintritt, bey dem man für ſich oder für die Seinigen die Verſorgung von nöthen hat. Dieſs iſt das weſentliche Wohlthätige, das in der Natur dieſer Anſtalten liegt. In ſo ferne, als jeder dabey eine Summe wagt, die am Ende für ihn unnütz ausgegeben ſeyn kann, wird etwas aufs Spiel geſetzt. Aber ſoll das ein Spiel heiſsen, ſo hat es das Eigene, daſs nur der verliert, der des Gewinns nicht bedarf, und daſs dagegen der gewinnet, dem der Gewinn unentbehrlich iſt. Hier iſt der Verlierende der Glücklichere. Auſser der Beruhigung, ſo lange der Erfolg nicht entſchieden hat, gegen den Mangel auf den ſchlimmern Fall gedeckt zu ſeyn, hat er am Ende, wenn für ihn am beſten entſchieden iſt, nur zur Verſorgung anderer verloren.

In England hat man dieſe Renten-Berechnungen lange gekannt. *Halley*, dem wir ſo manche nützliche Erfindung zu verdanken haben, kam am Ende des vorigen Jahrhunderts ſchon darauf. *Hugenius* hatte

hatte vor ihm Probabilitäten zu berechnen gelehret. Seine Grundſätze wandte *Halley* auf die in Ordnung gebrachte Sterberegiſter an, und ſand die Grundſätze zur Berechnung der Leib- und Wittwenrenten. Einige nennen ſeine Methode noch die *Halleyiſche*, was eben ſo billig iſt, als wenn man den bekannten Lehrſatz in der Geometrie den Pythagoräiſchen nennt: allein einige, die ſie ſo nannten, thaten es aus Mangel an eigener Ueberzeugung von ihrer Richtigkeit, und wollten ſie dadurch als eine ſolche aufſtellen, die auf *Halleys* Anſehen beruhen möge. Dabey iſt doch die Erinnerung nicht undienlich, daſs ſie diejenige ſey, die in der Natur der Sache lieget, die nothwendig aus dieſer folget, und ſo eine, auf die jeder, wenn nicht nothwendig kommen muſs, doch am erſten kommen wird, und auch jeder wirklich gekommen iſt, der nach richtigen Grundſätzen eine geſucht hat.

Nach *Halley* hat *Moivre*, ein bekannter groſser Mathematiker, die Theorie etwas weiter gebracht. Er führte die Hypotheſe vom *gleichförmigen Abſterben* ein, um die Rechnungen zu erleichtern. Dieſer Hypotheſe kann man nun zwar nicht folgen, ſie weicht zu weit von der Erfahrung ab, allein man

muſs

mufs fie doch kennen. Sie ift, zumahl mit *Simpfons* Veränderung, in manchen Hinfichten als Näherungsmethode fehr brauchbar. *Moivre* machte aus den einzelnen Aufgaben ein Ganzes, und fo zu fagen, ein Syftem, das nun mehr im allgemeinen, auch mit Anwendung der höhern Mathematik, konnte bearbeitet werden.

Faft mehr noch als *Moivre* hat nach ihm *Simpfon* hinzugefetzt. Die Moivrifche Hypothefe machte er durch eine finnreiche Veränderung brauchbar. Die Verbindungsrente lehrte er durch eine Approximationsmethode zu finden, die mit vielem Scharffinn ausgedacht war, und weil fie ungemein kurz ift, mit Nutzen gebraucht werden kann, ob fie gleich die Wehrte nicht völlig genau angiebt. Er zeigte auch, wie die übrigen, vom Ueberleben einer Perfon über mehrere andere abhangenden, Anwartfchaften zu berechnen find. Darinn war *Moivre*, der einen Anfang gemacht hatte, gar nicht auf die rechte Spur gekommen. Diefs würde als ein zweytes Stockwerk in diefer Wiffenfchaft anzufehen feyn, wenn *Simpfon* nicht auch hier blofs bey Approximationen wäre ftehen geblieben. Soll man fich damit begnügen, fo mufs man es doch in feiner Gewalt haben, jedesmal zu

 beftim-

beſtimmen, bis wie weit die Abweichung von dem völlig richtigen gehen könne. Auch darinn lieſs er eine Lücke. Aber überhaupt iſt es hier unnöthig bloſse Approximationen zu ſuchen, da ſich Methoden angeben laſſen, die völlig zutreffen, und weniger mühſam ſind als jene. Die wichtigſte Schrift von *Simpſon*, die hieher gehört, ſcheinet auswärts am wenigſten bekannt geworden zu ſeyn. *Fontana* und *Florencourt* führen ſeine *Doctrine of Annuities and Reverſions* an, die 1742 gedruckt iſt, aber in ſeinen *Sel. Exerciſes for the young Proficients in the Mathematicks*. London 1752. 8. findet ſich ein Theil, unter der Aufſchrift: *of the Valuation of Annuities, for ſingle and joint Lives.* Dieſs iſt die vorzüglichſte, ganz claſſiſche Schrift, die ich meyne, in der er ſelbſt einiges in ſeiner vorgenannten *Doctrine of Annuities* verbeſſert, und ſeine beſten Erfindungen gelehret hat.

Von den neuern brittiſchen Schriftſtellern in dieſer Materie ſind mir nur *Morgan* und *Price* als ſolche bekannt geworden, die etwas vorzügliches und etwas eigenes geleiſtet haben. In der allgemeinen Theorie bleiben beyde bey *Simpſon* ſtehen. *Morgan* hat eine doppelte Berechnungsart der Renten gewieſen, die allerdings vielen Wehrt hat. Doch ſcheint Herr

Doct.

Doct. *Price*, der ſie mit Recht ſehr empfiehlt, ihr etwas zu viel Vorzüglichkeit zuzuſchreiben. Ich habe ſie nicht ſo leicht und kurz gefunden, daſs ich nicht Gründe gehabt, noch auf eine andre zu denken, und dieſe jener vorzuziehen. Man mag ſelbſt vergleichen und urtheilen. Hr. Doct. *Price* hat, zumahl in der vierten Ausgabe ſeiner *Obſervations on reverſionary Payments, in 2 Bänden* 1783. manche eigene für die Praxis erhebliche Bemerkungen gemacht.

Im Jahr 1752 als *Simpſons* oben erwähnte *Select Exerciſes* herauskamen, ſchien man in Deutſchland noch nicht einmal die Elemente dieſer Rechnungen zu kennen. Wittwen- Wayſen- und Todten-Caſſen hatten wir. Aber welche? Alle auf Gerathewohl, oder nach einem ohngefähren, juſt in dieſen Materien am öfterſten trüglichen Ueberſchlag entworfen, ohne richtige Grundſätze, oder gar gegen ſie, die denn auch den Erfolg gehabt haben, den ſo übel berechnete Projecte gewöhnlich haben. Darüber brauchen wir nun eben nicht zu erröthen. Denn ſolche practiſche Thorheiten ſind auch bey unſern Nachbaren jenſeits des Meers vorgefallen. Sie haben Verſorgungsanſtalten, die nahe ſo fehlerhaft ſind, als die fehlerhafteſten der unſrigen, und die von jüngerm

Dato

Dato sind, als die Schriften, woraus sie sich eines bessern hätten belehren können. Vernunft in Büchern ist auch bey ihnen noch nicht Vernunft in Praxis. Was aber befremden könnte, ist diess, dass wir in Deutschland in der Wissenschaft selbst zurück blieben, wir, die wir doch sonst so sehr geschäftig sind, neue auswärts erfundene Kenntnisse bey uns zu verpflanzen. Erst 1760 trug *Euler* seine Berechnungsart der Wittwenrenten vor. — Sie ward als eine neue Erfindung angesehen, und gewiss hatte der grosse Mann sie auch aus sich selbst; aber sie war nichts weniger, als neu, sie war die nämliche Methode nach den Mortalitätstafeln zu rechnen, die den Engländern längst bekannt gewesen war. Seit dieser Zeit haben wir nun ein Studium daraus gemacht. Die Herren *Seyberth*, *Kritter*, *Lambert*, *Fuss*, *Oeder*, *Lous*, *Bugge* und *Florencourt* haben mit Scharfsinn und mit Nutzen darinn gearbeitet. Wir können sagen, dass wir in den Theilen, die zunächst zu unsern Bedürfnissen gehören, den Britten gleich sind, und wenn mans genau nehmen wollte, in einem oder dem andern sie übertreffen. Aber wollen wir gerecht seyn, so müssen wir gestehen, dass noch in keinem deutschen Buch *Simpson* eingeholet sey, und dass

auch

auch aus *Price* manches zugelernet werden könne, wenn man gleich alles gefaſst hat, was von unſern Landsleuten darüber geſchrieben iſt. Dieſe Lage der Wiſſenſchaft und einer ſo nützlichen Wiſſenſchaft, war es, was mich am meiſten bewog, mich weiter in ſie einzulaſſen, als ichs anfangs gewilliget war, und als auch vielleicht das Geſchäft, was mich auf ſie führte, für ſich allein es erfordert haben möchte. Die Britten ſind lange unſere Lehrer geweſen, oder eigentlich, hätten es ſeyn können. Darf denn der Deutſche nicht den Vorſatz faſſen, es ſo zu machen, daſs ſie wieder von uns etwas lernen können, wenn ſie wollen? Dazu möchte ich gerne aufmuntern und Gelegenheit geben.

Eben darum habe ich bey dieſer Einleitung eine zwiefache Abſicht gehabt. Zunächſt für diejenigen ſie brauchbar zu machen, die ſich mit den Anfangsgründen begnügen, und die in Hinſicht des übrigen bloſs die practiſchen Vorſchriften kennen lernen wollen. Dann aber auch für die, welche weiter gehen wollen. Was für die erſten gehört, ſteht beyſammen in den Capiteln, ſo daſs ſie nicht nöthig haben, unter dem nicht unmittelbar Practiſchen es heraus zu ſuchen. In den Zuſätzen ſind die Gründe der

practi-

practiſchen Methoden, und die etwas ſchweren Beweiſe der Sätze, die nicht unmittelbar, oder nahe aus den erſten Elementen folgen, und andere weiter führende Betrachtungen enthalten. Hier kann einiges bloſse Speculation zu ſeyn ſcheinen. Aber ich bitte den, der es dafür hält, nur näher es anzuſehen. Man wird viel öfterer finden, daſs es nicht weit genug gehe, als daſs es zu weit gehe. Die kürzeſte Praxis erfordert jedesmal die meiſte Theorie.

Aber auch bey denen, die bloſs zum practiſchen Gebrauch dieſe Einleitung nutzen wollen, ſetze ich voraus, daſs ihnen die Elemente der allgemeinen Arithmetik, die mit Buchſtaben rechnet, ſo weit wenigſtens geläufig ſind, daſs ſie Ausdrücke in Buchſtaben oder Formeln leſen, und darnach rechnen können. Ich habe ſie mit Oeconomie zu brauchen geſucht. Jedes neue Zeichen, was nicht nöthig iſt, und nicht merklich erleichtert, iſt eine Laſt fürs Gedächtniſs, die man ihm nicht aufbürden muſs. Viele Buchſtabenzeichen ſind da, wo ſie für die ſtehen, die ſie gerne haben, entbehrlich für andere, die ſie nicht zu gebrauchen wiſſen. Ihrer mich gänzlich zu enthalten, alles mit Worten der gemeinen Sprache und mit den gewöhnlichen Zahlen zu ſagen, und zu

beweiſen,

beweisen, war nicht wohl möglich, wenigstens mir nicht, ohne in eine Weitläuftigkeit zu gerathen, die ich selbst nicht hätte ausstehen können.

Hier komme ich in Versuchung noch ein Wort mehr zu sagen über einen Gedanken, den einsichtsvolle und verdiente Männer geäussert haben, dass man nämlich beym Vortrag dieser Rechnungsarten sich aller algebraischen Zeichen enthalten könne, und der Gemeinnützlichkeit der Sachen wegen, solle. Es ist viel richtiges in dieser Maxime. Nur, deucht mich, sey es nöthig, sie mit Sorgfalt zu bestimmen, wenn sie nicht so misleiten soll, wie der Hang zur Popularität in den Wissenschaften. Den schätze ich sehr, sehe ihn als einen Vorzug unserer Zeit an, liebe ihn auch in der Mathematik. Aber kann mans läugnen, dass er wohl gelenket und in bestimmte Gränzen gehalten werden müsse, wenn nicht Selbstgenügsamkeit an seichten Elementarkenntnissen und Geringschätzung des gründlichen Wissens durch ihn veranlasset werden soll? Hat man nicht auch in der Mathematik diese Folgen zu befürchten?

Gemeinnützliche Kenntnisse, sagt man, sollten auch gemeinfasslich gemacht werden. Viele Personen, die mit Zahlen gut rechnen, sind nicht geübt

im Gebrauch der Buchſtaben. Ihnen kann alles begreiflich gemacht werden, und ſie können ſichs ſelbſt begreiflich machen durch eigenes Nachdenken und Rechnen: aber wenn Buchſtaben gebraucht werden, ſo iſt der Anſchein von Algebra da, womit ſie ſich nicht abgeben, wenns auch am Ende leichtfaſslich genug ſeyn möchte. Ich geſtehe, ich bin nicht überzeugt von der Gültigkeit dieſes Grundes. Verſchiedene Beyſpiele ſind mir vorgekommen, die hieher gehören, aber ich habe kein einziges gefunden, was nicht den Wunſch bey mir beſtätiget hat, daſs es ein Grundſatz ſeyn möge, niemanden als einen gebührenden Richter über practiſche, zu dieſem Fach gehörige, Sachen zu erkennen, der nicht die allgemeine Arithmetik, die mit Buchſtaben rechnet, in ſeiner Gewalt habe. Iſt davon etwan die Frage, ob nicht die Grundſätze, worauf die practiſchen Rechnungen beruhen, und die allgemeine Methode des Verfahrens jemanden begreiflich gemacht werden können, ohne algebraiſche Zeichen? Darüber iſt kein Zweifel. Dieſs kann geſchehen, wenn man will, auf die populärſte Art, durch eine philoſophiſche Darſtellung und Vergleichung bekannter Allgemeinbegriffe, wozu kein Calcul erfordert wird, weder der mit

Buch-

Buchſtaben, noch der mit Zahlen. So eine Kenntniſs hat auch für ſich einen groſsen Wehrt. Sie ſetzet diejenigen, die ſelbſt nicht rechnen können oder wollen, und oftmals auch nicht ſollen, in den Stand, zu beurtheilen, welchen von denen, die gerechnet, aber verſchiedene Reſultate gefunden haben, ſie mit Sicherheit trauen können. Noch mehr. Iſt nur das der Zweck, jemanden ſo weit zu führen, daſs die Richtigkeit der von einem andern gegebenen Vorſchriften einleuchte, um deſto ſicherer dieſe zu befolgen, ſo geſtehe ich gerne, das gehe füglich an, ohne ihm irgend etwas in algebraiſchen Formeln vorzulegen. Und das iſt wiederum etwas nützliches. Aber wohl zu merken, das alles iſt noch nicht wahre wiſſenſchaftliche Kenntniſs, nicht die durchs Ganze reichende volle Einſicht, die jemanden fähig macht, entweder ſelbſt Entwürfe zu erfinden, oder nur fremde, die nicht ſchon gegen die erſten Grundſätze anſtoſsen, in ihren einzelnen Theilen zu verfolgen, und zu prüfen. So eine vollſtändige Theorie, als nur eigentlich zur Anwendung gebracht werden kann, gewähren jene Anfangskenntniſſe hier nicht, ſo wenig als irgend anderswo. Und dieſe vollſtändige Theorie, die mehr als ein Halbwiſſen iſt,

ob auch die gefaſst werden könne von dem, der nicht allgemeiner die Beziehungen von Gröſsen denken und ausdrücken kann, als es mittelſt der gewöhnlichen Ziffern angeht? Iſt das die Frage, ſo möchte ich faſt die Möglichkeit läugnen. Man mache den Verſuch. Als vor einigen Jahren die Unbeſtehbarkeit der vormaligen Calenbergiſchen Wittwencaſſe anfieng einzuleuchten, und nun die groſse Aufgabe vorlag, wie ihr zu helfen ſey, fanden ſich verſchiedene würdige Männer mit ihrem Rath, mit Vorſchlägen und Projecten ein. Es war erſichtlich, daſs es ihnen an Rechnungsgeſchicklichkeit mit Zahlen nicht gefehlet habe, ſo wenig als an natürlichem Scharfſinn. Aber es war bey einigen auch auffallend, wie ſehr die Unbekanntſchaft mit den allgemeinen Zeichen ihre Einſicht zurück gehalten hatte. Davon liegt, deucht mich, ein Grund in der Natur der Sache. Nichts iſt gefährlicher als zu einſeitige Begriffe, aus einzelnen Geſichtspuncten gezogen. Wie leicht wird ein Verhältniſs von Gröſſen überſehen, worauf am Ende viel oder alles ankommt, wenn man nicht im Allgemeinen die Sachen überſieht? Allgemeine Begriffe erfodern aber allgemeine Zeichen. Wer die letztern nicht hat, in

diesen sich nicht ausdrücken kann, kann auch die Sache nicht in ihrer gehörigen Allgemeinheit vergleichen, ist also, bewahrt ihn nicht ausserordentlicher Scharfsinn und Aufmerksamkeit, allen den Fehltritten in seinem Raisonnement ausgesetzt, auf die zu eingeschränkte Begriffe hinleiten. Der Mann, der die Kunst erfunden hat, anstatt der Zahlen-Ziffern die allgemeinen Buchstaben-Zeichen zu setzen, hat dem menschlichen Verstande Flügel angesetzet. Wer diese nicht gebrauchen kann, muss dann natürlich öfters zurück bleiben, wo es doch nöthig war, weiter zu kommen. Die Erfahrung bestätiget diesen psychologischen Grund. Wer sind die Erfinder von den mancherley Planen von Wittwen- Waysen- und Todtencassen und dergleichen gewesen, womit das Publicum getäuscht ist? Lauter gute Zahlenrechner, aber keine Algebraisten, die durch Hülfe der allgemeinen Arithmetik die Sache im Allgemeinen hätten berechnen können.

Und dann kommt, wie ich meyne, noch diess in Betracht. Kann es irgend einem Kopf, der im Stande ist, so einen Zusammenhang von Schlüssen durchzusehen, als die practischen mathematischen Wissenschaften erfordern, auch nur im geringsten mühsam

 seyn,

seyn, so viel von allgemeinen Zeichen und von der allgemeinen Rechenkunst sich bekannt zu machen, als dazu erfordert wird? Wer die Sachen erlernen kann, sollte die Zeichen nicht erlernen können? Die nothwendigen nämlich, welche die Sachen erfordern, und welche nicht eingeschränkter seyn müssen als die bezeichneten Begriffe; denn sonst weiss ich wohl, dass man fassliche Sachen durch den Ausdruck, aber durch den mit Worten so gut als durch den mit algebraischen Zeichen, dunkel und schwer machen könne. Hat es Beyspiele gegeben, zumahl in der Arithmetik, wovon hier die Rede ist (wie man mich hat versichern wollen, wobey ich aber immer fragen möchte, ob nicht Schein mit untergelaufen sey?) hat es wirklich Beyspiele gegeben, dass nämlich Männer alles begriffen haben in Zahlen, aber nichts, wenns in Buchstaben ausgedruckt war, so weiss ich diess nur aus einer gewissen Zärtlichkeit der Phantasie zu erklären, die beym Anblick algebraischer Zeichen muthlos wird, weil sie alles für sehr schwer ansieht, was dahin gehört. Und wenn das ist, so sehe ich nicht, was daran gelegen sey, wenn man nichts thut, diese Schwäche zu hegen oder zu nähren. *)

Was

*) Diese Vorrede war schon zum Abdruck fertig, als ich Hrn.

Was die Tabellen betrifft, die dieser Einleitung angefüget sind, so habe ich solche und so viele zusammen genommen, als eine allgemeine Einleitung, die zu allen Arten von Versorgungsanstalten und auch näher für die Praxis seyn sollte, zu erfordern

 schien.

Hrn. Hofrath *Karstens* im vorigen Jahr herausgekommene *Theorie von Wittwencassen ohne Gebrauch algebraischer Rechnungen* erhielt. Das ist ein sehr nützliches und empfehlungswürdiges Buch. Wenn ich behauptet hätte, dass die Grundsätze der Theorie, und was zunächst zu ihrer brauchbaren Anwendung gehört, ohne algebraische Zeichen nicht richtig, gründlich und bis dahin vollständig gelehret werden könnten, so würde ich hier durch ein Beyspiel widerleget seyn. Allein das, was ich wirklich behauptet habe, wird durch diess Beyspiel völlig bestätiget. Einem Mann wie Hr. *Karsten* war es leicht, sich in den gehörigen Gesichtspunct zu stellen, und alles in seiner Allgemeinheit zu übersehen. Ich glaube aber, er werde mir eingestehen, dass derjenige, der diese seine Theorie durchstudiret hat, nun zwar nach ihm einsehen werde, dass sie richtig sey, allein doch auch noch mehr von des Verfassers algebraischen Rechenkunst besitzen müsse, um in ähnlichen Fällen mit so viel Scharfsinn und Richtigkeit einen Plan zu prüfen, ich will nicht einmal sagen, von neuem zu entwerfen, als Hr. *Karsten* es gekonnt hat. Das ist der Mittelpunct der Frage. Ich weiss kein Beyspiel, dass jemand mit Nutzen in diesem Fach gearbeitet habe, der nicht mehr als bloss mit Zahlen rechnen können.

ſchien. Anfangs hatte ich nur die zu der *Süſsmilchiſchen* von Hrn. *Baumann* corrigirten Mortalitätstafel gehörigen, wie Herr von *Drateln* ſie berechnet hat. Nachher fand ich in der vierten Ausgabe von des D. *Price* vorerwähnten *Obſervations &c.*, auch diejenigen, die ſich auf die *Northamptoner* und auf die *Schwediſche* Tafel beziehen, die ich nun nicht glaubte weglaſſen zu dürfen. Darüber wird Herr D. *Price*, wie ich hoffe, mir keinen Vorwurf machen. Denn die Käufer, welche ſein Buch diesſeits des Meers haben würde, wird er ohnediefs haben. Er hat noch immer manches Eigene, was auch allgemein brauchbar iſt, und wer die Verſorgungsanſtalten in England kennen lernen will, kann es nicht entbehren. Die Zins- und Zeitrenten-Tabellen ſind gleichfalls von Herrn von *Drateln.* Dieſem vortrefflichen Manne habe ich überhaupt vieles bey dieſer ganzen Arbeit zu danken. Ich bin ihm das öffentlich zu ſagen ſchuldig. Er hat mich mit ſeiner groſsen Rechnungsfertigkeit unterſtützt, ſo oft ichs gewünſcht habe, und auch mit ſeinen Einſichten, die ſehr weit ſich verbreiten. Als Schriftſteller iſt er nicht bekannt, wenigſtens nicht ſehr bekannt, denn ſonſt hat er

einige

einige kleine Auffätze gefchrieben. Es müfste ihm leicht gewefen feyn es zu werden, wenn er feinen Kopf und fein aufserordentliches mathematifches Genie dazu hätte anwenden wollen. So aber lebt und arbeitet er unermüdet mehr für andere in practifchen Gefchäften, mit einer fo edlen als feltenen Uneigennützigkeit, die zuweilen gar Sorglofigkeit für fich felbft zu feyn fcheinen kann. Freylich bey fo vieler nützlichen Gefchäftigkeit kann er dann auf Schriftftellerruhm Verzicht thun.

Nach meiner erften Ankündigung follten zu diefer Einleitung noch einige befondere Abhandlungen hinzukommen, die näher die eigentlichen Wittwencaffen angehen. Aber ich fand nachher, dafs diefer Band dadurch zu ftark werden würde. Sie follen in einem eigenen Bande als ein Anhang zu diefem nachfolgen. Es find ohne diefs noch einige mehr hinzugekommen, als ich Anfangs im Sinn hatte.

Da das Buch zu Leipzig gedruckt werden müffen, fo würde ich der Druckfehler wegen unruhig gewefen feyn, wenn nicht der Herr Doct. *Gehler* dafelbft die Güte gehabt, die Revifion des Abdrucks

zu übernehmen. Aus einigen Probebogen ſehe ich, mit welcher vorzüglichen Sorgfalt er die Correctur beſorge, und befürchte alſo keine verunſtaltende Fehler. Ganz ſie zu vermeiden iſt bey dieſer Art von Schriften beynahe unmöglich. Die übrig bleiben, ſollen am Ende angegeben werden.

Erstes Capitel.

Von Zeitrenten.

Erster Abschnitt.

Von unveränderlichen Zeitrenten.

Von *Renten*, *Zeitrenten*, *Lebensrenten* überhaupt. §. 1.

Vom *Grundcapital* und *Zinsfuſs*. §. 2.

Anwachs eines Capitals durch Zinſen und Zinſen von Zinſen. Vom *Diſcontiren*. §. 3 — 5.

Von *halb- viertel-* und $\frac{1}{n}$*tel jährlichen* Zinſen. §. 6 — 11.

Berechnung der *Jahrrenten*. §. 12 — 17.

Von Renten auf *kleinere Termine*. §. 18 — 22.

Umänderung der Renten auf gewiſſe Termine in andere auf eine andere Zahl von Terminen. §. 23. 24.

Von *aufgeſparten* Renten. §. 25 — 29.

Zweyter Abschnitt.

Von veränderlichen Zeitrenten.

Von *veränderlichen* Zeitrenten, inſonderheit ſolchen, die *in einem geometriſchen Verhältniſſe* wachſen ſollen. §. 30 — 32.

Von Renten, welche nach einem *arithmetiſchen Verhältniſſe* ſteigen. §. 33 — 36.

Zuſätze

zu dem erſten Capitel.

Anwachs eines Capitals durch *augenblickliche* Zinſen. §. 1 — 6.

Baarer Wehrt einer *Rente von augenblicklichen Terminen*. §. 7 — 13.

Wehrt

Wehrt einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen *wachſenden Jahrsrente* 1. §. 14.

Allgemeine Formeln für *veränderliche Zeitrenten*, die *nach Potenzen der natürlichen Zahlen* wachſen. §. 15—22.

Dergleichen Formeln für *augenblickliche* Renten. §. 23—25.

Zweytes Capitel.

Erſter Abſchnitt.

Von unveränderlichen Leibrenten.

Von *einfachen Leibrenten und Verbindungsrenten* überhaupt. §. 37.

Allgemeine Gründe der Leibrentenrechnung. 38—40.

Die *Altersergänzung*. §. 41.

Von *Mortalitätstafeln*, und inſonderheit denen, die hier beygebracht ſind. §. 42—46.

Mittlere Lebensdauer. §. 47—51.

Von der *wahrſcheinlichen Lebensdauer*. §. 52—55.

Practiſche Methoden die *mittlere Lebensdauer* und die *Leibrenten* nach jeder gegebenen Sterblichkeitstafel zu berechnen. §. 56—58.

Eine andere Art zu rechnen, bey der aus dem *Wehrt der Erbſchaft* der Wehrt der Leibrente gefunden wird. §. 59.

Noch eine Methode mit einer leichten Vorrichtung. §. 60. 61.

Von *Morgans* doppelter Rechnung. §. 62.

Methoden die nur *Näherungen* ſind.

Rechnung nach der *Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben* §. 63.

Art die Leibrente mittelſt der *Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer* zu finden. §. 64.

Berechnung nach einem von *Süſsmilchs* Tafel wenig abweichenden Geſetz der Sterblichkeit. §. 65. 66.

Verän-

Veränderung in dem Wehrt der Leibrente, wenn auch die unvollendeten Lebensjahre gerechnet werden. §. 67.

Vom Wehrt der Leibrenten bey *halbvierteljährlichen* und andern *terminlichen Hebungen.* §. 68.

Wie aus einer Leibrente für ein gewiſſes Alter dieſelbe für ein älteres und jüngeres gefunden werde. §. 69 — 72.

Wie aus Leibrenten nach einem *Zinsfuſs* andere nach einem andern gemacht werden. §. 73. 74.

Zweyter Abſchnitt.

Von veränderlichen Leibrenten.

Wehrt der Leibrente, die in einem *geometriſchen* Verhältniſſe ſteiget. §. 75. 76.

Wehrt *der arithmetiſch nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſenden Leibrenten.* §. 77 — 81.

Dritter Abſchnitt.

Von aufgeſchobenen, aufhörenden und aufgeſparten Leibrenten.

Was dieſs überhaupt für Leibrenten ſind. §. 82.

Berechnung der *aufgeſchobenen Leibrenten.* 83 — 87.

Wie aus aufgeſchobenen Leibrenten die Wehrte der nach der natürlichen Ordnung der Zahlen ſteigenden Leibrenten zu finden. §. 88. 89.

Von *aufhörenden* Leibrenten. §. 90. 91.

Von *aufgeſparten Leibrenten.* 92 — 95.

Von mehreren und *durch die Ruhe wachſenden Leibrenten.* 96. 97.

Vierter

Vierter Abſchnitt.

Von dem Wehrt der Erbſchaft.

Der Wehrt der Erbſchaft, oder einer beym Tode zahlbaren Summe, oder die *Aſſuranz des Lebens*, *Einſatz in Todtencaſſen.* §. 98 — 100.

Critik des Hrn. Dr. *Price* über die gewöhnliche Art zu rechnen, und Vertheidigung der letztern. §. 101. 102.

Zuſätze

zu dem zweyten Capitel.

Von Leibrenten.

Beweiſe der Sätze in §. 49. von der *mittlern Lebensdauer.* §. 1. 2.

Zu §. 59. *vom Wehrt der Erbſchaft.* §. 3.

Zu §. 60. 61. betreffend die Methoden die Wehrte der Leibrenten zu finden. §. 4 — 7.

Beweis der Sätze von *Moivriſchen Leibrenten.* §. 8.

Zu §. 65 und 66. von den Formeln für die *mittlere Lebensdauer* und die Leibrente nach der *veränderten Süſsmilchiſchen Tafel.* §. 9. 10.

Von der *Sterblichkeitslinie.* §. 11.

Von der Verſchiedenheit der *mitttlern* und der *wahrſcheinlichen Lebensdauer.* §. 12.

Zuſatz zu §. 67. §. 13.

Von *halb- vierteljährlich-* und *augenblicklich zahlbaren Leibrenten.* §. 14 — 18.

Von Renten, die nach einer *geometriſchen Reihe* ſich verändern. §. 19.

Von *arithmetiſch* oder gleichförmig *wachſenden Renten.* §. 20 — 26.

Zuſatz zu §. 101. betreffend die Berechnung *der Wehrte der Erbſchaft.* §. 27.

Drittes

Drittes Capitel.

Erster Abschnitt.

Von der mittlern Dauer des Zusammenlebens zwoer Personen.

Wie überhaupt die Zahl der von den anfänglichen *Paaren noch übrig gebliebenen* für jedes Jahr zu berechnen. §. 103.

Wie die Zahl der *getrennten Paare*, und der *ganz ausgestorbenen* zu finden. §. 104. 105.

Halleys Vortrag dieser Lehren. §. 106 und 107.

Von *der mittlern Dauer des Zusammenlebens*, des *Ueberlebens* und des *Ganzausgestorbenseyns.* §. 100 — 114.

Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben. §. 115 — 117.

Wie mittelst einer Hülfstabelle die *Verbindungsdauer* leicht gefunden werde. §. 117 — 122.

Wie auch die *Wehrte der gleichförmig wachsenden Leibrenten* mittelst eben derselben Tabelle gefunden werden.

Wie aus einer gegebenen Verbindungsdauer eine andere für zwo ältere oder jüngere gefunden werde. §. 123. 124.

Zweyter Abschnitt.

Von den Verbindungsrenten zwoer Personen.

Baarer Wehrt der *Verbindungsrenten zwoer Personen.*

Wehrt des Ueberlebens, der *Wittwenrenten bey Eheleuten.* 125 — 131.

Methode die Verbindungsrenten mittelst einer Hülfstabelle leicht zu finden. §. 132. 133.

Wehrt der *Verbindungsrenten* nach der Hypothese vom *gleichförmigen Sterben.* §. 134 — 136.

Morgans doppelte Rechnung für die Verbindungsrenten. §. 137.

Vergleichung der Verbindungsrente mit einer einfachen Leibrente. §. 138.

Umänderung der Verbindungsrenten in ähnliche nach einem andern Zinsfuſs. §. 139.

Wie aus gegebenen Verbindungsrenten die für ältere und jüngere Perſonen gefunden werden. §. 140 — 146.

Von *aufhörenden* und *aufgeſchobenen Verbindungsrenten.* Von *vorſchuſsweiſe*, von *halb-* und *vierteljährlich* und *augenblicklich* zu zahlenden *Verbindungsrenten.* §. 146. 147.

Wie *gleichförmig wachſende Verbindungsrenten* zu berechnen. 148. 149.

Dritter Abſchnitt.

Vom Zuſammenleben dreyer und mehrerer Perſonen.

Von der *Verbindungsdauer und von dem Wehrt der Rente* auf die Verbindung von *drey* Perſonen. §. 150. 151.

Berechnungsart derſelben. §. 152 — 154.

Aus gegebenen Verbindungsrenten für drey Perſonen andere für gleich ältere und gleich jüngere zu finden. §. 155 — 157.

Berechnung dieſer Rente nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben. §. 158. 159.

Wie durch die *Subſtitution eines einfachen mittlern Lebens ſtatt zweyer anderer*, ſo wohl die Dauer der Verbindung, als die Rente auf ſolche bey drey und mehr Perſonen zu finden ſey. §. 159 — 163.

Wie dieſs Verfahren zuverläſsiger werde. §. 164. 165.

Zuſätze

zum dritten Capitel, zum erſten Abſchnitt.

Von der Dauer des Zuſammenlebens zweyer Perſonen.

Zuſätze zu §. 113. betreffend die Correction der auf *ganze* Jahre berechneten Verbindungsdauer. §. 1 — 5.

Die

Die *mittlere Verbindungsdauer* nach der (Cap. I. §. 65.) *veränderten Süſsmilchiſchen Tafel.* §. 6.

Beweis der Methode in §. 131. mittelſt der beygebrachten Hülfstabelle die *Verbindungsdauer* zu berechnen. §. 7.

Wie aus einer gegebenen Verbindungsdauer zwoer Perſonen eine andere für zwo Perſonen gefunden werde, davon Eine um ein Jahr jünger iſt, als in dem erſten Fall. §. 9.

Zuſätze

zum zweyten Abſchnitt.

Von den Verbindungsrenten zwoer Perſonen.

Beweis einer im §. 131. erwähnten Methode dieſe Rente zu berechnen. §. 10.

Beweis der Methode in §. 132. §. 11.

Von dem Wehrt der Verbindungsrenten nach der *Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben* §. 12 — 16.

Wie aus gegebenen Verbindungsrenten für zwo Perſonen andere berechnet werden für zwo andere, davon Eine um ein Jahr jünger iſt, als die erſtern, zu finden. §. 17.

Von der Correction der auf ganze Jahre berechneten Verbindungsrenten. §. 18.

Vergleichung der Verbindungsrente für zwo Perſonen mit einer Leibrente für eine Perſon, deren Lebensdauer ſo groſs iſt, als jener beyden Verbindungsdauer. §. 19. 20.

Von *gleichförmig wachſenden Verbindungsrenten für zwo* Perſonen. §. 21 — 25.

Zuſätze

zum dritten Abſchnitt.

Vom Zuſammenleben dreyer und mehrerer Perſonen.

Beweis des im §. 152. gewieſenen Verfahrens die Verbindungsrente für *drey* Perſonen zu ſuchen. §. 26.

 Von

Von dem Wehrte der Verbindungsrenten für drey Personen *nach der geänderten Süſsmilchiſchen Tabelle.* §. 27 — 29.

Allgemeine Formeln für die Wehrte der Verbindungsrente von *drey* und mehreren Perſonen, nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben. §. 30 — 34.

Von den *gleichförmig wachſenden Verbindungsrenten* unter denſelben Bedingungen. §. 35 — 37.

Sätze und Formeln zum Beweis der Methode *durch die Subſtitution eines einfachen mittlern Lebens ſtatt zwey verbundener,* die Wehrte bey mehreren Perſonen zu finden. §. 38 — 45.

Viertes Capitel.

Vom Ueberleben und den davon abhängenden Anwartſchaften.

Erſter Abſchnitt.

Von der Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens.

Geometriſche Vorſtellung der Art, wie die Zahl der nach Jahren *noch beſtehenden*, ingleichen der nach Jahren *getrennten* und *ganz ausgeſtorbenen Paare* gefunden werde. §. 166.

Eben dieſes *arithmetiſch.* §. 167.

Wahrſcheinlichkeit des *Ueberlebens* und des *Zugleichſterbens, und andere,* mit jenen nicht zu verwechſelnde, *Wahrſcheinlichkeiten.* §. 168 — 171.

Wie die Wahrſcheinlichkeit gefunden werde, daſs eine Perſon die andere *überlebe*, auf *ganze* Jahre berechnet. §. 172 — 176.

Wie ſie zu berechnen, wenn *überhaupt* die Eine länger leben ſoll als die andere. §. 177.

Zweyter

Zweyter Abschnitt.

Von Anwartschaften im Fall des Ueberlebens.

Der jetzige Wehrt einer beym Tode einer Person zahlbaren Summe, unter der Bedingung, daſs eine andere jene überlebe. §. 178—185.

Von der Methode des *Moivre* und *Simpson.* §. 186.

Anwartschaft auf eine beym Tode des *Längstlebenden* von zwoen Personen zahlbare Summe. §. 187. 188.

Der Wehrt des Ueberlebens auf eine andere Art ausgedrückt als im Cap. III. §. 127. §. 189.

Dritter Abschnitt.

Von Anwartschaften, die von dreyer Personen Leben abhangen.

Drey verschiedene Classen der hieher gehörigen Aufgaben. §. 191.

Anwartschaft auf eine Leibrente, die vom Leben oder Tode *zwoer* andern Personen abhängt: von *Waysenpensionen,* u. s. f. §. 192—199.

Die zwote Classe von Aufgaben. §. 200.

Von der *Wahrscheinlichkeit, daſs drey gegebene Personen in einer bestimmten Folge nach einander sterben.* §. 201—209.

Wehrt der Erbschaft, welche an eine gewisse Folge im Sterben unter drey Personen gebunden ist. §. 210—218.

Insonderheit wenn der *Erblasser zuletzt* sterben soll, die beyden andern *in einer bestimmten Folge* unter sich schon vorher gestorben seyn sollen. §. 219—221.

Dritte Classe von Aufgaben, *vom Wehrt der Anwartschaft auf eine Leibrente,* welche die Bedingung hat, daſs die zwo andern Personen in einer *bestimmten Folge* gestorben sind. §. 222.

Zusätze zum vierten Capitel.

Vom Ueberleben und davon abhängenden Anwartschaften.

Von der *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens einer Person* über eine andere, *auf Augenblicke* berechnet. §. 1 — 3.

Vom *Wehrt der Anwartschaft auf eine Erbschaft im Fall des Ueberlebens* einer über die andere. §. 4. 5.

Beweis des 52sten Satzes vom Wehrt des Ueberlebens einer Person über eine andere. §. 6.

Beweis des 58sten Satzes im §. 202. von der Wahrscheinlichkeit des *Zuerststerbens* einer Person aus drey gegebenen. §. 7. 8.

Beweis des 62sten Satzes im §. 207. betreffend den Wehrt der Anwartschaft aus einer Erbschaft von einer Person, im Fall *sie zuerst* stirbt von drey gegebenen Personen. §. 9. 10. 11.

Ein Zusatz zum §. 212. betreffend die *Summe der Reihe, welche die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens einer Person* über eine andere ausdruckt. §. 12.

Beweis zu §. 220. von der Anwartschaft auf eine beym Tode einer Person zahlbare Summe, welche die *zwote im Sterben* ist, *unter drey* gegebenen. §. 13.

Beweis zu §. 218. vom Wehrt einer Anwartschaft auf eine *beym Tode der unter dreyen zuletzt sterbenden Person.* §. 14.

Beweis der Auflösung der Aufgabe im 65sten Satze §. 15 — 18.

Wie ohne die Hypothese vom gleichförmigen Absterben diese Aufgabe aufzulösen sey. §. 19. 20.

Beweis der Auflösung der Aufgabe im 66sten Satze. §. 21. 22.

Fünftes Capitel.

Von den Renten auf das längste Leben.

Erster Abschnitt.

Von der Dauer des längsten Lebens aus mehreren Personen.

Die *mittlere Dauer des Längstlebenden aus zweyen.* §. 223 — 225.

Wahrscheinlichkeit, *dass von Zweyen Einer nach gewissen Jahren noch lebe.* §. 226. 227.

Anmerkung über die Bestimmung der *historischen Wahrscheinlichkeit bey der Uebereinstimmung mehrerer Zeugnisse, oder bey ihrem Widerspruch.* §. 228.

Das längste Leben unter dreyen. §. 229. 230.

Ein Zweifel gegen die Bestimmung des längsten Lebens wird gehoben. §. 231.

Allgemeine Bestimmung des *längsten Lebens.* §. 232.

Noch eine andere Beweisart derselben. §. 233.

Die Dauer des Ueberlebens des Längstlebenden. §. 234 — 237.

Zweyter Abschnitt.

Von Renten auf die Dauer des längsten Lebens.

Bestimmung dieser Rente auf *zwo* und *drey* Personen. §. 238 — 242.

Von *gesellschaftlichen Renten*, die dem Längstlebenden unter *zwo* und *drey* Personen ganz zufallen. §. 243 — 246.

Grundsatz der Tontinen. §. 247. 248.

Zusätze

zu diesem fünften Capitel.

Beweis zu §. 230 und 232. betreffend die *allgemeine Methode, die Dauer des Längstlebenden zu finden.* §. 1. 2.

Methode des *Hrn. Fontana.* §. 3.

Beſtimmung der Zeiten, in denen mehrere Perſonen nach und nach abgehen, im allgemeinen. §. 4 — 7.

Inſonderheit bey Perſonen, die alle von gleichem Alter ſind. §. 8 — 10.

Dauer des Ueberlebens einer beſtimmten Perſon über andere, und Beſtimmung *der Zeiten, wie die Verbindungen aufhören,* worinn dieſe beſtimmte Perſon begriffen iſt. §. 11 — 14.

Allgemeine Ausdrücke für die *Rentenwehrte auf die Dauer des Längſtlebenden* und auf das *Ueberleben.* §. 15. 16.

Beweis des Satzes in §. 247. von *geſellſchaftlichen Renten,* und *des Grundſatzes bey Tontinen.* §. 17 — 20.

Verzeichniſs der Tabellen.

Tab I. Wehrte, wozu ein *Capital 1.* nach Jahren, durch Zinſen und Zinſen von Zinſen anwächſt, oder *Wehrte von* r^x.

Tab. II. Baarer Wehrt einer nach Jahren zahlbaren Summe 1. oder, *Werthe von* $\frac{1}{r^x}$.

Tab. III. Baarer Wehrt einer Jahrrente 1. auf gewiſſe Jahre. (Wehrte von $S. \frac{1}{r^x}$).

In der erſten Tabelle ſtehen die Wehrte auch für 2 Pr. C., in der zweyten und dritten die für 6 Pr. C. Aus einer Zahl in der erſten findet man leicht die dazu gehörige in der zwoten, und umgekehrt. Daher kann es bey ſolchen Zinſen, die nicht ſo häufig vorkommen, ſchon genügen, wenn nur eine von dieſen beyden Tabellen nach einem gewiſſen Zinsfuſs berechnet iſt.

Tab. IV. Die *Süſsmilchiſche Sterblichkeits-Tafel,* nach der Berichtigung des Hrn. *Baumanns in der vierten Ausgabe der göttl. Ordnung.* 1775.

Tab. V. Die *Northamptoner Sterblichkeits-Tafel.* Aus Hrn. *Dr. Price Obſervat. on reverſion. Paym.* Vol. II. vierte Ausgabe. 1782.

Tab.

Tab. VI. Die *Schwedische Sterblichkeits-Tafel von Wargentin.* Aus Dr. *Price.*

Tab. VII. Die *Sterbens-Ordnung der Rentenirer* nach *Deparcieux.* Wie Hr. *Florencourt* sie eingerichtet hat.

Tab. VIII. Die *Halleyische Sterblichkeits-Tafel* aus Breslau.

Tab. IX. Die *Londoner Sterblichkeits-Tafel* nach *Simpson.*

Tab. X. Die Sterbensordnung nach *Kerseboom* aus *Holland* und *Westfriesland.*

Tab. XI. Die Sterbensordnung nach Hrn. *Baumanns* Tafel aus der *Churmark.*

Tab. XII und XIII. Die Ordnung des Sterbens für *die beyden Geschlechter*, jedes *besonders*, nach *Wargentin*, nebst der *mittlern Lebensdauer.*

Tab. XIV. Sterbensordnung für *Ehemänner* und *Ehefrauen besonders*, nach Hrn. *Kritter*, vom 20sten Jahr an, nebst der *mittlern Lebensdauer.*

Tab. XV. Die *mittlere Lebensdauer* nach den vornehmsten Sterblichkeits-Tafeln.

Tab. XVI. Leibrenten nach der *Süssmilchischen* Tafel nach dem 3, 4 und 5. Procent-Fuss.

Auch *ihr Wehrt in Procenten.*

Tab. XVII. Leibrenten nach der *Northamptoner* Tafel, auf 3, 4, 5 Procent.

Tab. XVIII. Leibrenten nach der *Wargentinischen* Tafel auf 4 und 5 Procent.

Tab. XIX. Leibrenten nach *Deparcieux*, auf 5 Procent.

Tab. XX. Leibrenten für die *verschiedenen Geschlechter* nach *Wargentin*, auf 4 und 5 Procent.

Tab. XXI. Wehrt der beym Tode einer Person zahlbaren Summe 1. Zinsen zu 4 Procent.

Tab. XXII und XXIII. Die *mittlere Dauer der Verbindung zwoer Personen*; imgleichen die mittlere Dauer des

Ueberlebens einer Person über die andere. Nach *Süſsmilchs* Sterblichkeits-Tafel.

Tab. XXIV. Wehrte der *Verbindungsrenten bey zwo Perſonen.* Nach *Süſsmilchs* Tafel, und dem 4 Procent-Fuſs.

Tab. XXV. Verbindungsrenten für zwo Perſonen nach der *Northamptoner* Sterblichkeits-Tafel, auf 3, 4, 5 Procent.

Tab. XXVI. Verbindungsrenten nach der *Wargentinſchen* Tafel auf 4 Procent.

Tab. XXVII. Renten-Wehrte auf das *Ueberleben einer beſtimmten Perſon* über eine andere mit ihr verbundene. (*Wittwenrente.*)

Ferner auf *das längſte Leben* und auf das *Ueberleben des Längſtlebenden.* Nach *Süſsmilchs* Tafel, Zinſen 4 Procent.

Tab XXVIII. Renten auf das *Ueberleben einer Perſon vom weiblichen Geſchlecht* über eine verbundene vom *männlichen* Geſchlecht. Nach *Wargentins* Tafel. (Oben Tab. XI und XII.) Zinſen 4 Procent.

Tab. XXIX. Verbindungsrenten für drey Perſonen nach der *Northamptoner* Tafel. Zinſen 4 Procent.

Tab. XXX. Leibrenten nach der *Hypotheſe* vom *gleichförmigen* Abſterben aus der *mittlern Lebensdauer* berechnet, *Süſsmilchs* Tafel gemäſs.

Tab. XXXI. Figuren.

Nachricht.

Die Kupfertafel, Tab. XXXI, iſt ans Ende des Buchs ſo zu heften, daſs man ſie herausſchlagen könne.

Verbeſſe-

Verbesserungen.

Seite 5 *Zeile* 19 und 20 muſs den Zahlen 0,0020930, und 0,0084331, das Zeichen — vorgeſetzet werden.

— 8 — 18 ſtatt $\sqrt{r}$ *od.* $r^{\frac{1}{2}}$ iſt zu ſetzen $\sqrt{r}$, *oder* $r^{\frac{1}{2}}$, und ſtatt $\sqrt{\sqrt{r}}$ *od.* $r^{\frac{1}{4}}$ ſetze man $\sqrt{\sqrt{r}}$, *oder* $r^{\frac{1}{4}}$.

— 9 — 15 ſtatt $\frac{r-1}{2}$, ſoll ſtehen $\frac{r-1}{n}$.

— 12 — 16 Vor den Worten, *der Summe* iſt zu ſetzen, =, und vor = V das Wort *iſt* auszulöſchen.

— 18 — 9 ſtatt $\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} = p'$ ſoll ſtehen $\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}-1} = p'$.

— — 17 ſtatt 0,495, ſoll ſtehen 0,4951.

— 19 — 12 ſtatt $\frac{1}{n} = \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1} : \frac{1}{n} =$, ſoll ſtehen $\frac{1}{n}, = \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1} : \frac{1}{n}$.

— 35 letzte Zeile, ſtatt V = m, ſoll ſtehen $V = \frac{m}{r}$.

— 39 Z. 3 und 8 ſtatt $\frac{(m-1)(pd-a)}{r^m}$ ſoll ſtehen $\frac{(m-1)\,pd-a}{r^m}$.

— 41 — 8 ſtatt $\left(1+\frac{c}{r}\right)^m$ ſoll ſteh. $\left(1+\frac{c}{n}\right)^{mn}$.

— 48 — 2 ſtatt $\frac{1}{2}R'$, r — 1, ſoll ſtehen $\frac{1}{2}R'.\overline{r-1}$.

— 49 — 15 ſtatt $-\frac{1}{r-1}.\int\frac{1}{r^{n-1}}$ ſoll ſtehen $-\frac{1}{r-1}.\int\frac{1}{r^{m-1}}$.

 Seite

Seite 53 *Zeile* 3 statt $\frac{3^2}{r^2}$ soll stehen $\frac{3^3}{r^2}$.

— 58 — 13. 14. 18. 19 ist L statt K, und K statt I zu setzen.

— 64 — vorletzte, statt $p'^{m+1} \frac{p}{r^x}$ muss stehen $p'^{m+1} - \frac{p}{r^x}$

— 95 — 14 statt r^{a+1} soll stehen r^a

— 96 — 12 statt $\frac{r^a S}{A}$ muss stehen $\frac{r^{a-1} S}{A}$.

— 109 — 7 statt $\frac{\overset{a}{-}A}{A : r^a}$ soll stehen $\frac{\overset{a}{-}A}{A . r^a}$

— 104 — 13 statt *Warwicher* liess *Worwicher*.

— 109 — 18 statt 4,8197 muss stehen, 5, 8197

— 113 — 16 statt $\frac{1}{2} \int (\overline{66 - a}))$ muss stehen $\frac{1}{2} \int (\overline{66 - a)^2})$

— — — 17 statt 85,25 liess 85.5

— 115 — 1 und 2 statt $\frac{7}{16}$ liess $\frac{3}{8}$.

— 156 — 9 und 11 statt p setze man P,

— 159 — 13 statt $+ \int \frac{1}{r^x - 1} \int \frac{1}{r}$ setze man $+ \frac{1}{r^x - 1} \int \frac{1}{r}$

— 162 — 2 statt . *Diess giebt* muss steh. , *so giebt diess*.

— — Z. 4 statt $\frac{\overset{a}{-}A - x\delta}{\overset{a}{-}A}$ muss steh. $\frac{\overset{a}{-}A - x\,d}{\overset{a}{-}A}$

— — statt $\frac{x(\delta - \frac{1}{2}\delta)}{\overset{a}{-}A}$, muss steh. $\frac{x(d - \frac{1}{2}\delta)}{\overset{a}{-}A}$.

— — 12 statt $+ \frac{x(x-1)\delta'}{2}$ m. st. $- \frac{x(x-1)\delta'}{2}$.

— 163 Z. 2 Ist hinzuzusetzen hinter $\frac{1}{2}$: *wo auch das letzte Jahr und die Ergänzung* $\frac{1}{2}$ *mitgenommen ist.*

Seite 164 *Zeile* 4 ſtatt $\frac{7\frac{1}{2}}{\frac{2}{-}A.\,r^{66-a}}$ m. ſt. $\frac{7\frac{1}{2}}{\frac{3}{-}A.\,r^{96-a}}$.

— 173 — 7 ſtatt $\frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta^{\frac{1}{-}}A}{r^{\frac{1}{2}}}$ muſs ſteh. $\frac{1}{4} \frac{\Delta^{\frac{1}{-}}A}{r^{\frac{3}{2}}}$.

— 175 — 17 ſtatt $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{-}A}{r^{1}}$ m. ſt. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\frac{1}{-}A}{r^{1}}$

— 176 letzte Zeile ſtatt $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{(r+1)}{r^{\frac{1}{2}}} \lambda \overline{a},\right.$

muſs ſtehen $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{(r+1)}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \lambda \overline{a}$.

— 179 Z. 11 ſt. $\frac{\frac{2}{-}A' + \frac{2}{4}\Delta \frac{1}{-}A}{r^{1\frac{1}{4}}}$, m. ſt. $\frac{\frac{2}{-}A + \frac{2}{4}\Delta \frac{1}{-}A}{r^{1\frac{2}{4}}}$

— — 12 ſt. $\frac{\frac{1}{-}A + \frac{1}{4}\Delta A}{r^{1\frac{3}{4}}}$, muſs ſt. $\frac{\frac{1}{-}A + \frac{1}{4}\Delta A}{r^{\frac{3}{4}}}$

— 184 — 5 ſtatt $p'\left(p' - \frac{p}{r}\right)$ m. ſt. $p'\left(p' - \frac{p'}{r}\right)$

— 191 Zeile 8 ſtatt $+ \lambda \overline{a}$ muſs ſtehen $+ \frac{\lambda \overline{a}}{r}$.

— 217 — 20 in den Zahlen muſs ſtatt 412889 geſetzet werden 413889

— 224 — 19 ſtatt $\alpha = 70$ muſs ſtehen $\alpha = 70, 6$

— 246 — 4 ſtatt 0,6053 muſs ſtehen 0,8053

— 250 — 5 ſtatt, *mittlere Dauer der Verbindung* iſt zu leſen, *mittlere Dauer der mittlern Dauer der Verbindung*

— — Z. 21 Hier iſt das Wort *alſo* auszulöſchen.

— 283 letzte Zeile, ſtatt, *weniger* $\frac{1}{-}$ muſs ſtehen *weniger* $\frac{1}{4}$

— 284 Z. 9 ſtatt *daſs* lieſs, *wenn*.

Seite

Seite 293 *Zeile* 2. 3. 4. 5 ſtatt des Factor $\frac{1}{A}$ ſoll ſtehen $\frac{1}{A\,B}$.

— — Zeile 5 ſtatt $\Delta^3 \overset{n-3}{-} A$ muſs ſtehen $\Delta^3 \overset{n-1}{-} A$.

— 303 — 3 ſtatt $S.\int \frac{\overset{1}{-}B}{r}$ m. ſt. $\frac{1}{r^b} \cdot S.\int \frac{\overset{1}{-}B}{r}$.

— 309 — 14 ſtatt, *der Rechnung*, lieſs *zur Rechnung*.

— 310 erſte Zeile, ſtatt $\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}$ lieſs $\frac{2}{r^{\frac{2}{\overline{n}}}}$.

— 314 nächſt letzte Zeile, ſtatt *Berechnung* lieſs *Benennung*.

— 317 Z. 9 ſtatt 3 p. $\lambda \overline{a\,b}$ — 2 p. $\lambda\, \overline{b}$ ſoll ſtehen 3 p $\lambda \overline{a\,a}$ — 2 p $\lambda \overline{a}$.

— 319 Z. 8 ſtatt $\overset{1}{-}A \; \overset{2}{-}B$ lieſs $\overset{1}{-}A \; \overset{1}{-}B$.

— — Z. 13 ſtatt $\frac{\lambda \overline{a\,b}}{r} + \left(\frac{\overset{1}{-}A \; \overset{1}{-}B}{r} \right. +$ ſoll ſtehen

$$\frac{L \overline{a\,b}}{r} + \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A \; \overset{1}{-}B}{r} \right. + .$$

— 321 Z. 12 ſtatt $- \frac{1}{A\,B\,C} (\overset{2}{-}A. \overset{2}{-}B) \int \frac{\overset{3}{-}C}{r^3}$. .

ſoll ſtehen $- \frac{1}{A\,B\,C} \cdot \Delta \, (\overset{2}{-}A \; \overset{2}{-}B) \int \frac{\overset{3}{-}C}{r^3}$

— 326 Z. 3 ſtatt $(\alpha - p\,x - q\,x).(\alpha' - q'\,x - q'\,x^2)$ ſoll ſtehen $(\alpha - p\,x - q\,x^2).(\alpha' - p'\,x - q'\,x^2)$.

— — Z. 17 ſtatt $+ p\,p'\,p''$ ſoll ſtehen $- p\,p'\,p''$.

— 333 — 1 ſtatt $(k - k\,z^{k-1}\,p +$ ſoll ſtehen $(z^k - k\,z^{k-1}\,p +$

Seite

Seite 333 letzte Zeile, statt $L\overline{a\,b}$ soll stehen $L\overline{a\,b\,c}$.

— 334 Z. 1 statt $+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\int\frac{x^3dx}{r^x}$

soll stehen $+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)\int\frac{x^3dx}{r^x}$

Ebend. Z. 5 statt $-\frac{4}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{x^3dx}{r^x}$ soll stehen

$-\frac{4}{\alpha\beta\gamma}\,p\int\frac{x^3dx}{r^x}$.

— 355 — 13 statt: *einige zu den Uebriggebliebenen Nk*, muss es heissen: *einige zu den Ausgestorbenen Bk, andere zu den Uebriggebliebenen Nk,*

— 358 — 8 statt $\frac{S\overset{1}{-}A\,\Delta\,A}{B\,A}$ muss stehen $\frac{S\overset{1}{-}B\,\Delta\,A}{B\,A}$.

— 360 und 361. In den §§. 170 und 171 ist für *das n te Jahr*, zu lesen, *das (n+1) te*, und für *das (n+1)te das (n+2)te.*

— 363 letzte Zeile, statt $\frac{\overset{n+1}{-}A}{A}\cdot\frac{\Delta\,B}{B}\cdot$ muss stehen

$\frac{\overset{n+1}{-}A}{A}\cdot\frac{\Delta\overset{n}{-}B}{B}$.

— 367 Z. 12 statt $C\overline{a(b-1)}\,C\,a\,b-+\frac{\Delta\overset{-1}{-}B}{B}$

muss stehen $C\overline{a(b-1)}-C\overline{a\,b}+\frac{\Delta\overset{-1}{-}B}{B}$

— — Zeile 16 statt $\frac{S.\overset{1}{-}A.\ \Delta\overset{1}{-}B}{A.\ B}$ muss stehen

$\frac{S.\overset{1}{-}A.\ \Delta\,B}{A.\ B}$

Seite

Seite 370 *Zeile* 21 und letzte, für $= 0{,}064$ liess $= 0{,}066$

— 373 — 15 statt $= 14{,}689$ liess $= 14{,}589$

— 384 — 13 für $\frac{\ }{2}\lambda\overline{ab}$ liess $\frac{1}{2}\lambda\overline{ab}$

— 389 — 18 statt *das Geld zahlbar, sobald* liess, *die Summe zahlbar oder nicht zahlbar, sobald*

— 397 — 9 $1+\frac{\lambda\overline{a+1}}{r}$ liess $1+\lambda\overline{a+1}$.

— — Zeile 10. 11. 12 statt $1+\frac{\lambda\overline{a+1}}{r}$ muss stehen

$\frac{1+\lambda\overline{a+1}}{r}$, und statt $\left(1+\frac{\lambda\overline{a+2}}{r^2}\right)$ und

$\left(1+\frac{\lambda\overline{a+n+1}}{r^{n+1}}\right)$ muss stehen $\left(\frac{1+\lambda\overline{a+2}}{r^2}\right)$

und $\left(\frac{1+\lambda\overline{a+n+1}}{r^{n+1}}\right)$.

— 409 Unten in der Note für *§. 3.* liess *§. 8.*

— 410 Z. 10 muss nach den Worten, *wenn C stirbt*, zugesetzet werden, *und die, dass B todt sey und A noch lebe, wenn C stirbt*,

— 427 Z. 6 statt $\frac{\Delta \overset{1}{-} A.\ \Delta \overset{1}{-} B}{A\,B}$ muss stehen

$\frac{\Delta \overset{1}{-} A\ \Delta \overset{1}{-} B}{2.\ A\,B}$.

— 438 — 7 statt $C A \overset{1}{-} B$ muss stehen $C \overset{1}{-} A \overset{1}{-} B$

— 444 — 7 und 10 für *jüngste Person* liess *älteste Person.*

Seite 448 *Zeile* 2 ſtatt $2.\left(\frac{\Delta\, A \overset{1}{-}B \overset{1}{-}C}{A\,B\,C}++\right)$

muſs ſtehen $2.\left(\left(\frac{\Delta\, A. \overset{1}{-}B \overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C}\right.\right.$

und Zeile 3 ſtatt $\left(\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\,B}+\right)$ muſs

ſtehen $\left(\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{\overset{1}{-}A\overset{1}{-}B}{A.\,B}+\right))$

— 451 — 13 ſtatt $\frac{\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\,B}$ muſs ſtehen

$\frac{S.\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\,B}$.

— 453 — 17 für *von A, wenn B* lieſs, *von A zahlbar, wenn B*

— 456 — 8 ſtatt $\frac{B-\overset{\gamma+1}{-}B}{B}$, $\frac{B-\overset{\gamma+2}{-}B}{B}$, muſs

ſtehen $\frac{\overset{\gamma}{-}B-\overset{\gamma+1}{-}B}{2\,B}$, $\frac{\overset{\gamma}{-}B-\overset{\gamma+2}{-}B}{2\,B}$

— 457 — 16 ſtatt $\overset{1+m}{-}B$ muſs ſtehen $\overset{\gamma+m}{-}B$, und

ſtatt $\overset{1+m}{-}C$ muſs ſtehen $\overset{\beta+m}{-}C$

— 466 letzte Zeile, für $\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A.\,r^{n-1}}$ ſetze man

$\frac{\overset{n-1}{-}A}{A\,r^{n-1}}$

Seite

Seite 467 *Zeile* 11 für $\left(1 - \frac{1}{r^{-1}}\right.$ setze man $\left(1 - \frac{1}{r^{n-1}}\right)$

— 485 — 13 statt zweymal $+ \frac{S.\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\ B}$ muss einmal stehen $+ \frac{S.\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}C}{A\ C}$

— 496 letzte Zeile, für (§. 134.) liess (§. 234.)

— 519 Z. 8 für C. Q liess C. $\overleftarrow{Q}$.

Erstes Capitel.

Von Zeitrenten.

Erster Abschnitt.

Von unveränderlichen Zeitrenten.

I.

Erklärungen. Unter *Renten* kann im allgemeinen jede Geldeinnahme verstanden werden, die nach gewissen gleichen Zwischenzeiten, oder *terminlich*, erhoben wird.

Der *Rentenier* ist derjenige, der die Einnahme zu empfangen hat. Ist sie für eine baare Summe Geldes gekauft, so heisst diese Summe die *Mise* und der, welcher sie verkauft hat, der *Entrepreneur*.

Wird die Rente *jährlich* bezahlt, so heisst sie eine *Jahrrente (Annuität)*; sie ist eine *Halbjahrsrente*, *Vierteljahrsrente*, *monatliche Rente*, nach der Grösse der Zwischenzeiten; überhaupt eine *Zeitrente*.

Es iſt eine *gewiſse Rente*, wenn ſie auf eine beſtimmte Zahl von Terminen, Jahren, Halbjahren, Vierteljahren, Monaten u. ſ. f. *gewiſs* zu bezahlen iſt. *(Annuity certain.)* Dieſe kann den allgemeinen Namen der *Zeitrente* behalten. Hängt ihre Auszahlung aber ab von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Perſonen, ſo wird ſie eine *Lebensrente.*

Iſt die Einnahme in jedem Termin von gleicher Gröſse, ſo iſt die Rente *unveränderlich*. Gewöhnlich ſchlieſst man auch dieſs in dem Begriff von der Rente ein. Sie kann aber auch *veränderlich* ſeyn. Hängt dieſe Veränderung von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Perſonen ab, ſo iſt ſie eine *veränderliche Lebensrente.* Die *Tontinen* gehören hieher. Iſt die Veränderung, ohne daſs es aufs Leben oder Sterben von jemanden ankomme, ſonſt durch eine allgemeine Regel feſtgeſetzt, ſo heiſsen ſie *veränderliche Zeitrenten.*

2.

Erklärung. Ein Capital, welches in einem Jahr *1 Rthl.* Zinſen trägt, iſt das *Grundcapital.* Es ſoll hier durchgehends im allgemeinen durch *p* bezeichnet werden. Die Engländer nennen es *Perpetuity.* Von *jährlichen* Zinſen iſt die Rede, wenn nicht ausdrücklich ein anders erinnert wird. Statt des 1 R. Thalers kann jede andere Einheit geſetzet werden.

Zuſatz 1. Die *jährlichen Zinſen* eines Capitals *1*, ſind $= \frac{1}{p}$. Es ſey ferner das durch die Zinſen Eines

Jahrs

Jahrs gewachſene Capital zu dem anfänglichen Capital, oder $1 + \frac{1}{p} : 1 = r$, ſo heiſst r der *Zinsfuſs*; und $r - 1$ die *Zinſen* von 1.

Zuſatz 2. Dann iſt auch $p = \frac{1}{r-1}$.

Zuſatz 3. Für 3 *Procent*, iſt $r = 1,03$; $p = 33\frac{1}{3}$.

Für 4 — — — $r = 1,04$; $p = 25$.

Für 5 — — — $r = 1,05$; $p = 20$.

3.

Satz 1. Ein baares Capital C ſey nach x Jahren, Zinſen und Zinſes Zinſen gerechnet, angewachſen zu Z, ſo iſt $r^x C = Z$; oder *das gegebene anfängliche Capital multiplicirt mit dem Zinsfuſs, in der Potenz genommen, die ſo groſs iſt als die Zahl der Jahre, giebt die Gröſse, wozu das erſte Capital angewachſen iſt.*

Und der *jetzige* oder *baare Wehrt* von einer Ausgabe (oder Einnahme) Z, die nach x Jahren erfolgen ſoll, iſt $= \frac{Z}{r^x}$. Das heiſst, wenn die künftige Ausgabe nach gewiſſen Jahren, mit dem Zinsfuſs in der Potenz, ſo groſs als die Zahl der Jahre, dividirt wird, ſo bekommt man den *gegenwärtigen* oder *baaren Wehrt der künftigen Ausgabe.*

Beweis. Es kann dieſs aus der Zinsrechnung hier als ein Grundſatz angeſehen werden. Der Beweis davon iſt aber leicht. Denn:

Wie $1 : r$ ſo iſt am *Ende des erſten Jahrs* C zu Cr.

Wie $1 : r$ ſo - - - - - *2ten* — $Cr : Cr^2$.

Wie 1 : r so ist am *Ende des 3ten Jahrs* $Cr^2 : Cr^3$.

Wie 1 : r so - - - - - - *xten* — $Cr^{x-1} : Cr^x$.

Das ist am Ende des *xten* Jahrs ist aus C geworden $Z = Cr^x$.

Zusatz. Woraus denn von selbst folgt, dass, wenn Z gegeben ist, auch $Z : r^x = C$ ist.

Die Summe Z so verändern, heisst, sie auf x Jahre *zurük discontiren.*

4.

Die *erste Tabelle* enthält die Wehrte von r^x, bis auf 100 Jahre, für unterschiedene *Zinsfüsse*, oder nach verschiedenen Procenten. Einige dieser Wehrte sind bis auf 10 Decimalziffern genau berechnet. Es giebt Fälle, wo man sie so weit nöthig hat. Die Art, wie diese Tabelle gebraucht wird, ist für sich einleuchtend. Z. B. Welche Summe entsteht aus 1556 Rthl. nach 35 Jahren, wenn die jährlichen Zinsen 4 Procent, jedesmal wiederum zu Capital gemacht werden? Man multiplicire die gegebene Summe 1556 mit der Zahl 3,94609, die in der Tabelle bey dem 35*sten* Iahre steht, wenn man nämlich nur bis 5 Decimalziffern zu gehen hat. Diess macht 6140,11604 Rthl. Das ist die gesuchte Summe.

Sucht man den baaren Wehrt einer nach 10 Jahren erst zahlbaren Summe von 1000 Rthl., so bedient man sich der *zwoten* Tafel. Der gesuchte Wehrt ist $\frac{1}{r^x} . 1000$ Rthl. Wo $x = 10$ ist, steht in der Tabelle für $\frac{1}{r^x}$, wenn

4 Pro-

4 Procent gerechnet wird, der Decimalbruch 0,67556. Diefs mit 1000 multiplicirt macht $675\frac{56}{100}$ Rthl.

5.

Die Procente 3, 4, 5 find die gewöhnlichften. Daher find die Wehrte in den beyden erften Tabellen für diefe Procente bis auf 10 Decimalziffern berechnet. Bey andern Procenten war das nicht nöthig.

Wenn man keine Tabellen hat für verfchiedene Procente, fo kann man fich fo helffen. Man fuche Cr^x für einen gewiffen Zinsfufs r. Ein anderer Zinsfufs fey ϱ, fo ift $C\varrho^x : Cr^x = \frac{\varrho^x}{r^x}$. Diefs fey $= V$. Alsdenn ift

$$x . (\log. \varrho - \log. r) = \log. V.$$

und $Cr^x . V = C\varrho^x$.

Wenn $r = 1,04$, fo ift

für $\varrho = 1,045$; oder was einerley ift, für $4\frac{1}{2}$ Procent

$\log. \varrho - \log. r = 0,0020830$

für $= 1,055$; — — — $= 0,0062192$

— $= 1,06$; — — — $= 0,0083726$

— $= 1,035$; — — — $= -0,0020930$

— $= 1,02$; — — — $= -0,0084331$.

Ex. Das Capital von 1556 Rthl. macht nach dem Zinsfufs $r = 1,04$ nach 35 Jahren die Summe 6140, 11604 Rthl., wie viel macht folches nach dem Zinsfufs $= 1,045$, oder $4\frac{1}{2}$ Procent?

Man multiplicire 0,0020830 mit 35. Diefs macht $0,0729050 = \log. V$. Alfo $V = 1,1828$. Folglich $6140,11604 . 1,1828 = 7262,5$ Rthl.

Weiter

Weiter kann man die Decimalziffern nicht brauchen. Die letzte Ziffer in V, ist 0,0008. Diese ist schon nicht völlig genau. Daher in dem Product $6000 \times 0{,}0008 = 4{,}8$ die letzte Ziffer 8 es auch nicht ist. Ueberhaupt ist der Gebrauch der Logarithmen in diesen Rechnungen nur ein Nothbehelf. Oft geht mehr an Genauigkeit dadurch verloren, als an Abkürzung der Arbeit gewonnen wird. Ein geübter Rechner macht sich aus ihrer Hülfe nicht viel.

6.

Zusatz 1. Wenn die Hälfte der *jährlichen* Zinsen *halbjährlich*, ein *Viertheil* von jenen *viertheiljährlich* eingenommen wird, und sogleich wiederum untergebracht werden kann, so ist der Wehrt eines Capitals C = nach *x* Jahren, oder $Z = \left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^{nx} . C.$ Die Zahl *n* zeiget an, der wie vielte Theil eines Jahrs die Termine für die Zinsen sind, und $r - 1$ ist der jährliche Zins, davon $\frac{r-1}{n}$ in jedem Termin abgetragen wird.

Wenn *halbjährlich* die Zinsen empfangen werden, so ist $Z = \left(\frac{r+1}{2}\right)^{2x} . C.$ Denn da $r - 1$ der *jährliche* Zins ist, und also $\frac{r-1}{2}$, $\frac{r-1}{4}$, $\frac{r-1}{n}$, der halb- der vierteljährlich, und $\frac{1}{n}$ teljährlich einzunehmende Theil davon, so ist das um die Zinsen gewachsene Capital 1 in Einem solchen Termin $= 1 + \frac{r-1}{2}$; $1 + \frac{r-1}{4}$; $1 + \frac{r-1}{n}$. Diese Zahlen sind nun hier, was *r* vorher

war. Zugleich ſind aber auch in x Iahren nx Termine. Folglich iſt $Z = \left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^{nx} . C.$

7.

Zuſatz 2. Wenn die *jährlich* zu zahlenden Zinſen von 1 als Capital, $r - 1$ ſind, ſo können die *halbjährlichen* nicht die Hälfte davon $\frac{r-1}{2}$ ſeyn, wenn nämlich Zinſen auf Zinſen für jeden Termin gerechnet werden. Iſt $\frac{r-1}{2}$ der halbjährliche Zins von 1, ſo wird aus dem Capital C am Ende zweyer halben Jahre, das iſt, am Ende eines Jahres $\left(\frac{r-1}{2}\right)^2 . C$; und da das Capital ſelbſt C iſt, ſo iſt der jährliche Zins auf das Capital 1, ſo viel als $\left(\frac{r+1}{2}\right)^2 - 1$.

Alſo iſt der Zinsfuſs $= \left(\frac{r+1}{2}\right)^2$, nicht aber r.

Iſt der $\frac{1}{n}$teljährliche Zins $= \frac{r-1}{n}$, ſo iſt der jährliche Zins $\left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^n - 1$, und der Zinsfuſs auf jährliche Zinſen $= \left(1 + \frac{r-1}{n}\right)^n$.

Wenn der Zinsfuſs r derſelbige bleiben ſoll, für die ganzen Jahrszinſen, ſo iſt das Capital C nach einem Jahr $= C. r$.

Es ſey der *halbjährliche* Zinsfuſs, der das Capital in derſelbigen Zeit eben ſo hoch bringt, ϱ, ſo iſt $C. \varrho^2 = C. r$. alſo iſt $\varrho = r^{\frac{1}{2}}$. Folglich der *halbjährliche Zins* von $1 = r^{\frac{1}{2}} - 1$, wenn der jährliche $= r - 1$ iſt (§. 2.)

Ist ϱ der Zinsfuss für $\frac{1}{n}$teljährliche Zinsen, so ist $C.\varrho^n = C.r$, und wiederum $\varrho = r^{\frac{1}{n}}$, und der $\frac{1}{n}$teljährliche Zins von 1 ist $= \varrho - 1 = r^{\frac{1}{n}} - 1$.

Z. B. Wer 4 Procent jährlich zu zahlen hat, in welchem Fall $r - 1 = 0,04$ ist, zahlt eben so viel, wenn er halbjährlich 0,019804. giebt, vorausgesetzt nämlich, dass die Zinsen sogleich wieder genutzet werden können. Denn $r^{\frac{1}{2}} = (1,04)^{\frac{1}{2}} = 1,019804$, und $r^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,019804$. Ist C = 10000 Rthl., so ist für 4 Procent die Interesse in Einem Jahr 400 Rthl., dagegen die Summe der beyden halbjährlichen Zinsen in diesem Fall nur 396,08 Rthl. ausmacht, wobey doch auch zu bemerken, dass der Unterschied nur gering ist.

Um die Vergleichung der *halb-* und *vierteljährlichen Zinsen* mit den *ganzjährlichen* zu erleichtern, setze ich folgende Tabelle her. Sie ist noch weiter unten brauchbar.

Für $r = 1,03$ ist	$\sqrt{r}$, od. $r^{\frac{1}{2}} = 1,014889$, u.	$\sqrt{\sqrt{r}}$, od. $r^{\frac{1}{4}} = 1,007417$
Für $r = 1,04$ ist	- - $r^{\frac{1}{2}} = 1,019804$, u.	- - $r^{\frac{1}{4}} = 1,009853$
Für $r = 1,05$ ist	- - $r^{\frac{1}{2}} = 1,024695$, u.	- - $r^{\frac{1}{4}} = 1,012272$
Für $r = 1,035$ ist	- - $r^{\frac{1}{2}} = 1,017349$, u.	- - $r^{\frac{1}{4}} = 1,008637$
Für $r = 1,045$ ist	- - $r^{\frac{1}{2}} = 1,022252$, u.	- - $r^{\frac{1}{4}} = 1,011064$
Für $r = 1,06$ ist	- - $r^{\frac{1}{2}} = 1,029563$, u.	- - $r^{\frac{1}{4}} = 1,014674$

8.

Zusatz 3. Ein Capital C, das an jährlichen Zinsen 4 Procent giebt, verhält sich zu einem andern C′, das an halbjährlichen Zinsen 2 Procent trägt, wie 2 : 1,9804. wenn die Zinsen von beyden gleich sind. Denn die halbjährlichen Zinsen von C sind $= C.\left(r^{\frac{1}{2}} - 1\right)$, da solche von C′. sind $= C'.\left(\frac{r-1}{2}\right)$. Sind nun beyde Zinsenpöste gleich, so ist

$$C\left(r^{\frac{1}{2}} - 1\right) = C' \frac{(r-1)}{2}, \text{ und}$$

$$C : C' = \frac{r-1}{2} : r^{\frac{1}{2}} - 1 = 2 : 1,9804.$$

Zusatz 4. Ueberhaupt wenn ein Capital C, dessen jährliche Zinsen r — 1 von 1 sind, eben so viel an Zinsen bringen soll, als ein anders C′, dessen Zinsen in jedem $\frac{1}{n}$tel Theil des Jahrs fällig, und dann $\frac{r-1}{n}$ von 1 sind, so muss $C : C' = \frac{r-1}{n} : r^{\frac{1}{n}} - 1$ seyn.

Die Differenz zwischen beyden ist:

$$= C.\left(\frac{\frac{r-1}{n} - \left(r^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\frac{r-1}{n}}\right).$$

9.

Zusatz 5. Wenn *n unendlich* gross ist, das ist, wenn die Zinsen alle Augenblicke fällig sind, und dann auch jedesmal $= \frac{r-1}{n}$ von 1; so wird das anfängliche Capital nach *x* Jahren zu $C.\, e^{(r-1)x}$ anwachsen, wo *e*

die Zahl ist, deren *natürlicher Logarithmus* 1 ist, das ist $e = 2,7182818\ldots$

Ist $r = 1,04$, so ist $r - 1 = \frac{1}{25}$. Bey diesem Zinsfuss steigt das Capital also in 25 Jahren auf $2,718\ldots$ C was, wenn bloss jährliche Zinsen gerechnet werden, nur zu $2,666\ldots$ C. kommen würde. Den Beweis hiervon sehe man in den *Zusätzen zu diesem Capitel.* *)

10.

Zusatz 6. Weil $C . r^x = Z$, so ist auch $\frac{Z}{C} = r^x$, und $\frac{\log. Z - \log. C.}{x} = \log. r.$

Das ist, es wird der Zinsenfuss für jährliche, halb- und vierteljährliche, und überhaupt für gewisse *terminliche* Zinsen gefunden, wenn man weiss, um wie viel ein gewisses Capital in einer bestimmten Zahl von dergleichen Terminen gewachsen ist.

11.

Zusatz 7. Wenn ein *Capital C* in einem solchen Verhältniss *abnimmt*, wie es vorher durch die Zinsen und Zinsen von Zinsen als wachsend angesehen ist, und wiederum *p* das *Grundcapital* ist, dessen terminliche Abnahme 1 ist, so wird die *Abnahme* in dem *ersten* Termin betragen $\frac{C}{p}$, und alsdenn übrig seyn $\left(\frac{p-1}{p}\right)$ C. Wird $\frac{p-1}{p} = q$, der Verminderungsfuss genannt, wie oben

*) §. 1.

oben r der Zinsfuſs heiſst, ſo iſt nach x Terminen der Reſt von dem anfänglichen Capital, oder $Z' = C. q^x$.

Es iſt nämlich im *erſten* Termin übrig $\frac{p-1}{p}. C.$ Im *zweyten* alſo $\left(\frac{p-1}{p}\right)^2. C$, weil $1 : \frac{p-1}{p} = \frac{p-1}{p}. C :$ $C \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 = C. q^2$, und ſo ferner für die folgende Termine.

„Ein Capital kann auf dieſe Art, da es in einem *geo-* „*metriſchen* Verhältniſs abnimmt, nie ganz auf Nichts „kommen, aber bald unerheblich klein werden."

12.

Die *dritte Tabelle* enthält die baaren Wehrte der *Jahrrenten* 1 auf gewiſſe Jahre. Sie wird gemacht durch die Summirung der Zahlen der nächſt vorhergehenden Disconto-Tafel. Die zu jedem Jahr gehörigen Wehrte können durch $\int \frac{1}{r^x}$ bezeichnet werden. Sonſt werden dieſe Rentenwehrte auch nach dem nächſt folgenden Lehrſatz, ohne viele Weitläuftigkeit berechnet.

Für den Zinsfuſs 2, 3, 4 und 5 Procent iſt dieſe Tafel, auf mehrere Decimalziffern von Hr. von Drateln berechnet.

Uebrigens iſt die Art, wie ſie zu gebrauchen ſey, von ſelbſt einleuchtend. Will Z. B. jemand 10 Jahre nach einander jedes Jahr, am Ende deſſelben, 10 Rthl. empfangen, ſo iſt nach 4 Procent gerechnet der baare Wehrt dieſer Iahrrente 10. 8, 110896 Rthl. $= 81\frac{1}{10}$ Rthl.

13. *Satz*

13.

Satz 2. Der baare Wehrt einer Zeitrente 1, welche auf eine Zahl von Terminen, jedesmal am Ende des Termins, gezahlet werden soll, ist gleich dem Rest, der übrig bleibet, wenn man von dem Grundcapital, eben dieses Capital auf die gegebene Zahl von Terminen zurück discontirt, abgezogen hat.

Heisst der baare Wehrt der Zeitrente V, der Zinsfuss für einen Termin *r*, (das Grundcapital, das ist, dessen Zins $= 1$ ist, wiederum *p*,) die Zahl der Termine *x*, so ist $V = p - p\frac{1}{r^x}$.

Beweis. Es ist der baare Wehrt der Rente für den ersten Termin $= \frac{1}{r}$; für den zweyten $= \frac{1}{r^2}$, für den dritten $\frac{1}{r^3}$ und so überhaupt für den *xten* Termin $= \frac{1}{r^x}$. Also die Summe aller dieser, oder $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^x}$ = der Summe dieser geometrischen Reihe, ist $=$ V. Aber diese Reihe ist $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$. Nun ist $p = \frac{1}{r-1}$ folglich $\int\frac{1}{r^x} = p - \frac{p}{r^x}$.

14.

Zusatz 1. Die Tabelle reicht auf 100 Jahr, also für die meisten Fälle weit genug. Wird indessen eine Zeitrente für noch mehrere Termine verlangt, ist nämlich *x* grösser als 100, so kann man sie aus diesen Tabellen berechnen nach folgender Formel: $\int\frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n}. \int\frac{1}{r^{x-n}}$.

Es

Es ist nämlich $\int\frac{1}{r^n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} ++ \frac{1}{r^n}$ und

$$\frac{1}{r^n}\int\frac{1}{r^{x-n}} = \frac{1}{r^n}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2} ++ \frac{1}{r^{x-n}}\right)$$

$$= \frac{1}{r^{n+1}} + \frac{1}{r^{n+2}} ++ \frac{1}{r^x}.$$

Folglich $\int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n}\int\frac{1}{r^{x-n}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} ++ \frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^x}$

Solte auf 200 Termine gerechnet werden, so ist $x = 200$. Man nehme $n = 100$, so ist $x - n = 100$, und $\int\frac{1}{r^{100}} + \frac{1}{r^{100}}\int\frac{1}{r^{100}} = \int\frac{1}{r^{200}} = \left(1 + \frac{1}{r^{100}}\right).\int\frac{1}{r^{100}}$, wie überhaupt $\left(1 + \frac{1}{r^n}\right).\int\frac{1}{r^n} = \int\frac{1}{r^{2n}}$.

Anmerkung. Wenn man eine Zeitrente nach *einem andern Zinsfuſs* suchet, als diejenigen, wornach die Tabellen berechnet sind, z. B. für $2\frac{1}{2}$ Procent oder für $4\frac{3}{4}$ Procent, so kommt es in der Summe $\int\frac{1}{r^x} = \frac{1}{r-1}.\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ nur an auf das Stück $\frac{1}{r^x}$, weil $\frac{1}{r-1}$ das Grundcapital ist, und sich von selbst giebet. Aber man kann $\frac{1}{r^x}$ für ein *arithmetisches Mittel* annehmen zwischen dem Wehrt, den es hat bey einem Zinsfuſs, der um ein gleiches gröſser ist, und dem bey einem andern, der um ein gleiches kleiner ist, in Fällen wo der Unterschied der Procente nur klein, z. B. nur $\frac{1}{2}$, und x nicht gröſser als 10 ist. Ist x gröſser als 10, so werden die *Differenzen* der Discontozahlen bey dem *mittlern* und dem *niedern* Zinsfuſs um 0,01 gröſser als

bey

bey dem *mittlern* und dem *höhern;* woraus die für $\frac{1}{r}$ genommene arithmetische Mittelzahl corrigirt werden kann. Will man mit dem mittlern Zinsfuss solche vergleichen, die um 1 Procent grösser und kleiner sind, so werden die Differenzen der Discontozahlen des mittlern und des niedern nahe an 0,02 grösser, als bey dem mittlern und dem höhern, wenn x nämlich über 10 ist. Daraus entsteht dann wiederum eine nur unerhebliche Correction für die gesuchte Discontozahl zu dem mittlern Zinsfuss, die man als Mittel zwischen jenen annahm. Allein hiemit reicht man dann auch aus, so lange x nicht grösser als 100 wird.

Für $r = 1,04$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0,3083$

Für $r = 1,035$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0,3563$

Differenz $= 0,0480$

Für $r = 1,03$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0,4120$

Differenz für die
beyden kleinen $r = 0,0557$.

Also 0,0077 grösser als die Differenz der beyden grössern, also noch nicht 0,01. Das für $\frac{1}{r^{30}}$ nach $r = 1,035$ oder nach $3\frac{1}{2}$ Procent angenommene Mittel ist 0,3597 und der wahre Wehrt 0,3563, wo der Unterschied nur 0,0034 beträgt.

Für $r = 1{,}05$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0{,}2314$

Für $r = 1{,}04$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0{,}3083$

Differenz ist $= 0{,}0769$

Für $r = 1{,}03$ ist $\frac{1}{r^{30}} = 0{,}4120$

Differenz $= 0{,}1037$.

Die letzte Differenz der beyden niedern Procente ist 0,0268 grösser als die Differenz der beyden erstern.

Das Mittel zwischen $\frac{1}{r^{30}}$ nach 5 Procent und 3 Procent ist 0,3217. Diess angenommen für den Wehrt $\frac{1}{r^{30}}$ nach 4 Proc. ist zu gross um 0,0124.

Für $r = 1{,}05$ ist $\frac{1}{r^{100}} = 0{,}0076$

Für $r = 1{,}04$ ist $\frac{1}{r^{100}} = 0{,}0198$

Differenz $= 0{,}0122$

Für $r = 1{,}03$ ist $\frac{1}{r^{100}} = 0{,}0520$

Differenz $= 0{,}0322$

Die letzte Differenz ist um 0,02 grösser als die erstere. Also würde der nach der obigen Regel angenommene mittlere Wehrt für $\frac{1}{r^{100}}$ nach 4 Procent um 0,01 zu gross gewesen seyn.

15. *Zusatz*

15.

Zusatz 2. Ist *x unendlich* gross, so ist $\int \frac{1}{r^x} = p$, das ist, der Wehrt der Rente 1 *auf immer*, ist das Grundcapital selbst.

16.

Zusatz 3. Soll die Zeitrente, nicht gleich am Ende des ersten Termins, sondern *nach verflossenen n Terminen* zum ersten mal zahlbar seyn, und dann durch *x* Termine fortgehen, das ist, *auf* n — 1 *Termine aufgeschoben werden*, so ist ihr Wehrt

$$= \frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n+1}} + \frac{1}{r^{n+2}} + + \frac{1}{r^{n+x-1}} = \frac{1}{r^{n-1}} \int \frac{1}{r^x},$$

das ist, die Zeitrente auf *x* Termine aus den Tabellen muss auf *n* — *1* Termine zurück discontirt werden.

Ex. Der baare Wehrt einer Jahrrente von 10 Rthl. auf zehn auf einander folgende Jahre ist 81, 10896, wenn r = 0, 04. Soll diese Rente aber das erstemal am Ende des zehnten Jahrs bezahlt und dann zehn Jahre damit fortgefahren werden, so ist ihr Wehrt

81, 10896 × 0, 702587 = 56,9861 Rthl. Denn

0,702587 ist $= \frac{1}{r^{10-1}} = \frac{1}{r^9}$ nach der Tab. 2.

Anmerkung. Die am Ende des n^{ten} Termins zuerst zahlbare Rente, fängt im Anfang des Termins schon an zu *laufen*, wie einige reden. Sie ruhet *n* — *1* Termine, oder, ist eine um *n* — *1* Termine *aufgeschobene* Rente.

17.

Zusatz 4. Soll die Rente das erstemal sogleich, und dann in der Folge jedesmal im *Anfang der Termine*, das ist, jedesmal *vorschussweise*, bezahlt werden, so ist ihr Wehrt für x Termine $= 1 + \frac{1}{r} + + \frac{1}{r^{x-1}}$ das ist $= \int \frac{1}{r^{x-1}} + 1$. Diess ist so viel als $r\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right)$ das ist, *als der Wehrt der am Ende der Termine zahlbaren* Rente mit r multiplicirt.

18.

Zusatz 5. Verlangt jemand an Statt der *jährlichen* Renten *halbjährliche* für dieselbige baare Summe, so verlangt er doppelt so viele Termine, kann aber nicht in jedem Termin die Hälfte der Jahrsrente empfangen. Diess würde dem Entrepreneur zum Schaden gereichen. Was er in jedem Termin von der Jahrsrente 1 empfangen kann, sey N, und der Zinsfuss für halbjährliche Zahlungen sey ϱ; so ist (nach §. 7.) $\varrho = r^{\frac{1}{2}}$, wenn r der Zinsfuss für jährliche Zahlungen ist, und dieser bey den halbjährlichen nicht verändert werden soll. Der baare Wehrt aller Renten auf *2 x halbe* Jahre ist demnach $= \frac{N}{\varrho} + \frac{N}{\varrho^2} + \frac{N}{\varrho^3} + + + \frac{N}{\varrho^{2x}} = N. \int \frac{1}{\varrho^{2x}} = N. \frac{1}{\varrho - 1}\left(1 - \frac{1}{\varrho^{2x}}\right) = N. \frac{1}{\varrho - 1}. \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$. Und da diess seyn soll $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ so ist $N = \frac{\varrho - 1}{r - 1} = \frac{r^{\frac{1}{2}} - 1}{r - 1}$.

Was in jedem halbjährlichen Termin gegeben werden

 kann,

kann, verhält sich also zu 1., wie 0,0198 : 0,04. Ist die jährliche Rente R, so ist die halbjährliche

$$N = \frac{r^{\frac{1}{2}} - 1}{r - 1}. R.$$

19.

Zusatz 6. Sind die Zahlungstermine $\frac{1}{n}$tel des Jahrs, so werden die $\frac{1}{n}$ *teljährliche* Renten $N = \frac{r^{\frac{1}{n}} - 1}{r - 1}. R$, wenn die Jahrsrente $= R$ ist. Also *verhält sich die* $\frac{1}{n}$ *teljährliche Rente N zu der jährlichen R, nach demselben Zinsfuss, wie* $\frac{1}{r-1} : \frac{1}{r^{\frac{1}{n}} - 1}$, und wenn $\frac{1}{r^{\frac{1}{n}} - 1} = p'$ gesetzet wird, wie $p : p'$, das ist, *wie das Grundcapital bey jährlichen Zinsen zu dem Grundcapital bey* $\frac{1}{n}$ *teljährlichen Zinsen,* oder, *umgekehrt, wie die* $\frac{1}{n}$ *teljährlichen Zinsen* $r^{\frac{1}{n}} - 1$ *zu den jährlichen* $r - 1$.

Ex. Ist der Zinsfuss 1,04, so kann an Statt der Jahrsrente 1, vierteljährlich nur gegeben werden

$$\frac{0,009853}{0,04} = 0,2463.$$

und *halbjährlich* $\frac{0,019804}{0,04} = 0,4951$.

20.

Zusatz 7. „Soll die für $\frac{1}{n}$tel Theil des Jahrs fäl„lige Rente $\frac{1}{n}$ seyn, das ist $\frac{1}{n}$tel von der Jahrsrente *1*, „dersel-

„derſelbige Zinsfuſs für ein ganzes Jahr aber behalten „werden, ſo iſt der Wehrt einer ſolchen Zeitrente zu „dem baaren Wehrt der Jahrsrente 1 auf gleich lange „Zeit, wie $\frac{1}{n} : \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1}$." Denn wenn gleich viele und gleich groſse Termine genommen werden, ſo verhalten ſich die baaren Wehrte der Zeitrenten, wie die Renten ſelbſt. Nun aber iſt $\frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1}$ die $\frac{1}{n}$teljährliche Rente, deren Wehrt für *x* Jahre, das iſt, nach *nx* Terminen eben ſo groſs iſt, als der Wehrt der jährlichen Rente 1 für gleich viele Jahre, oder auf gleiche Zeit. (§. 18.). Daher iſt *der Wehrt der Jahrsrente 1, zu dem Wehrt der Zeitrente* $\frac{1}{n}$, $= \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1} : \frac{1}{n} =$. Und umgekehrt der Wehrt der letzteren zum Wehrt der erſtern wie $\frac{1}{n} : \frac{r^{\frac{1}{n}}-1}{r-1}$. Iſt der Wehrt der $\frac{1}{n}$teljährigen Rente, von der Gröſse $\frac{1}{n} = w$, ſo iſt $w = \frac{r-1}{n(r^{\frac{1}{n}}-1)} \int \frac{1}{r^x}$.

Wenn alle halbe Jahre die Rente $\frac{1}{2}$ bezahlt wird, ſo iſt der Wehrt einer ſolchen Zeitrente auf gleich lange Zeit fortlauffend mit der Jahrsrente $= \frac{1}{2} \cdot \frac{r-1}{r^{\frac{1}{2}}-1} \cdot \int \frac{1}{r^x}$.

Für $r = 1,04$ iſt dieſs $= 1,0101 \ldots \int \frac{1}{r^x}$.

Soll aber die halbjährliche Rente $\frac{1}{2}$ nicht mehr Termine

 als

als die jährliche, also nur auf $\frac{x}{2}$ Jahre bezahlet werden, so ist der Wehrt 1,01... $\int \frac{1}{r^{\frac{x}{2}}}$,

21.

Zusatz 8. Wenn hingegen bey eben der Voraussetzung, dass in $\frac{1}{n}$ teljährlichen Terminen, $\frac{1}{n}$ tel als Rente zahlbar ist, der Zinsfuss verändert, und der Zins auf $\frac{1}{n}$ tel des Jahrs zu $\frac{r-1}{n}$ angenommen wird, so ist der baare Wehrt einer solchen Zeitrente auf x Jahre oder *nx* Termine $= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{r-1}{n}} + \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^2}\right.$

$$\left. + + \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^{nx}}\right) = \frac{1}{n}\int \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^{nx}} =$$

$$\frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+\frac{r-1}{n})^{nx}}\right).$$

Restituirt man den Zinsenfuss *r*, oder setzet statt $\frac{r-1}{n}$, die $\frac{1}{n}$ teljährigen Zinsen nach dem Zinsfuss *r*, nämlich $r^{\frac{1}{n}} - 1$, so erhält man auch wiederum für den Wehrt der Rente auf *nx* Termine $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^{\frac{1}{n}} - 1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ der sich zu dem Wehrte der jährlichen Rente 1 auf *x* Jahre verhält wie $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^{\frac{1}{n}} - 1} : \frac{1}{r-1}$, dem vorhergehenden im §. 20. gemäss.

22. *Zusatz*

22.

Zusatz 9. In grossen Handelsstädten giebt es Gelegenheiten das vorräthige Geld auf jede kleine Termine nutzbar zu machen, vornehmlich bey Banquiers und Wechslern. Das ist anderswo nicht so. Allein auch dorten ist es nicht gewöhnlich, die halb- und vierteljährlichen Zinsen, noch weniger die monatlichen und auf kleinere Termine, so zu berechnen, wie sie nach dem Obigen, wenn der jährliche Zinsfuss beybehalten werden soll, berechnet werden müssten. Man nimmt $\frac{r-1}{2}$, $\frac{r-1}{4}$, $\frac{r-1}{n}$ für die Zinsen von $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$tel; $\frac{1}{n}$ tel - Jahr an. Das kann auch füglich geschehen, weil der Unterschied nicht erheblich ist. Es ist völlig richtig, wo nur *einfache* Zinsen zu rechnen sind.

Nach dieser Voraussetzung ist der Wehrt der *halbjährlichen Zeitrenten* so zu berechnen, *als wenn zu jedem Jahrstermin 1 noch die halbjährlichen Zinsen für die am Ende des ersten halben Jahres zahlbare Hälfte mit* $\frac{1}{2} \cdot \frac{r-1}{2}$ *zugeleget werden müssen.* Die ein halbes Jahr früher zahlbare Hälfte kann von dem Entrepreneur aufgenommen, und am Ende des Jahrs die Zinsen davon zugleich mit dem Jahrstermin abgetragen werden, so wird die Zahlung halbjährlich geleistet.

Ist nun der Wehrt einer jährlichen Rente 1 auf x Jahre $\int \frac{1}{r^x}$, so wird der Wehrt einer halbjährlichen

Rente $\frac{1}{2}$ auf $2x$ Termine oder x Jahre, ſo groſs ſeyn als $\int\frac{1}{r^x} + \frac{1}{4}(r-1).\int\frac{1}{r^x}$. Denn an Statt, daſs ſonſt am Ende jedes Jahrs 1 gezahlet werden ſollte, muſs nach der obigen Vorausſetzung gezahlet werden $1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}$. Der baare Wehrt dieſer Zahlung iſt alſo auf x Jahre

$$= \frac{1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}}{r} + \frac{1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}}{r^2}$$

$$+ + \frac{1+\frac{1}{2}.\frac{r-1}{2}}{r^x}$$

$$= \int\frac{1}{r^x} + \frac{1}{4}.(r-1)\int\frac{1}{r^x} = \left(1+\frac{1}{4}(r-1)\right)\int\frac{1}{r^x}.$$

Weil $\int\frac{1}{r^x} = \frac{1}{r-1}.\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$ ſo wird das für halbjährliche Zahlungen zuzulegende Stück $=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$, das iſt, $\frac{1}{4}$tel der ganzen Jahrsrente weniger $\frac{1}{4}$tel derſelben auf x Jahre zurück discontirt. Wenn x eine groſse Zahl iſt, ſo kann das letzte discontirte Stück weggelaſſen werden. *Daher rechnet man gewöhnlich $\frac{1}{4}$tel einer Jahrsrente bey halbjährlichen Zahlungen mehr als bey jährlichen.*

Sollen *vierteljährliche* Zahlungen Statt finden, ſo iſt am Ende jeden Jahrs mehr zu zahlen

$$\frac{3}{4}.\frac{r-1}{4} + \frac{2}{4}.\frac{r-1}{4} + \frac{1}{4}.\frac{r-1}{4} = \frac{3}{8}.\overline{r-1}.$$

Dieſer Zuſchuſs zu dem Wehrt der Rente bey *jährlichen* Zahlun-

Zahlungen ist $= \frac{3}{8}(r-1)\int\frac{1}{r^x} = \frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$ oder wenn x eine grosse Zahl ist, so *viel als* $\frac{3}{8}$*tel einer Jahrsrente.*

Nimmt man $\frac{1}{n}$ *teljährliche Zahlungen*, so ist, wie aus dem vorhergehenden leicht erhellet, der Ueberschuss des Wehrts einer solchen Rente über den bey *jährlichen* Zahlungen für jedes Jahr,

$$= \frac{r-1}{n}.\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+ \dots + \frac{1}{n}\right)\int\frac{1}{r^x},$$

weil in jedem einzelnen Jahr ausser 1 noch $\frac{r-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+ \dots +\frac{1}{n}\right)$ zu zahlen ist, davon der baare Wehrt durch das Zurückdiscontiren gefunden wird.

Jener Zuschuss ist also $= (r-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\right)\int\frac{1}{r^x}$, und wenn n sehr gross ist; $= \frac{r-1}{2}\int\frac{1}{r^x} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^x}\right)$.

23.

Satz 3. Aufgabe. Wenn Statt der Jahrsrente 1 auf m Jahre eine andere Jahrsrente R, auf mehr oder mindere (n) Jahre gesucht wird, die aber mit der vorigen von gleichem baaren Wehrte seyn soll, wie gross muss die letzte seyn? Nach einerley Zinsfuss werden beyde berechnet.

Antwort. $R = \left(1-\frac{1}{r^m}\right) : \left(1-\frac{1}{r^n}\right)$.

Denn der Wehrt einer Jahrsrente 1 auf *m* Jahre oder $\int \frac{1}{r^m}$ ist $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$, und der Wehrt einer Jahrsrente R auf *n* Jahre, oder $R \int \frac{1}{r^n}$ ist $= R. \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$. Sollen beyde gleich grofs seyn, so ist

$$R = \frac{\frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)}{\frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)}.$$ Das ist, sie ist gleich dem Quotienten, wenn der Wehrt der Rente 1, auf *m* Jahre nach der Tabelle, mit dem Wehrt der Rente auf *n* Jahre aus derselben Tabelle dividirt wird. Diefs ist auch

$$= \frac{1 - \frac{1}{r^m}}{1 - \frac{1}{r^n}}.$$

Ex. Statt einer Jahrsrente 1, auf 10 Jahre, will jemand eine haben auf 5 Jahre, (der Zinsfufs $r = 1{,}04$).

So ist $n = 5$ und $\frac{1 - \frac{1}{r^m}}{1 - \frac{1}{r^n}} = \frac{0{,}32443}{0{,}17806} = 1{,}82.$

24.

Zusatz. Soll die Rente R zugleich auf einige Jahre *(q)* aufgeschoben werden, ehe sie *n* Jahre durch bezahlet wird, das ist, ruhet sie so lange, so wird sie

$$= r^q\, R = r^q \left(\frac{1 - \frac{1}{r^m}}{1 - \frac{1}{r^n}}\right).$$ Es ist *m* die Zahl der

Jahre,

Jahre, auf welche die Rente 1 berechnet und bezahlet ist; *n* die Zahl der Jahre, welche die neue Rente durchbezahlet werden soll, nachdem sie *q* Jahre geruhet hat, das ist, sie ist nach $q + 1$ Jahren zum erstenmal fällig.

25.

Satz 4. Wenn eine jährliche Einnahme 1 durch m Jahre aufgesparet und jedesmal untergebracht wird, so daß Zinsen und Zinsen von Zinsen erhalten werden, so ist ihr Wehrt alsdenn oder ihr derzeitiger Betrag so groß als ihr baarer Wehrt, durch die Zinsen von Zinsen in so viel Jahren vergrößert. Das ist, *ihr derzeitiger Wehrt ist*, $r^m \int \frac{1}{r^m}$.

Erster Fall. Wenn das Jahr, an dessen Ende die *erste* Einnahme fällt, für das *erste* Jahr gerechnet wird, und die *letzte* Einnahme 1, am Ende des *letzten m ten* Jahrs auch mitgerechnet wird zu der Summe, so ist es klar, daß am *Ende des ersten Jahrs* die aufgehobene Summe ist $1 = 1$; am *Ende des zweyten Jahrs* ist sie $= 1 + r$.

Die Einnahme aus dem ersten Jahr war am Ende des zweyten erwachsen auf r, und dazu kam die Einnahme des *zweyten* Jahrs. Beydes war also $1 + r$. Ferner ist die Summe am Ende des *dritten*

Jahrs $= 1 + r + r^2$ und am

Ende *des m ten Jahrs* $= 1 + r + r^2 + + r^{m-1}$.

Diese letzte Summe ist $= r^m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^m}\right) = r^m \int \frac{1}{r^m}$.

Zweyter Fall. Wenn die Einnahme *im Anfang der Jahre* gesetzt wird, das ist, wenn *vorschussliche* Renten aufgesparet werden, oder die Jahre mit der ersten Einnahme anfangen, so ist die *aufgesparte* Summe
am Ende des *ersten* Jahrs $= r$
am Ende des *zweyten* Jahrs $= r + r^2$
am Ende des *m ten* Jahrs $= r + r^2 + + r^m$
$= r^m \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^{m-1}}\right)$.

Also der *derzeitige Betrag* oder Wehrt, gleich dem mit r^m multiplicirten *(jetzigen* oder*) baaren Wehrt einer vorschusslichen Rente auf x Jahre.* (§. 17.)

26.

Zusatz 1. Weil $\int \frac{1}{r^m} = \frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$ bey der *gewöhnlichen*, nicht vorschusslichen, *Rente* ist, so ist
$$r^m \int \frac{1}{r^m} = \frac{r^m}{r-1} - \frac{1}{r-1} = (r^m - 1)\, p.$$

Und wenn die Rente eine *vorschussliche* ist, $= (r^{m+1} - r)\, p$.

Der *gesuchte derzeitige Wehrt* der *aufgesparten* Rente kann also auch so durch die erste Tabelle berechnet werden, dass nur Eine Multiplication mit dem Grundcapital erfoderlich ist.

Ex. 1. Wenn ein *sinkender Fond* in dem Verstande nämlich, worin die Engeländer das Wort nehmen, oder eine Tilgungscasse, jährlich 1000 *Rthl.* Einschüsse hat, und

diese

diese Gelder 50 Jahre mit Zinsen und Zinsen von Zinsen auffsammlet, so ist nach dem 4 Procentfuss $r^{50} - 1 = 7,1067 - 1 = 6,1067$. Also $25 . 6,10668 = 152,667$. Folglich die aus dem jährlichen Einschuss von 1000 Rthl. nach 50 Jahren erwachsene Summe 152667 Rthl.

Dasselbe kam heraus, wenn man erst den baaren Wehrt einer Jahrsrente von 1000 Rthl. auf 50 Jahre berechnet, und dann wiederum diesen mit r^{50} multiplicirt. Jener baare Wehrt ist 21482, 18 Rthl. und $21482,18 . 7,10668 = 152666,9789$ - - Rthl. Der geringe Unterschied entsteht, weil man eigentlich noch mehrere Decimalziffern aus der Tabelle hätte gebrauchen müssen. Zugleich ist es klar, dass die letztere Rechnung wegen der grossen Multiplication weitläuftiger sey als die erste.

Ex. 2. Wird der Einschuss *am Anfang* des Jahrs geleistet, so ist der Betrag nach 50 Jahren $r^{51} - r = 7,39095 - 1,04 = 6,35095$. Daher $6,35095 . 25 . 1000 = 158773,75$ Rthl.

Diess ist auch so viel, als der Betrag in dem vorhergehenden Exempel vergrössert durch Eines Jahres Zinsen, oder multiplicirt mit 1,04. Denn 152667 . 1,04 macht 158773, 68 Rthl. Ein unerheblicher Unterschied ist hier wiederum in den Decimalzahlen, aus demselben Grunde, wie vorher. Man wird hieraus doch sehen, dass die Berechnung der Wehrte in Tab. 1. 2. 3 auf

mehrere

mehrere Ziffern nicht unnütz sey, wenn gleich die meisten male so viel Genauigkeit nicht verlanget wird.

Man hat auch eigene Tabellen für die Wehrte von *aufgesparten Jahrsrenten.* Allein da sie so leicht aus den übrigen Tabellen zu berechnen sind, so habe ichs nicht für nöthig gehalten, dadurch die Tabellenzahl zu vermehren.

27.

Zusatz 2. Ist die halbjährliche Einnahme $\frac{1}{2}$, und wird selbige *2m* halbe Jahre oder *m ganze* Jahre aufgespart, so ist sie am Ende dieser Zeit $= \frac{1}{2} \cdot \frac{r^m - 1}{r^{\frac{1}{2}} - 1}$, wenn *am Ende des ersten halben Jahrs* die *erste* Einnahme gerechnet wird.

Es ist nämlich, eben so wie vorher, die Summe

am Ende des *ersten halben* Jahrs $= \frac{1}{2}$

am Ende des *2ten halben* Jahrs $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}}$

am Ende des *dritten* Termins $= \frac{1}{2} + \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{r^{\frac{2}{2}}}{2}$ und s. f.

am Ende des *2mten* Termins $= \frac{1}{2} + \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{r}{2} + + \frac{r^{\frac{2m-1}{2}}}{2}$.

Davon ist die Summe

$$= \frac{1}{2} r^{\frac{2m}{2}} \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{2}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} + + \frac{1}{r^{2m:2}} \right)$$ gleich dem baaren Wehrt der *halbjährlichen* Rente $\frac{1}{2}$. (§. 18.) mit r^m multiplicirt.

Eben

Eben dieser *derzeitige Wehrt* ist $= \frac{1}{2}\left(\frac{r^m - 1}{r^{\frac{1}{2}} - 1}\right)$.

Wenn p' das Grundcapital ist zu der halbjährlichen Rente §. 19. das ist, dessen halbjähriger Zins $\frac{1}{2}$ ist, oder $p' = \frac{1}{2(r^{\frac{1}{2}} - 1)}$, so wird jener Wehrt $= (r^m - 1)\, p'$.

Es verhält sich also die aufgeschwollene halbjährliche Rente zu der jährlichen, auf gleich lange Zeit, welche es auch sey, *wie* $\frac{r^m - 1}{2(r^{\frac{1}{2}} - 1)} : \frac{r^m - 1}{r - 1}$, das ist, wie $r - 1 : 2\,(r^{\frac{1}{2}} - 1)$.

Ist $r = 1{,}04$, so ist dieses Verhältniss $= 0{,}04 : 2 . 0{,}0198 = 4 : 3{,}96$. §. 7.

Die *vierteljährliche aufgeschwollene Zeitrente* $\frac{1}{4}$ ist am Ende von *m* Jahren

$$= \tfrac{1}{4}\left(1 + r^{\frac{1}{4}} + r^{\frac{2}{4}} + r^{\frac{3}{4}} + + r^{(4m - 1):4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} .\, r^{4m:4}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{4}}} + \frac{1}{r^{\frac{3}{4}}} + + \frac{1}{r^m}\right),$$

das ist, gleich dem *jetzigen baaren Wehrt der vierteljährlichen Rente multiplicirt* mit r^m. Der *derzeitige* Wehrt von jener ist also $= \frac{r^m - 1}{4(r^{\frac{1}{4}} - 1)}$, und das Verhältniss desselben zum Wehrt einer aufgeschwollenen Jahrsrente 1 ist $= r - 1 : 4\,(r^{\frac{1}{4}} - 1)$.

Auf

Auf dieselbe Art folget, daſs der *derzeitige* Wehrt einer $\frac{1}{n}$ teljährlichen Rente $\frac{1}{n}$, so groſs ist als $\frac{1}{n}\left(\frac{r^m - 1}{r^{\frac{1}{n}} - 1}\right)$, und folglich sich verhalte zum Wehrt der aufgesparten jährlichen Rente 1, wie $r - 1 : n\left(r^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

28.

Zusatz 3. Wenn der halbjährliche Zins $= \frac{r-1}{2}$ gesetzet wird, so ist das um die Zinsen vergröſserte Capital nach einem halben Jahr $1 + \frac{r-1}{2} = \frac{1+r}{2}$. Folglich die halbjährliche Einnahme $\frac{1}{2}$ auf *m* ganze Jahre *aufgespart*, die Einnahme jedesmal *am Ende des Termins* gerechnet,

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+r}{2} + \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 + + \left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m} - 1}{\frac{1+r}{2} - 1} = \frac{\left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m} - 1}{r - 1}$$

$$= \left(\left(\frac{1+r}{2}\right)^{2m} - 1\right)p.$$

Imgleichen, wenn $\frac{r-1}{4}$ der vierteljährliche *Zins* ist, so ist eine vierteljährliche Rente von $\frac{1}{4}$ auf *m* Jahr *aufgespart*

$$= \frac{\left(1 + \frac{r-1}{4}\right)^{4m}}{r-1} - \frac{1}{r-1}$$

Wenn

Wenn der $\frac{1}{n}$*teljährliche Zins* $\frac{r-1}{n}$ ist, so ist die $\frac{1}{n}$*teljährliche Einnahme aufgespart* durch *m* Jahre

$$= \frac{\left(1+\frac{r-1}{n}\right)^{nm}}{r-1} - \frac{1}{r-1} = \left(\left(1+\frac{r-1}{n}\right)^{nm} - 1\right) p.$$

Anmerkung. Die vorstehenden Formeln hat D. *Price*, und nach ihm *Morgan* angenommen, *) und darnach die Wehrte aufgesparter Zeitrenten, nachdem sie halbjährlich oder vierteljährlich weggelegt werden, verglichen. Diefs geht aber nicht an. Es bleibt nicht derselbe Zinsfufs in dem einen Fall wie in dem andern. Denn wenn der jährliche Zins von $1 = r - 1$ ist, so kann der halbjährliche nicht $\frac{r-1}{2}$; und wenn dieser letztere so genommen wird, der vierteljährliche wiederum nicht $\frac{r-1}{4}$ seyn. Es ist ein Versehen, wenn die benannten beyden Berechner so die Vergleichung anstellen zu können geglaubt haben.

Das Verfahren, dessen ich oben im 22*sten* §. erwähnet habe, und das in Praxi zugelassen werden kann, ist ganz davon verschieden. Für die *kleinen zwischen* den jährlichen Terminen *fallenden Zahlungen* lassen sich die Zinsen annehmen in dem Verhältnifs zu den Jahrszinsen wie die Gröfse der Termine zum Jahr. So kann auch der baare Wehrt am Anfang des Jahrs von einer in dem Lauff

*) *Morgan (William) Doctrine of Annuities and Assurances.* London 1779. p. 215 u. f. f.

Lauff deſſelben zahlbaren Summe darnach berechnet werden. Allein dieſs darf nicht weiter zurück ſo genommen werden. Z. B. für den jetzigen Wehrt einer nach $\frac{1}{2}$ Jahr zahlbaren Summe 1, kann man $\frac{1}{(1+r):2}$ ſetzen; (nämlich $1+\frac{r-1}{2}$ für den Zinſenfuſs und alſo $\frac{1}{1+\frac{r-1}{2}}$ für den baaren Wehrt von 1, nach einem halben Jahre zahlbar,) aber wenn die Summe erſt nach zwey Jahren zahlbar iſt, ſo kann ihr baarer Wehrt, der $\frac{1}{r^2}$ iſt, nicht zu $\frac{1}{\left(\frac{r+1}{2}\right)4}$ genommmen werden. Iſt gleich in dieſem beſondern Fall der Unterſchied nur 0,008, ſo wird er doch in andern beträchtlicher.

29.

Zuſatz 4. Wird der Wehrt der *aufgelaufenen* Zeitrente von kleinern als Jahrsterminen nach der obigen Vorausſetzung (§. 22.) berechnet; daſs nämlich die *einfachen* Zinſen für die halb- und vierteljährlichen und andere kleinere terminlichen Zahlungen $\frac{r-1}{2}$, $\frac{r-1}{4}$; $\frac{r-1}{n}$ ſind, nicht aber ihre *zuſammengeſetzten* Zinſen, oder ihre Zinſen auf Zinſen in dieſem Verhältniſſe fortgehen, ſo findet ſich wiederum in jedem Fall *der Wehrt der aufgelauffenen Zeitrente am Ende von gewiſſen (m) Jahren, ſo groſs als der jetzige oder baare Wehrt derſelben nach §. 22. berechnet, multiplicirt in* r^m.

Empfängt

Empfängt nämlich der Rentenier nach dem ersten halben Jahr $\frac{1}{2}$, und wiederum $\frac{1}{2}$ am Ende des Jahrs, so ist das so viel, als wenn er am Ende des Jahrs $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r-1}{2}$ empfangen sollte. Auf dieselbige Art geht diess fort bey den folgenden Jahren. Folglich entsteht nach *m* Jahren eine aufgelaufene Rente, deren derzeitiger Wehrt sich zu dem derzeitigen Wehrt einer Jahrsrente 1 verhält wie $1 + \frac{r-1}{4} : 1$. Und da der derzeitige Wehrt der Jahrsrente $1 = \frac{r^m - 1}{r-1}$ ist, so ist derselbe bey *halbjährlichen* Zahlungen $= \frac{r^m - 1}{r-1} + \frac{r^m - 1}{4}$. Der Unterschied ist $\frac{r^m}{4}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$.

Bey *vierteljährlichen* Zahlungen kann der Ueberschuss an Zinsen aus den Zwischenzahlungen auf dieselbe Art, zu der Jahrsrente am Ende des Jahrs geschlagen werden. Der Rentenier empfängt also nach §. 22. eine Jahrsrente $1 + 3 \cdot \frac{(r-1)}{8}$. Also verhält sich der Wehrt dieser aufgeschwollenen Rente von vierteljährlichen Zahlungen zu dem Wehrt der aufgesparten Jahrsrente 1 wie $1 + 3 \cdot \frac{(r-1)}{8} : 1$. Daraus folgt denn, dass sie sey $= \frac{r^m - 1}{r-1} + \frac{3}{8} \cdot (r^m - 1)$. Der Unterschied ist $\frac{3}{8} r^m \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$.

Setzet man $\frac{1}{n}$*teljährliche Termine*, und jeden zu $\frac{1}{n}$, so ist der derzeitige Wehrt dieser durch *m* Jahre aufgesparten Zeitrente zu dem derzeitigen Wehrt einer aufgesparten Jahrsrente 1, wie

$$1 + \frac{r-1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + + \frac{1}{n}\right) : 1 =$$

$$1 + \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot n \cdot n} \cdot \overline{r-1} : 1.$$ Der Ueberschuss der ersten Wehrte über der letzten also $= \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot n^2}, \left(r^m - 1\right)$.

§. 22.

Zweyter Abschnitt.

Von veränderlichen Zeitrenten.

30.

Die *Zeitrente* kann nach einer gewissen vorher zu bestimmenden Regel steigen oder abnehmen, wie die Glieder einer Reihe nach einem allgemeinen Gesetz von einander abhangen.

Die einfachen Fälle sind:

1) Wenn die Rente in jedem folgenden Termin wächset oder abnimmt, nach einem *beständigen Verhältniss, wie in einer geometrischen Reihe.*

2) Wenn sie wächst oder abnimmt nach einer *arithmetischen Reihe*, deren *Differenz* gegeben ist.

31.

Satz 5. Aufgabe. Eine jährliche Rente 1, am Ende des ersten Jahrs zuerst zahlbar, steige in den folgenden Jahren

Jahren in einem geometrischen Verhältniss, dessen Exponent a ist, wie kann man den baaren Wehrt derselben für m Jahre finden?

Auflösung. Ist wiederum *r* der Zinsfuss, so suche man die Summe einer geometrischen Reihe, welche $\frac{1}{r}$ zum ersten Gliede, $\frac{a}{r}$ zum Exponenten hat, und aus *m* Gliedern bestehet. Diese Summe ist dem gesuchten Wehrt gleich.

Beweis. Der baare Wehrt der Rente sey V, so ist

$$V = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a^2}{r^3} + + \frac{a^{m-1}}{r^m} = \frac{\frac{a^m}{r^m} - 1}{a - r}.$$

Da $\frac{a}{r}$ hier der Exponent der Reihe ist, wie $\frac{1}{r}$ es war bey den beständigen Jahrsrenten, so setze man in dem gefundenen Ausdruck $\frac{1}{\rho}$ statt $\frac{a}{r}$, und man hat

$$V = \frac{1}{\rho - 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho^m}\right) : a.$$

Das heisst auch so viel: Man suche den baaren Wehrt einer Jahrsrente, wenn statt des *gewöhnlichen Zinsfusses ein anderer*, $\rho = \frac{r}{a}$ genommen wird, und dividire diesen Wehrt durch den Exponenten *a*, so hat man den gesuchten Wehrt der steigenden Rente.

32.

Zusatz. Ist $a = r$, das ist, steigt die Rente jährlich in dem Verhältniss des Zinsfusses, so ist $V = m$. Die

 Reihe

Reihe geht alsdenn in eine arithmetische über, deren Glieder alle gleich sind, oder deren Differenz Nichts ist.

33.

Satz 6. Aufgabe. Den Wehrt einer jährlichen Rente 1 auf m Jahre zu finden, wenn selbige mit jedem folgenden Jahre wächset, nach der Ordnung der natürlichen Zahlen; nämlich im ersten Jahr = 1; im zweyten = 2; im dritten = 3 ist, und so ferner.

Auflösung. 1) Man suche den Wehrt der *unveränderlichen* Rente 1 auf *m* Jahre nach §. 13.

2) Man suche den baaren Wehrt des letzten Termins, der auf die vorbestimmte Art wachsenden Rente, das ist, $\frac{m}{r^m}$. Diesen ziehe man ab von dem vorhergefundenen, und mit dem Zinsfuss *r* multiplicirten Wehrt der *unveränderlichen* Rente.

3) Der gefundene Rest multiplicirt mit dem *Grundcapital*, giebt den verlangten Wehrt.

Es ist der Wehrt der unveränderlichen Rente auf *m* Jahre $= \int \frac{1}{r^m}$, (§. 13.), das *Grundcapital p*, also der Wehrt der nach der Ordnung der Zahlen wachsenden Jahrsrente $= p \left(r \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{r^m} \right)$.

Der Beweis steht in den *Zusätzen zu diesem Capitel.* *)

Ex.

*) §. 14.

Ex. Wenn der Zinsfuſs $r = 1,04$, ſo iſt die Jahrsrente 1 auf zehn Jahre $= 8,110896. = \int \frac{1}{r^{10}}$, und $r \int \frac{1}{r^{10}} = 8,43533$. Ferner $\frac{10}{r^{10}} = 6,75564$, folglich $r \int \frac{1}{r^{10}} - \frac{10}{r^{10}} = 1,67969$. Und $25 . 1,67969 = 41,99225$ der geſuchte Wehrt.

34.

Satz 7. Eine Jahrsrente auf gewiſſe Jahre, wachſe in einer arithmetiſchen Progreſſion, deren Differenz gegeben iſt. Das iſt, in dem erſten Jahre ſey ſie a, in dem zweyten $a + d$, in dem dritten $a + 2d$, in dem letzten *mten* Jahr $a + (m - 1) d$; *ihren baaren Wehrt zu finden.*

Auflöſung. 1) Man ſuche den Wehrt einer unveränderlichen Jahrsrente a auf m Jahre, das iſt $a \int \frac{1}{r^m}$, nach §. 13.

2. Man ſuche ferner den Wehrt einer nach der Ordnung der *natürlichen* Zahlen *wachſenden* Rente von der Gröſse, wie die gegebene Differenz d iſt, (nach dem nächſtvorhergehenden 6ten Satz) auf eben ſo viel Jahre weniger Eins.

3) Dieſen letztern Wehrt durch den Zinsfuſs dividirt, und

4) Zu dem Wehrt der zuerſt gefundenen Jahrsrente a addirt, giebt den geſuchten Wehrt.

Beweis. Der gesuchte Wehrt der steigenden Rente ist

$$= \frac{a}{r} + \frac{a+d}{r^2} + \frac{a+2d}{r^3} + + + \frac{a+(m-1)d}{r^m}.$$

Dafür man setzen kann $\int \frac{a+(m-1)d}{r^m}$.

Dies ist $= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + + + \frac{a}{r^m}$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{d}{r} + \frac{2d}{r^2} + + + \frac{(m-1)d}{r^{m-1}}\right).$$

Die erste Summe ist die Jahrsrente *a* auf *m* Jahre (nach Satz 2. §. 13.), und die zwote ist die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachsende Rente auf *m* — *1* Jahre, von der Grösse *d*, (nach dem 6ten Satz §. 33.) mit *r* dividirt.

Exempel. Die Rente im 1sten Jahr sey 1 Rthl. und wachse in den folgenden, jedes Jahr um $\frac{1}{10}$ Rthl., die ganze Zeit der Rente sey 20 Jahre, so ist nach dem Zinsfuss 4 Procent, der Wehrt der Rente 1 Rthl. auf 20 Jahre (aus Tab. III.)

= 13,590326 Rthl.

Ferner ist $\frac{p}{r}\int\frac{19}{r^{19}} = p\left(\int\frac{1}{r^{19}} - \frac{19}{r^{20}}\right)$

= 25. 13,133939 — 19. 25. 0,456387

= 328,348475 — 216,783825 = 111,56465,

und da $d = \frac{1}{10}$, so wird hieraus 11,156465.

Der gesuchte Wehrt ist also

= 24,746791 Rthl.

35. Zu-

35.

Zusatz. Noch etwas kürzer wird die Rechnung, wenn sie nach dem Ausdruck $(a+pd)\int\frac{1}{r^{m-1}} - \frac{(m-1)\{pd-a\}}{r^m}$ geführet wird. Diess giebt gleichfalls den gesuchten Wehrt. Denn $\int\frac{m-1}{r^{m-1}} = pr\int\frac{1}{r^{m-1}} - p\frac{m-1}{r^{m-1}}$ §. 33. Daher ist $a\int\frac{1}{r^m} + \frac{d}{r}\int\frac{m-1}{r^{m-1}} =$

$$a\int\frac{1}{r^{m-1}} + a\frac{1}{r^m} + pd\int\frac{1}{r^{m-1}} - pd\left(\frac{m-1}{r^m}\right) =$$

$$(a+pd)\int\frac{1}{r^{m-1}} - \frac{(m-1)(pd-a)}{r^m}.$$

Nach dieser Formel hat man eine Multiplication mit Decimalzahlen weniger.

36.

Wenn die Rente gewisse Jahre durch ***wächset***, ***und dann*** gewisse Jahre ***wiederum abnimmt***, jedesmal nach einem andern geometrischen oder arithmetischen Verhältniss, so kann der Wehrt der ganzen Rente stückweise nach dem Vorhergehenden gefunden werden.

Ueberhaupt sey die Rente in dem ersten Termin *a*, in dem zweyten *b*, und so ferner *c*, *d*, *e* - - - so kommt es darauf an, die Summe der Reihe $\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + + +$ zu finden. Verschiedene Fälle, wo sie sich auf eine allgemeine Art finden lässt, kommen in den *Zusätzen* vor.

Zusätze
zum ersten Capitel
von Zeitrenten.

I.

Vom Anwachs eines Capitals durch augenblickliche Zinsen. Zu §. 9.

Wenn der Zins von 1 für einen Termin $\frac{c}{n}$ ist; so ist das Capital nach *n* Terminen $= \left(1+\frac{c}{n}\right)^n = 1 + \frac{nc}{n} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2.} \cdot \frac{c^2}{n^2} + \frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\quad 3.} \cdot \frac{c^3}{n^3} + + + =$

$1 + c + \frac{c^2}{1.2} - \frac{c^2}{2n} + \frac{c^3}{1.\ 2.\ 3.} - \frac{1}{1.2} \cdot \frac{c^3}{n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{n^2} + +$

Ist nun *n unendlich* groſs, und *c* eine *endliche* Gröſse, wie es genommen werden muſs, wenn die Termine *Augenblicke* seyn sollen, so verschwinden von dieser Reihe alle Glieder, worin durch *n* dividirt werden soll. Alsdann wird

$$\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = 1 + \frac{c}{1} + \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^3}{1.2.3} + \frac{c^4}{1.2.3.4} + + \frac{c^n}{1.2.3.4\ldots n}.$$

Diese Reihe drückt bekanntermaſsen die Zahl aus, welche zu dem *natürlichen Logarithmen c* gehört, und ist $= e^c$ wenn *e* die Zahl ist, deren *natürlicher Logarithme 1 ist*, nämlich = 2,718281828.

2. Zu-

2.

Zusatz 1. Eben ſo iſt das Capital 1 nach *m* Jahren durch Zinſen und Zinſen von Zinſen gewachſen auf e^{cm}, und das Capital C iſt gewachſen auf $C.\ e^{cm} = Z$.

3.

Zuſatz 2. Nimmt man $\frac{c}{n} = r^{\frac{1}{n}} - 1$. ſo berechnet man die *augenblicklichen Zinſen* nach dem *jährlichen* Zinſenfuſs *r*. Alsdenn iſt auch $1 + \frac{c}{n} = r^{\frac{1}{n}}$, und $\left(1 + \frac{c}{n}\right)^{mn}$ $= e^{cm} = r^m$, alſo $c =$ *log. nat. r;* und $C.e^{cm} = C.r^m$.

„Wenn nämlich derſelbige jährliche Zinsfuſs bey„behalten wird, und darnach die terminlichen Zinſen „berechnet werden, ſo iſt es gleich viel, ob die Zinſen „in dieſen kleinen Terminen, oder jährlich auf einmal „bezahlet werden.“

4.

Zuſatz. 3. Wird hingegen $c = r - 1$, und $\frac{c}{n} = \frac{r-1}{n}$ geſetzet, und $\frac{c}{n}$ für die *augenblicklichen* Zinſen genommen, ſo iſt $c = \frac{1}{p}$, wenn *p* wiederum das Grundcapital für den Zinsfuſs *r*, oder $= \frac{1}{r-1}$ iſt. Alsdenn iſt $Z = C.\ e^{m:p}$.

Alſo wenn $m = p$, das iſt, nach ſo vielen Jahren als *p* groſs iſt, wird $Z = e.\ C = C.\ 2{,}71828$.

Bey dem Zinsfuſs $r = 1,04$, iſt $c = 0,04$ und $p = 25$. Das anfängliche Capital 1 iſt alſo nach 25 Jahren 2,71828.

Bey *jährlichen* Zinſen r — 1 kömmt es in eben der Zeit nur auf 2,6658.

5.

Zuſatz 4. Es kann *c* überhaupt den Zins von 1 ausdrücken für jede beſtimmte Zeit, deſſen $\frac{1}{n}$ tel der Zins für den *Augenblick* iſt; und alsdenn kann $\frac{1}{c} = p$ geſetzet, und ſo die Vergleichung zwiſchen dem Aufſchwellen des Capitals bey den Zinſen *c* für die beſtimmte Zeit, und bey den *augenblicklichen* Zinſen $\frac{c}{n}$ geſucht werden. Iſt z. E. *c* für ein halbes Jahr = 0,02, ſo iſt das dazu gehörige $p = \frac{1}{0,02} = 50$. Alſo in 50 halben Jahren wird die anfängliche Summe 1 wiederum = 2,71828.

6.

Zuſatz 5. Wenn der *augenblickliche* Zins $= \frac{c}{n}$, ſo iſt der *jährliche*, der dazu gehört $= e^c - 1$, und der *Zinsfuſs* e^c.

Der Zinsfuſs *für ein Jahr* bey *augenblicklichen* Zinſen $\frac{c}{n}$, verhält ſich alſo zu dem Zinsfuſs bey *jährlichen Zinſen c* wie $e^c : 1 + c = \frac{e^c}{1+c} : 1$

Für

Für den 4 Procentfuſs iſt $c = 0,04$; alſo *log. nat.* $e^c = 0,04$. Ferner iſt *log. brigg.* $1,04 = 0,0170333$. Daher *log. nat.* $1,04 = \frac{0,0170333}{0,4342945} = 0,03922$.

Alſo *log. nat.* $\frac{e^c}{1+c} = 0,000977$

und *log. brigg.* $\frac{e^c}{1+c} = 0,000424$. Die zu dem letztern gehörige *Zahl* iſt $1,001$, ſehr wenig von 1 unterſchieden.

7.

Von augenblicklichen Zeitrenten.

Iſt die $\frac{1}{n}$ *teljährliche Rente* $= \frac{1}{n}$ und der $\frac{1}{n}$ teljährliche Zins $= \frac{c}{n}$, ſo iſt der baare Wehrt der Rente für *m* Jahre $= \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{c}{n}\right)^{nm}}\right)$. Und weil für *augenblickliche* Renten $n = \infty$, ſo iſt dieſer Wehrt $= \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{e^{cm}}\right)$. §. 1. Es iſt nämlich dieſer baare Wehrt $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{c:n}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{c}{n}\right)^{nm}}\right)$

$$= \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{c}{n}\right)^{nm}}\right).$$

Dieſs iſt der allgemeine Ausdruck für den *Wehrt einer augenblicklichen Rente* $\frac{1}{n}$, *wo n nämlich die Zahl der Augenblicke im Jahr anzeiget und unendlich iſt.*

8. *Zu-*

8.

Zuſatz 1. Iſt $\frac{c}{n} = r^{\frac{1}{n}} - 1$ das iſt, ſetzet man voraus, daſs die augenblicklichen Zinſen nach dem jährlichen Zinsfuſs *r* berechnet werden ſollen, ſo iſt der baare Wehrt der *augenblicklichen Rente* $\frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$ und $c = \mathit{log.\ nat.\ r.}$ (§. 3.)

Dieſs erhellet auch ſo. Es iſt der Wehrt der augenblicklichen Rente $= \int \frac{dx}{r^x}$; wenn der Zinsfuſs *r* beybehalten, und die Rente in jedem Augenblick $= dx$ geſetzet wird.

Aber $\int \frac{dx}{r^x} = \frac{1}{r^x \,\text{log. nat.}\, \frac{1}{r}}$; und weil mit $x = o$, auch das *Integral* verſchwinden ſoll, ſo muſs zur Ergänzung zugeleget werden $- \frac{1}{\text{log. nat.}\, \frac{1}{r}}$. Folglich iſt das vollſtändige Integral $\int \frac{dx}{r^x} = \left(\frac{1}{r^x} - 1\right) \cdot \frac{1}{\text{log. nat.}\, \frac{1}{r}}$, (und weil *log. nat.* $\frac{1}{r} = -$ *log. nat. r.*) auch $= \frac{1}{\text{log. nat. } r}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right) = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$.

9.

Zuſatz 2. Der Wehrt der jährlichen Rente 1, bey dem Zinsfuſs *r*, iſt $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ für *x* Jahre. Dieſer verhält ſich alſo zu dem Wehrt der augenblicklichen Rente $\frac{1}{n}$, wo *n* die Zahl der Augenblicke im Jahre ausdrückt,

ausdrückt, und eine *unendliche* Zahl ist, wie $\frac{1}{r-1} : \frac{1}{\text{log. nat. r}} = \textit{log. nat.}\,r : r - 1 = 0{,}03922 : 0{,}04$, wenn $r = 1{,}04$. Es ist der Unterschied also nur 0,001.

10.

Zusatz 3. Wenn die *augenblickliche Rente* zugleich eine *immerwährende* seyn soll, das ist, wenn $x = \infty$, so ist ihr baarer Wehrt $= \frac{1}{\text{log. nat. r}}$.

Der baare Wehrt einer *immerwährenden* Jahrsrente ist $= \frac{1}{r-1} = p$, oder dem *Grundcapital.* Also der Wehrt der augenblicklichen immerwährenden zu dem Wehrt der jährlichen immerwährenden wie $r - 1 : \text{log. nat. r}$.

Anmerk. Simpson *) setzet $\frac{1}{\text{log. nat. r}} = p$ gleich dem *Grundcapital* $\frac{1}{r-1}$, wenn x unendlich wird. Das ist unrichtig. Das Grundcapital reicht wohl hin, die Rente 1 *jährlich auf immer* zu geben, aber nicht um *alle Augenblicke* $\frac{1}{n}$ tel zu geben.

Das Grundcapital bey augenblicklichen Renten sey p', so ist es $= \frac{1}{\text{log. nat. r}} = \frac{1}{0{,}03922} = 25{,}49$, wenn nämlich $r = 1{,}04$.

11. *Zu-*

*) *Select. Exercis.* p. 324.

II.

Zusatz 4. Will man $c = r - 1$ nehmen, und also $\frac{c}{n} = \frac{r-1}{n}$, oder, daſs die augenblicklichen Zinsen $\frac{1}{n}$tel der Jahrszinsen sind, so ist der *baare Wehrt einer Rente in augenblicklichen Terminen*, jede von $\frac{1}{n}$ auf *m* Jahre, zu *dem Wehrt einer jährlich zahlbaren Rente auf gleich lange Zeit*, nach dem jährlichen Zinsfuſs $1 + c = r$, in dem Verhältniſs $\frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{e^{cm}}\right) : \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$ $= 1 - \frac{1}{e^{cm}} : 1 - \frac{1}{r^m}$. Wenn $m = 1$, so ist das Verhältniſs $= 1 - \frac{1}{e^c} : 1 - \frac{1}{r}$.

Das hieſse die augenblickliche Rente auf die Art berechnet, wie D. *Price* und *Morgan* sie genommen, in den oben (Cap. I. §. 28.) angeführten Formeln.

Es ist *log. nat.* $e^c = 0{,}04$ für $r = 1{,}04$ und $c = r - 1 = 0{,}04$. Daher *log. brigg.* $e^c = 0{,}04 . 0{,}43429$ $= 0{,}0173716 =$ *log. brigg.* $1{,}0481$, und $e^c = 1{,}0481$. Also $1 - \frac{1}{e^c} : 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{1{,}0481} : 1 - \frac{1}{1{,}04}$ $= \frac{0{,}0481}{1{,}0481} : \frac{0{,}04}{1{,}04} = 0{,}050024 : 0{,}041924$. Das ist, nahe $5 : 4$. Dieſs ist eine beträchtliche Verschiedenheit.

12.

Zusatz 5. Rechnet man dagegen blos die simplen Zinsen der *unterjährlichen* Termine auf die Art wie oben (Cap. I. §. 22.), setzet sie nämlich in Verhältniss zu den Jahrszinsen, wie die Termine sich zu der Zeit eines Jahrs verhalten, so ist *der Ueberschuss* des Wehrts *der augenblicklichen*, oder überhaupt der in sehr kleinen Terminen zu hebenden *Renten über den Wehrt der jährlichen Renten* $= \frac{1}{2}(r-1)R$, wo R den Wehrt der *jährlichen* Rente ausdrückt. Es ist dieser Ueberschuss nach §. 21. $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right)(r-1)R$ für $\frac{1}{n}$ teljährliche Renten; also $\frac{1}{2}(r-1)R$, wenn *n* sehr gross wird.

Und da $R = \int \frac{1}{r^m}$ das ist der Wehrt der Jahrsrente auf *m* Jahre $= \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$, so ist jener Ueberschuss $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2r^m}$, oder gleich der *Hälfte einer Jahrshebung weniger den halben baaren Wehrt der letztern Hebung nach m Jahren, den man, wenn m gross ist, vernachlässigen kann.*

13.

Zusatz 6. Und auf eben diese Art gerechnet, ist der Belang oder der *derzeitige Wehrt einer aufgeschwollenen augenblicklichen Zeitrente* nach *m* Jahren um $\frac{1}{2}\,\overline{r-1}.\,R'$ *grösser als die aufgeschwollenen Jahrsrenten*, wenn R′ die letzteren anzeigt.

Weil

Weil hier $R' = r^m \int \frac{1}{r^m} = r^m \frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^m}\right)$, so ist $\frac{1}{2} R' . \overline{r-1} = \frac{1}{2} r^m - \frac{1}{2}$. Also ist der Wehrt der aufgeschwollenen augenblicklichen Rente nach *m* Jahren $= R' + \frac{1}{2}(r^m - 1)$.

14.

Beweis des 6ten Satzes in §. 33. von dem Wehrt der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Jahrsrente.

Der baare Wehrt einer solchen Jahrsrente ist

$$= \frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} +. + \frac{m}{r^m} = \int \frac{m}{r^m}.$$

Nun ist aber auch

$$\begin{aligned}
\int \frac{m}{r^m} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} &+ + + \frac{1}{r^m} \\
+ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} &+ + + \frac{1}{r^m} \\
+ \frac{1}{r^3} &+ + + \frac{1}{r^m} \\
&+ + + \\
&+ \frac{1}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^m} \\
&+ \frac{1}{r^m}.
\end{aligned}$$

Also

$$\text{Alſo} = \int\frac{1}{r^m}$$

$$+\int\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r}$$

$$+\int\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$+\int\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - - \frac{1}{r^{m-1}}$$

$$= m.\int\frac{1}{r^m} - \int\frac{1}{r^{m-1}} - \int\frac{1}{r^{m-2}}$$

$$— \quad — \quad — \quad \int\frac{1}{r}.$$

Die Anzahl der *abzuziehenden* Summen iſt *m — 1*.

Ferner iſt $\int\frac{1}{r^{m-1}} = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^{m-1}}\right)$

und $\int\frac{1}{r^{m-2}} = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^{m-2}}\right)$

$$\int\frac{1}{r} = \frac{1}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r^{m-(m-1)}}\right) = \frac{1}{r}.$$

Demnach geben die *abzuziehenden* Summen, zuſammengenommen,

$$\frac{m-1}{r-1} - \frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m-2}} + + \frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{m-1}{r-1} - \frac{1}{r-1}\int\frac{1}{r^{m-1}}.$$

$$= \frac{m-1}{r-1} - \frac{1}{r-1}\left(\int\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r^m}\right).$$ Daher iſt $\int\frac{m}{r^m}$

$$= m\int\frac{1}{r^m} - \frac{m-1}{r-1} + \frac{1}{r-1}\cdot\int\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{r^m}.$$

$$= \frac{m}{r-1} - \frac{m}{(r-1)r^m} - \frac{m}{r-1} + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-1}\int\frac{1}{r^m} - \frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{r^m}$$

$$= \int \frac{1}{r^m} + \frac{1}{r-1} \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{(r-1)r^m}$$

$$= \frac{r}{r-1} \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{(r-1)r^m} = p\left(r \int \frac{1}{r^m} - \frac{m}{r^m}\right).$$

Das ist, *von dem mit dem Zinsenfuss multiplicirten baarem Wehrt einer unveränderlichen Jahrsrente 1, wird der baare Wehrt der letzten Hebung, der nach der natürlichen Ordnung der Zahlen steigenden Jahrsrente abgezogen. Der Rest mit dem Grundcapital multiplicirt, giebt alsdenn den Wehrt der steigenden Rente.*

15.

Formeln für veränderliche Zeitrenten.

Die Zeitrenten können nach sehr verschiedenen Gesetzen sich verändern.

Lass die auf einander folgenden Termine *a*, *b*, *c*, seyn, so ist ihr Wehrt

$$= \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + + \cdot\cdot$$

Solche Reihen können durch bekannte Methoden *summirt* werden, wenn das Gesetz, nach welchem *a*, *b*, *c*, fortgehen, bestimmt ist, oder ein *Terminus generalis* der Reihe gegeben ist.

Zur Praxis für *Zeitrenten* würde das genügen, was davon oben schon vorgekommen ist. Man findet selten solche, die nach einer sehr zusammengesetzten Regel sich verändern. Allein zur Berechnung der *Leibrenten* ist es nöthig, noch einige besondere Fälle für *veränderliche* Renten mitzunehmen.

16. Es

16.

Es werde die Reihe $\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + + \frac{x}{r^x}$ bezeichnet wie oben durch $\int \frac{x}{r^x}$.

Die *Reihe* $\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + + \frac{x^2}{r^x}$, wo die Zähler der Brüche, das ist, die *Rentenhebungen* fortgehen nach den *Quadraten der natürlichen Zahlen*, durch $\int \frac{x^2}{r^x}$.

Eben so sey, $\frac{1}{r} + \frac{2^3}{r^2} + \frac{3^3}{r^3} + + + \frac{x^3}{r^x}$
$= \int \frac{x^3}{r^x}$

und $\frac{1}{r} + + + + \frac{2^n}{r^2} + \frac{3^n}{r^3} + + \frac{x^n}{r^x} = \int \frac{x^n}{r^x}$ und so ferner.

17.

Nun ist $\int \frac{1}{r^x} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + + +$ ins *Unendliche fortgesetzt*, $= \frac{1}{r-1}$.

Ferner $\int \frac{x}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r}{(r-1)^2}$;

$\int \frac{x^2}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r.(r+1)}{(r-1)^3}$;

$\int \frac{x^3}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r.(r^2+4r-1)}{(r-r)^4}$;

$\int \frac{x^4}{r^x}$ ins *Unendliche* $= \frac{r.(r^3+11.r^2+11.r+1)}{(r-1)^5}$.

Diese Sätze werden jeder aus dem nächstvorhergehenden leicht erwiesen.

1) Es ist $\int \frac{1}{r^x} = \frac{1}{r-1}$ ins *Unendliche* nämlich fortgesetzt, in welchem Fall in $\frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ der letzte Theil $\frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{r^x} = 0$ wird.

Nun sey $\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \frac{4}{r^4} ++ = \int \frac{x}{r^x}$ so multiplicire man auf beyden Seiten mit $r-1$ und man bekommt

$$1 + \frac{2}{r} + \frac{3}{r^2} + \frac{4}{r^3} ++$$

$$- \frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^3} - - = (r-1) \int \frac{x}{r^x}$$

$$= 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} ++ = 1 + \frac{1}{r-1} = \frac{r}{r-1} = (r-1) \int \frac{x}{r^x}.$$

Folglich $\int \frac{x}{r^x} = \frac{r}{(r-1)^2}$.

2) Eben so ist $\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + \frac{4^2}{r^4} + +$ $= \int \frac{x^2}{r^x}$. Diess multiplicirt auf beyden Seiten mit $r-1$ giebt

$$+ 1 + \frac{2^2}{r} + \frac{3^2}{r^2} + \frac{4^2}{r^3} ++$$

$$- \frac{1}{r} - \frac{2^2}{r^2} - \frac{3^2}{r^3} - - = (r-1) \int \frac{x^2}{r^x}.$$

$$= 1 + \frac{2^2 - 1}{r} + \frac{3^2 - 2^2}{r^2} + \frac{4^2 - 3^2}{r^3} ++$$

$$= 1 + \frac{2+1}{r} + \frac{2.2+1}{r^2} + \frac{2.3+1}{r^3} + \frac{2.4+1}{r^4} ++$$

$$= 1 + \int \frac{1}{r^x} + 2.\int \frac{x}{r^x} = \frac{r}{r-1} + \frac{2.r}{(r-1)^2} = \frac{r^2+r}{(r-1)^2}.$$

Daher

Daher $\int \frac{x^2}{r^x} = \frac{r^2 + r}{(r-1)^3}$.

3) $\int \frac{x^3}{r^x} = \frac{1}{r} + \frac{2^3}{r^2} + \frac{3^3}{r^3} + \frac{4^3}{r^4} + +$

$(r-1)\int \frac{x^3}{r^x} = 1 + \frac{2^3}{r} + \frac{3^3}{r^2} + \frac{4^3}{r^3} + + +$

$- \frac{1}{r} - \frac{2^3}{r^2} - \frac{3^3}{r^3} - - -$

$= 1 + \frac{2^3 - 1}{r} + \frac{3^3 - 2^3}{r^2} + \frac{4^3 - 3^3}{r^3} + +$

$= 1 + \frac{3 + 3 + 1}{r} + \frac{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{r^2} + \frac{3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1}{r^3} + +$

$= 1 + 3\int \frac{x^2}{r^x} + 3\int \frac{x}{r^x} + \int \frac{1}{r^x} =$

$\frac{r}{r-1} + \frac{3r}{(r-1)^2} + \frac{3 \cdot (r^2 + r)}{(r-1)^3} = \frac{r^3 + 4r^2 + r}{(r-1)^3}$.

Alſo $\int \frac{x^3}{r^x} = \frac{r^3 + 4r^2 + r}{(r-1)^4}$.

Auf dieſelbige Weiſe geht man weiter, wenn man für $\int \frac{x^4}{r^x}$, $\int \frac{x^5}{r^x}$ Ausdrücke ſuchen will, ohne die allgemeine Formel zu gebrauchen, worunter alle dieſe als beſondere Fälle begriffen ſind.

18.

Wo man dieſe Formeln nöthig hat, da kommt es gemeiniglich darauf an, ſie auf *eine beſtimmte Anzahl von Gliedern* zu haben. Es ſey die beſtimmte Zahl von Gliedern *n*, und die vorigen Summen bis auf *n* Glieder werden bezeichnet durch

 $\int \frac{n}{r^n}$,

$\int\frac{n}{r^n}$, $\int\frac{n^2}{r^n}$, $\int\frac{n^m}{r^n}$; so ist im *allgemeinen*

$$\int\frac{n^m}{r^n} = \frac{r}{r-1} \cdot \int\frac{n^{m-1}}{r^n}$$

$$+ \frac{1}{r-1}\left(\frac{\overline{m-1}}{1} \cdot \int\frac{n^{m-1}}{r^n} + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \quad 2} \cdot \int\frac{n^{m-2}}{r^n}\right.$$

$$+ \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1. \quad 2. \quad 3.} \int\frac{n^{m-3}}{r^n} + +$$

$$\left.\frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot --- 1.}{1. \quad 2. \quad --- \overline{m-1}} \cdot \int\frac{n}{r^n}\right)$$

$$- \frac{(n+1)^{m-1}}{r-1} \cdot \frac{n}{r^n}$$

Diese Formel, die ich derzeit fand, als ich eine solche zuerst suchte, und die zwote gleich folgende noch nicht kannte, bestimmt zwar nur die höhern Summen durch die vorhergehenden niedern, und ist von der Seite nicht so brauchbar als andere, welche jede Summe unmittelbar aus den Zahlen *n*, *r*, *m* geben; allein sie hat den Vorzug, daß sie das Gesetz, wornach die *Coefficienten* fortgehen, als welche mit den Coefficienten eines Binomii von der Potenz *m* — *1* einerley sind, auf eine sehr einfache Art darstellet.

19.

Wenn man zum voraus schon die ganzen *Summen ins Unendliche fortgesetzt* berechnet hat, so kann aus diesen der Wehrt für die ersten *n* Glieder bestimmet werden. Es bezeichne wiederum $\int\frac{1}{r^x}$, $\int\frac{x}{rx}$, $\int\frac{x^2}{r^x}$, $\int\frac{x^3}{r^x}$, $\int\frac{x^m}{r^x}$

die

die *Summen der unendlichen* Reihen, und

$\int\frac{n}{r^n}, \int\frac{n^2}{r^n}, \int\frac{n^3}{r^n}, \int\frac{n^m}{r^n}$ dieſe *Summen bis auf n Glieder genommen*, ſo iſt

$$\int\frac{n^m}{r^n} = \int\frac{x^m}{r^x} - \frac{1}{r^n}\Big(n^m. \int\frac{1}{r^x} + \frac{m}{1}. n^{m-1} \int\frac{x}{r^x}$$

$$+ \frac{m.m-1}{1.\ 2.}. n^{m-2}. \int\frac{x^2}{r^x}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.}. n^{m-3} \int\frac{x^3}{r^x}$$

$$+ + + \frac{m.m-1 - - - - 1}{1.\ 2. - - - - m}. \int\frac{x^m}{r^x}\Big).$$

Auf dieſe Art haben *Moivre* und andere ſolche Summen ausgedruckt.

Der Gebrauch der letztern Formel iſt leichter, wenn die Summen der unendlichen Reihen vorher gefunden ſind, deren Wehrte ſich nicht verändern. Bey der erſten Formel im §. 18. iſt es nöthig, jedesmal die niedern Summen für *n* Glieder mit zu berechnen. Wo dieſs Letztere aber zugleich auch zum Zweck gehört, wie bey der Berechnung von Tabellen ſolcher Zahlen, da kommt man durch die erſtere Formel am geſchwindeſten fort.

20.

Der Beweis für die *erſte Formel* im §. 18. iſt folgender.

1) Es iſt die Formel richtig für $m = 1$. Alsdenn iſt

$$\int\frac{n}{r^n} = \frac{r}{r-1}. \int\frac{1}{r^n} - \frac{n}{(r-1)r^n}.\quad (\text{§. 14. } Zuſ.)$$

2) Sie ist richtig für $m=2$, oder es ist

$$\int\frac{n^2}{r^n}=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}+\frac{1}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}-\frac{(n+1).\,n}{(r-1)\,r^n}.$$

Denn $\int\frac{n^2}{r^n}=\frac{1}{r}+\frac{2^2}{r^2}+\frac{3^2}{r^3}+\frac{4^2}{r^4}+++\frac{n^2}{r^n}$

$$=\frac{1}{r}+\frac{2}{r^2}+\frac{3}{r^3}+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}$$

$$+\frac{2}{r^2}+\frac{3}{r^3}+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}-\frac{1}{r}$$

$$+\frac{3}{r^3}+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}-\int\frac{2}{r^2}$$

$$+\frac{4}{r^4}++\frac{n}{r^n}=\int\frac{n}{r^n}-\int\frac{3}{r^3}$$

$$=n\int\frac{n}{r^n}-\int\frac{n-1}{r^{n-1}}-\int\frac{n-2}{r^{n-2}}--\int\frac{1}{r}\left(=\frac{1}{r}\right).$$

Aber $\int\frac{n-1}{r^{n-1}}=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{1}{r^{n-1}}-\frac{n-1}{(r-1)r^{n-1}}$

und $\int\frac{n-2}{r^{n-2}}=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{n-2}{(r-1)\,r^{n-2}}$,

und so ferner.

imgleichen $\int\frac{1}{r^{n-1}}+\int\frac{1}{r^{n-2}}++\int\frac{1}{r}=n\int\frac{1}{r^n}-\int\frac{n}{r^n}$,

und noch ist $\frac{n-1}{r^{n-1}}+\frac{n-2}{r^{n-2}}++\frac{1}{r^1}=\int\frac{n-1}{r^{n-1}}$

$=\int\frac{n}{r^n}-\frac{n}{r^n}$. Folglich $\int\frac{n^2}{r^n}=n\int\frac{n}{r^n}-\frac{r}{r-1}\cdot n.\int\frac{1}{r^n}+$

$$+\frac{r}{r-1}\int\frac{n}{r^n}+\frac{1}{r-1}\int\frac{n}{r^n}-\frac{n}{(r-1)r^n}$$

$$=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}+\frac{1}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}+\frac{n\cdot r}{r-1}\int\frac{1}{r^n}$$

—

$$-\frac{n}{r-1}\cdot\frac{n}{r^n}-\frac{r}{r-1}\cdot n.\int\frac{1}{r^n}-\frac{n}{(r-1)r^n}$$

$$=\frac{r}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}+\frac{1}{r-1}\cdot\int\frac{n}{r^n}-\frac{n(n+1)}{(r-1)r^n}.$$

Und nun weiter, wenn die Formel richtig ist für $\int\frac{n^m}{r^n}$, und für die niedern Reihen $\int\frac{n^{m-1}}{r^n}$, $\int\frac{n^{m-2}}{r^n}$, so ist sie auch richtig für $\int\frac{n^{m+1}}{r^n}$.

Es ist wie vorher

$$\int\frac{n^{m+1}}{r^n}=n\int\frac{n^m}{r^n}-\int\frac{(n-1)^m}{r^n}-\int\frac{(n-2)^m}{r^n}--\int\frac{1^m}{r^n}..$$

Weil $\int\frac{n^{m+1}}{r^n}=\frac{1}{r}+\frac{2^{m+1}}{r^2}+\frac{3^{m+1}}{r^3}++\frac{n^{m+1}}{r^n}$

$$=\frac{1}{r}+\frac{2^m}{r^2}+\frac{3^m}{r^3}++\frac{n^m}{r^n}$$

$$+\frac{2^m}{r^2}+\frac{3^m}{r^3}++\frac{n^m}{r^n}$$

$$\frac{3^m}{r^3}++\frac{n^m}{r^n}$$

$$++\frac{n^m}{r^n}$$

$$=n\int\frac{n^m}{r^n}-\int\frac{1}{r}-\int\frac{2^m}{r^2}-\int\frac{3^m}{r^3}-\int\frac{(n-1)^m}{r^{n-1}}$$

$$=n\int\frac{n^m}{r^n}-\int\frac{(n-1)^m}{r^{n-1}}-\int\frac{(n-2)^m}{r^{n-2}}---\frac{1}{r}.$$

Der Deutlichkeit halber schreibe man für die Summen $\int\frac{n^{m+1}}{r^n}$, $\int\frac{n^m}{r^n}$, $\int\frac{n^{m-1}}{r^n}$, $\int\frac{n^{m-2}}{r^n}$ u. s. w. bis $\int\frac{n^1}{r^n}$, die Buchstaben N, M, L, K und so ferner in zurückgehender Ordnung für die Summen der niedern Potenzen bis $A = \int\frac{n}{r^n}$. Sollen aber von solchen Reihen n, n — 1. n — 2 - - - Glieder genommen werden, so bezeichne man diess so

$\stackrel{n}{-}N$, $\stackrel{n-1}{-}N$, u. s. f. $\stackrel{n}{-}M$, $\stackrel{n-1}{-}M$, u. s. f.

So ist

$$\stackrel{n}{-}N = n.\ \stackrel{n}{-}M - \stackrel{n-1}{-}M - \stackrel{n-2}{-}M - \stackrel{n-3}{-}M - -$$

Aber nach der Voraussetzung, dass die Formel richtig ist für $\int\frac{n^m}{r^n}$ oder für M, folgt

$$\stackrel{n}{-}M = \frac{r}{r-1}.\ \stackrel{n}{-}L + \frac{1}{r-1}.\ \Big(\frac{m-1}{1}\ \stackrel{n}{-}K + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ \ 2}.\ \stackrel{n}{-}K + + + \stackrel{n}{-}A\Big)$$

$$- \frac{(n+1)^{m-1}.\ n}{(r-1)\ \ r^n}\ \Big(= -(n^m + \frac{m-1}{1}.\ n^{m-1} + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ \ 2}.\ n^{m-2} + + n) : (r-1)\, r^n\Big)$$

Und

$$\stackrel{n-1}{-}M = \frac{r}{r-1}.\ \stackrel{n-1}{-}L + \frac{1}{r-1}.\ \Big(\frac{m-1}{1}\ \stackrel{n-1}{-}K + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ \ 2}.\ \stackrel{n-1}{-}K + + + \stackrel{n-1}{-}A\Big)$$

$$-\Big((n-1)^m + \frac{m-1}{1}.\ (n-1)^{m-1} + + + n-1\Big).\ \frac{1}{(r-1)\, r^{n-1}}$$

Daraus

Daraus wird

$$\overset{n}{-}N = n\overset{n}{-}M - \frac{r}{r-1}\cdot\left(\overset{n-1}{-}L + \overset{n-2}{-}L + \overset{n-3}{-}L ++ \overset{1}{-}L\right)$$

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\left(\overset{n-1}{-}L + \overset{n-2}{-}L + \overset{n-3}{-}L ++ \overset{1}{-}L\right)$$

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\left(\overset{n-1}{-}K + \overset{n-2}{-}K ++ \overset{1}{-}K\right)$$

— — — — —

$$+\frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{(n-1)^m}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^m}{r^{n-2}} ++ \frac{1}{r}\right)$$

$$+\frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\left(\frac{(n-1)^{m-1}}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^{m-2}}{r^{n-2}} ++ \frac{1}{r}\right)$$

$$+\frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\left(\frac{(n-1)^{m-2}}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^{m-2}}{r^{n-2}} ++ \frac{1}{r}\right)$$

$$+\frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{n-1}{r^{n-1}} + \frac{n-2}{r^{n-2}} ++ \frac{1}{r}\right).$$

Es iſt nach der Vorausſetzung auch

$$\overset{n-1}{-}L + \overset{n-2}{-}L ++ \overset{1}{-}L = n\overset{n}{-}L - \overset{n}{-}M.$$

und $\overset{n-1}{-}K + \overset{n-2}{-}K ++ \overset{1}{-}K = n\overset{n}{-}K - \overset{n}{-}L$

Auch iſt $\frac{(n-1)^m}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^m}{r^{n-2}} ++ \frac{1}{r} = \overset{n-1}{-}M = \overset{n}{-}M - \frac{n^m}{r^n}$

und $\frac{(n-1)^{m-1}}{r^{n-1}} + \frac{(n-2)^{m-1}}{r^{n-2}} ++ \frac{1}{r} = \overset{n-1}{-}L = \overset{n}{-}L - \frac{n^{m-1}}{r^n}.$

Endlich $\frac{n-1}{r^{n-1}} + \frac{n-2}{r^{n-2}} ++ \frac{1}{r} = \overset{n-1}{-}A = \overset{n}{-}A - \frac{n}{r^n}$

Alſo

$$\overset{n}{-}N = n\overset{n}{-}M - \frac{r}{r-1}\left(n\overset{n}{-}L - \overset{n}{-}M\right) - \frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\left(n\overset{n}{-}L - \overset{n}{-}M\right)$$

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\left(n\overset{n}{-}K - \overset{n}{-}L\right)$$

—

$$- \frac{1}{r-1} \cdot \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \left(n \overset{n}{-}J - \overset{n}{-}K \right)$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad \frac{1}{r-1} \left(n \overset{n}{-}A - \overset{n}{-}B \right)$$

$$+ \frac{1}{r-1} \cdot \Big(\overset{n}{-}M - \frac{n^m}{r^n} + \frac{m-1}{1} \left(\overset{n}{-}L - \frac{n^{m-1}}{r^n} \right)$$

$$+ \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \left(\overset{n}{-}K - \frac{n^{m-2}}{r^n} \right)$$

$$+ + \overset{n}{-}A - \frac{n}{r^n} \Big).$$

Und weil ebenfalls nach der Voraussetzung

$$n \overset{n}{-}M = n \frac{r}{r-1} \cdot \overset{n}{-}L + \frac{n.1}{r-1} \cdot \Big(\frac{m-1}{1} \cdot \overset{n}{-}L + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ \ 2.} \overset{n}{-}K$$

$$+ \frac{m-1.\ m-2.\ m-3.}{1.\ \ 2.\ \ 3} \overset{n}{-}J + + \overset{n}{-}A \Big)$$

$$- \frac{n.(n+1)^{m-1}.n}{(r-1)r^n},$$

so erhält man

$$\overset{n}{-}N = \frac{r}{r-1} \cdot \overset{n}{-}M + \frac{1}{r-1} \cdot \Big(\frac{m-1}{1} \cdot \overset{n}{-}M + \frac{m-1.\ m-2}{1.\ \ 2} \cdot \overset{n}{-}L$$

$$+ \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} \overset{n}{-}K + + + \overset{n}{-}B \Big)$$

$$+ \frac{1}{r-1} \overset{n}{-}M - \frac{n^m}{r^n} + \frac{m-1}{1} \left(\overset{n}{-}L - \frac{n^{m-1}}{r^n} \right) +$$

$$+ \frac{m-1.\ m-2.}{1.\ \ 2} \cdot \left(\overset{n}{-}K - \frac{n^{m-2}}{r^n} \right)$$

$$+ + \left(\overset{n}{-}A - \frac{n}{r^n} \right)$$

$$= \frac{r}{r-1} \cdot \overset{n}{-}M + \frac{1}{r-1} \left(\frac{(m-1)}{1} + 1 \right) \overset{n}{-}M + \Big(\frac{m-1.\ m-2}{1.\ \ 2}$$

$$+ \frac{m-1}{1} \Big) \overset{n}{-}L + \Big(\frac{m-1.\ m-2.\ m-3}{1.\ \ 2.\ \ 3} + \frac{m-1}{1} \cdot \frac{m-2}{2} \Big)$$

$$\overset{n}{-}K + + \overset{n}{-}A \Big)$$

—

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\left(\frac{n^m}{r^n}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{n^{m-1}}{r^n}+\frac{m-1.\ m-2}{1.\quad 2}\cdot\ \frac{n^{m-2}}{r^n}++\frac{n}{r^n}\right)$$

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\ \frac{n(n+1)^{m-1}n}{r^n}.$$

Nun ist $\frac{m-1}{1}+1=m$,

$$\frac{m-1.\ m-2}{1.\quad 2}+\frac{m-1}{1}.=\frac{m.\ m-1}{1.\ 2},$$

$$\frac{m-1.\ m-2.\ m-3}{1.\quad 2.\quad 3}+\frac{m-1.\ m-2}{1.\quad 2}$$

$$=\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.}.$$

und $n^m+\frac{m-1}{1}\cdot n^{m-1}+\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\ n^{m-2}$

$++n=(n+1)^{m-1}n.$

auch $(n+1)^{m-1}n+(n+1)^{m-1}n.n$

$$=(n+1)^m.n$$

Folglich

$$\overset{n}{-}N=\frac{r}{r-1}\cdot\overset{n}{-}M+\frac{1}{r-1}\cdot\left(m.\overset{n}{-}M+\frac{m.m-1}{1.\ 2}\cdot\overset{n}{-}L+\right.$$

$$\left.\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\quad 3}\overset{n}{-}K++\overset{n}{-}A\right)$$

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{r^n}\cdot\ (n+1)^m.n$$

Oder

$$\int\frac{n^{m+1}}{r^n}=\frac{r}{r-1}\cdot\ \int\frac{n^m}{r^n}+\frac{1}{r-1}\cdot\ \left(\frac{m}{1}\cdot\int\frac{n^m}{r^n}\right.$$

$$\left.+\frac{m.\ m-1}{1.\ 2}\cdot\ \int\frac{n^{m-1}}{r^n}++\int\frac{n}{r^n}\right)$$

$$-\frac{1}{r-1}\cdot\ \frac{1}{r^n}\cdot\ (n+1)^m.\ n.$$

welches die allgemeine Formel in §. 18. ist.

21. Der

21.

Der Beweis der Formel in §. 19. wird leicht so gefunden:

Es ist $\frac{1}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^2} + +$ *ins Unendliche* $= \int \frac{x^m}{r^x}$.

Das Stück dieser Reihe, welches auf das *n*te Glied folget, ist:

$$= \frac{(n+1)^m}{r^{n+1}} + \frac{(n+2)^m}{r^{n+2}} + \frac{(n+3)^m}{r^{n+3}} + + +$$

$$= \frac{1}{r^n} \cdot n^m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + + + \text{ ins Unendliche} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^n} \cdot \frac{m}{1} \cdot n^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + + \text{ ins Unendliche} \right)$$

$$+ \frac{1}{r^n} \, \frac{m.m-1}{1 \; 2} \cdot n^{m-2} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + + \text{ ins Unendliche} \right)$$

$$+ + + \frac{1}{r^n} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{2^m}{r^2} + \frac{3^m}{r^3} + + \text{ ins Unendliche} \right)$$

Folglich das Stück der Reihe, welches die *n* ersten Glieder enthält, oder

$$\int \frac{n^m}{r^n} = \int \frac{x^m}{r^n} - \frac{1}{r^n} \left(n^m \int \frac{1}{r^x} + \frac{m}{1} \cdot n^{m-1} \int \frac{x}{r^x} \right.$$

$$\left. + \frac{m.\,m-1}{1 \; 2} \cdot n^{m-2} \int \frac{x^2}{r^x} + + \int \frac{x^m}{r^n} \right)$$

wie oben.

22.

Wenn diese Summen berechnet sind, so reicht man aus für alle Reihen $\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + \frac{c}{r^3} + +$, in denen die Zähler der Glieder einen *Terminum generalem* haben, der

nur

nur allein von x, das ist, von *der Zahl des Gliedes* in der Reihe abhängt. Es sey der allgemeine Ausdruck jedes Gliedes, oder dieser Terminus generalis, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + +$ so kann die Reihe bis x Glieder durch $\int \frac{1}{r^x} + B \int \frac{x}{r^x} + C \int \frac{x^2}{r^x} + D \int \frac{x^3}{r^x} + +$ summirt werden. Es giebt allerdings in besondern Fällen Methoden, die kürzer sind, wobey ich mich aber hier nicht aufhalten darf.

23.

Für *augenblickliche Renten* ist $\int \frac{dx}{r^x} = \frac{1}{\text{log. nat. } r} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$, (und p′, was hier das *Grundcapital* ist, für $\frac{1}{\text{log. nat. } r}$ geschrieben, $= p' . \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$.

Ferner $\int \frac{x\,dx}{r^x} = p' \left(\int \frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right)$.

Denn wenn $\frac{1}{r} = q$, so ist $\int \frac{x\,dx}{r^x} = \int q^x . x\,dx$, und weil $d. (q^x) = q^x\,dx + x\,q^x\,dx$ *log. nat.* q, so wird

$$\frac{x\,q^x}{\text{log. nat. } q} - \int \frac{x\,dx}{\text{log. nat. } q} = \int x\,q^x\,dx,$$

$$= \frac{1}{\text{log. nat. } \frac{1}{q}} \cdot \left(\int \frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right) (\text{weil } \textit{log.nat.}\, q = - \text{log. nat. } \tfrac{1}{q})$$

$$= \frac{1}{\text{log. nat. } r} \cdot \left(\int \frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right) = p' \left(\int \frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^x}\right).$$

Hier ist $\int \frac{dx}{r^x}$ das *vollständige Integral* $= p' \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$, welches verschwindet, wenn $x = o$. Daher darf keine beständige Grösse weiter zugeleget werden.

24. Eben

24.

Eben so ist $\int\frac{x^2\,dx}{r^x} = 2\,p'\int\frac{x\,dx}{r^x} - p'\frac{x^2}{r^x}$;

$$\int\frac{x^3\,dx}{r^x} = 3\,p'\int\frac{x^2\,dx}{r^x} - p'\,\frac{x^3}{r^x}$$

und im allgemeinen

$$\int\frac{x^m}{r^x}.\;dx = m.\,p'\int\frac{x^{m-1}}{r^x} - p'\,\frac{x^m}{r^x}.$$

Aber weil auch

$$\int\frac{x^{m-1}\,dx}{r^x} = (m-1)\,p'\int\frac{x^{m-2}}{r^x}\,dx - \frac{p'x^{m-1}}{r^x}$$

und $\int\frac{x^{m-2}\,dx}{r^x} = (m-2)\,p'\int\frac{x^{m-3}\,dx}{r^x} - \frac{p'x^{m-2}}{r^x}$

so hat man, wenn diese Substitutionen vorgenommen werden

$$\int\frac{x^m\,dx}{r^x} = (m.\,m-1\;\ldots.\;1)\;p'^m.\int\frac{dx}{r^x}$$

$$-\frac{p'}{r^x}.(x^m + m\,p'\,x^{m-1} + m.\,m-1.\,p'^2.\,x^{m-2}$$

$$+\,m.\,m-1\;\ldots.\;2.\;p'^{m-1}\,x),$$

und weil $\int\frac{dx}{r^x} = p' - \frac{p'}{r^x}$, so wird

$$\int\frac{x^m\,dx}{r^x} = (m.\,m-1\;\ldots\;1.)\;p'^{m+1}$$

$$-\frac{p'}{r^x}\,(x^m + m\,p'\,x^{m-1} + m.\,m-1.\,p'^2\,x^{m-2} + +$$

$$+ +\;m.\,m-1\;\ldots\;2.\;p'_{m-}{}^{1}\,x$$

$$+\;m.\,m.-1\;\ldots\;1.\;p'^m)$$

$$= (m.\,m-1\;\ldots.\;1)\;p'^{m+1} - \frac{p}{r^x}(x^m + m\,p'\,x^{m-1} +$$

$$m.\,m-1.\,p'^2.\,x^{m-2} +++\;m.\,m-1\;\ldots\;1.\;p'^m).$$

Diess

Diess ist das *vollständige Integral*, welches verschwindet, wenn $x = o$. Setzet man $\int \frac{dx}{r^x} = \frac{1}{r^x \log. nat. \frac{1}{r}} = -\frac{p'}{r^x}$, das ist, ohne das Integral zu vervollständigen, so wird

$$\int \frac{x^m dx}{r^x} = -\frac{p'}{r^x} (x^m + m.x^{m-1} p' + m. m - 1.x^{m-2} p'^2$$
$$+ m. m - 1. m - 2 \ldots . (m - m + 2) x p'^{m-1}$$
$$+ m. m - 1 \ldots 1. p'^m).$$

Dieses ist dieselbige Formel, die man gewöhnlich findet (Siehe *Kästners* Analysis) *) für

$$\int e^{mx}. x^n dx = e^{mx} \left(\frac{x^n}{m^1} - \frac{nx^{n-1}}{m^2} + \frac{n. n - 1}{m^3} . x^{n-2} - + \right)$$

Man schreibe in dem vorhergehenden Ausdruck statt m, n, und e^{mx}, für $\frac{1}{r^x}$, so ist $m = -$ *log. nat.* r und $p' = -\frac{1}{m}$.
Dann geht eine dieser Formeln in die andre über. Allein hier sind es noch *unvollständige* Integralien, die einer Ergänzung bedürfen.

25.

Anmerkung. Ueberhaupt ist aber zu bemerken, dass alle bisher vorgekommene Ausdrücke für die Wehrte der Renten nicht mehr brauchbar sind, wenn *keine Zinsen* gerechnet werden, oder, wenn $r = 1$ ist. Sie sind in diesem Fall zwar nicht falsch, aber unbestimmt. Sie werden $\frac{0}{0}$, und lehren nichts. Wie alsdenn ihr bestimmter Wehrt durch analytische Methoden gefunden werde, ist bekannt. Man sehe *Kästners Analysis des Unendlichen*

*) *Kästners Analysis des Unendlichen.* §. 242.

chen §. 372. Z. B. Es ist $\int \frac{1}{r^a} = \frac{1}{r-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^a}\right)$. Wird alles zu Einer Benennung gebracht, so ist $\int \frac{1}{r^a} = \frac{r^a - 1}{(r-1)r^a}$. Man differentiire Zähler und Nenner, jeden für sich, daſs nur *r* als *veränderlich* genommen wird, so erhält man $\frac{a r^{a-1} \cdot dr}{dr} = a$. Dieſs ist in dem Fall wenn $r = 1$, der Wehrt von $\int \frac{1}{r^a}$..

Ferner ist $\int \frac{a}{r^a} = \frac{r}{(r-1)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^a}\right) - \frac{a}{(r-1)r^a}$ $= \frac{r(r^a - 1) - (r-1)a}{(r-1)r^a}$. Dieſs eben so differentiiret, giebt $\frac{(a+1)r^a . dr - dr - adr}{a r^{a-1} . (r-1)^2 dr + 2(r-1)r^a . dr}$. Weil aber dieser Bruch ebenfalls $= \frac{0}{0}$ ist, wenn $r = 1$, so muſs von neuen differentiiret werden. Dann erhält man $\frac{(a+1) . a . r^{a+1}}{2 r^a}$, welches $r = 1$ gesetzet, in $\frac{(a+1)a}{2}$ übergeht, und in diesem Fall der Wehrt von $\int \frac{a^2}{r^a}$ ist.

Zweytes

Zweytes Capitel.

Von Leibrenten.

Erster Abschnitt.

Von unveränderlichen Leibrenten.

37.

Erklärungen. Eine Rente, die bezahlet wird, so lange eine Person lebet, mit ihrem Tode aber aufhört, ist eine *Leibrente (Annuity upon one Live, the value of the Live.)* Es ist eben nicht nöthig, daſs ihre Dauer von dem Leben derselbigen Person abhange, welche sie genieſset; sie kann an jemand und dessen Erben gezahlet werden, so lange ein anderer lebet; allein sie wird als Leibrente nur auf die Person bezogen, von deren Leben sie abhängt. Sie ist eine *einfache Lebensrente.*

Renten, die von dem Leben *mehrerer Personen abhangen, sind überhaupt zusammengesetzte Leibrenten.* Es kann dabey ankommen auf das *Zusammenleben mehrerer*, daſs nämlich die Rente nur gezahlt wird, so lange mehrere Personen beysammen leben; oder auch darauf, daſs Eine oder mehrere aus einer gewissen Anzahl Personen noch am Leben sind. Im ersten Fall sind es Renten auf das Zusammenleben, *Wehrte der Coexistenz (Values of joint Lives) Verbindungsrenten.* Im zweyten Fall sind es Lebensrenten, auch wohl *Leibrenten auf mehrere Personen.*

 Uebrigens

Uebrigens können es Jahrsrenten seyn, oder halbvierteljährliche u. s. w. Man versteht *Jahrsrenten*, wenn nicht ausdrücklich ein andres erinnert wird.

38.

Wenn man *gewiss* wüsste, wie viele Jahre eine Person von einem gewissen Alter noch zu leben habe, so würde auch der baare Wehrt der Leibrente einerley seyn mit dem Wehrt einer Zeitrente von so viel Jahren. Jenes weiss man nun nicht, allein man weiss, ***wie viel von einer bestimmten Zahl von Menschen eines gewissen Alters, in jedem folgenden Jahre***, im Durchschnitt, ***absterben, und wie viele am Ende eines jeden Jahrs davon noch am Leben sind.*** Diess lehren die so genannten *Mortalitätstabellen* mit einem gewissen Grade von Zuverlässigkeit, davon nachher. Z. B. von 374 Personen, die jetzo genau 40 Jahr alt sind, leben am Ende des 41sten Jahrs, oder am Anfang des 42sten noch 367, nach der *Süssmilchischen* Tafel. Am Ende dieses zweyten Jahrs, oder am Anfang des dritten, 43sten, sind noch 360 übrig u. s. w. Diess nehmen wir nun so, als hiesse es: „von jedem einzelnen Hauffen Lebender von 40 Jahren, 374 an der „Zahl, gehen in dem ersten Jahr 7 ab." Wir gebrauchen die Tabellen, als enthielten sie solche Allgemeinsätze. Das ist ihr Sinn nicht. Davon will ich nachher etwas beybringen. Hier wollen wirs so nehmen, wies gewöhnlich geschieht.

Daraus

Daraus ist denn klar, wie zu rechnen sey. Gesetzt ein Entrepreneur verpflichte sich, 374 Menschen, jedem eine Jahrsrente 1 Rthl., so lange sie leben, zu bezahlen, und zwar jedesmal *am Ende des Jahrs;* so hat er auszugeben am Ende des ersten Jahrs, nicht 374, sondern nur 367, weil schon sieben in diesem Jahr ausgestorben sind. Der baare Wehrt davon ist $\frac{367}{r}$ Rthl., das ist, 367 Rthl. discontirt auf Ein Jahr, wenn *r* den Zinsfuss bedeutet, weil er erst ein Jahr nach *jetzo* bezahlet. Eben so muss er am Ende des zweyten Jahrs zahlen 360 Rthl., weil nach der Tabelle so viel von der anfänglichen Zahl noch übrig sind. Und davon ist der baare Wehrt $= \frac{360}{r^2}$ Rthl. Das nämliche muss geschehen für alle folgende Jahre bis zum höchsten Lebensziel. Rechnet man alle diese Ausgaben zusammen, so bekommt man den baaren Wehrt aller 374 Leibrenten. Diese Summe mit 374 dividirt, giebt den baaren Wehrt einer einzelnen Leibrente für Eine Person von dem bestimmten Alter.

Eben das kommt heraus, wenn man die Zahl für jedes einzelne Jahr durch 374 dividirt, und alle diese Quotienten zusammen nimmt, als

$\frac{367}{374} \cdot \frac{1}{r}$ Rthl. $+ \frac{360}{374} \cdot \frac{1}{r^2}$ Rthl. und so ferner, für die folgenden Jahre bis zum höchsten Lebensziel.

Zugleich aber iſt auch klar, daſs man bey dieſer Rechnung *nichts in Anſchlag bringet für diejenigen, welche noch einen Theil des Jahrs, worinnen ſie abgehen, durchlebet haben.* Am Ende des erſten Jahrs ſind geſtorben 7; einige davon in der erſten Hälfte, die übrigen in der zwoten; aber am Ende des Jahrs wird für keinen etwas gerechnet. *So wird für das letzte Jahr des Lebens,* an deſſen Ende keiner übrig iſt, gar *nichts gerechnet.*

Denn ſo lange man blos auf ganze Jahre und jährlich nur zahlbare Leibrenten rechnet, ſieht mans ſo an, als wenn *die in einem Jahr Abſterbenden auf einmal im Anfang deſſelben abgehen.* Dieſe Vorausſetzung liegt überall zum Grunde, wenn nicht ausdrücklich ein Anderes erinnert wird.

Gemeiniglich verſteht man auch unter Leibrenten ſolche jährliche, wobey für die Zwiſchenzeiten zwiſchen den beſtimmten Zahlungsterminen nichts gezahlet wird. Von ſolchen iſt auch hier anfangs nur die Rede. In der Folge wird gezeiget, was hinzukommen müſſe, wenn auch die Zwiſchenzeiten in Anſchlag zu bringen ſind.

39.

Wenn von 374 Vierzigjährigen nach Einem Jahr nur 367 am Leben ſind, ſo iſt auch für jeden Einzelnen die *Wahrſcheinlichkeit, daſs er nach Einem Jahre noch leben werde,* $= \frac{367}{374}$. Man nimmt nämlich an, daſs alle, wie am Alter, ſo auch an Geſundheit und andern Umſtän-

Umständen, wovon Leben oder Tod abhängt, einander gleich sind. Man kann und muſs die meistenmale kleinere Verschiedenheiten aus der Acht lassen.

Da also $\frac{367}{374}$ die Wahrscheinlichkeit des Lebens am Ende des ersten Jahrs ist für einen Vierzigjährigen; und diese aus demselbigen Grunde nach der nämlichen *Süſsmilchischen* Tabelle am Ende des zweyten Jahrs, $\frac{360}{374}$ ist, und dieſs so weiter fortgehet, so ist es auch klar, daſs man den baaren Wehrt der Leibrente finde, wenn man *den Wehrt der einzelnen Jahrsrenten für so viele Jahre* suchet, *als von dem gegebenen Alter bis zum höchsten Lebensziel noch übrig sind, und den baaren Wehrt der Rente eines jeden Jahrs in die Wahrscheinlichkeit des Lebens der Person für das Jahr multiplicirt.* Dieſs Verfahren ist den allgemeinen Grundsätzen gemäſs, wornach Wahrscheinlichkeiten berechnet werden müssen. Sonst sieht man aus dem Vorhergehenden, daſs hier alles blos auf die Zuverläſsigkeit der Mortalitätstabellen ankomme, und man den Begriff von Wahrscheinlichkeit allenfalls ganz entbehren könne.

Es ist auch ferner einleuchtend, daſs wenn man statt 374 eine andere *Anfangszahl* nimmt, z. B. 100, so lasse sich so schliessen: von 374 sind nach Einem Jahr noch übrig 367, also von 100 noch 98,1. Der Schluſssatz ist wahr in demselbigen Sinn, den der Grundsatz hat, nämlich daſs *im Durchschnitt das so seyn werde.* Die

Brüche ſind zwar in den einzelnen Beyſpielen nicht möglich; müſſen aber doch beybehalten werden. Von 1000 in dem vorigen Exempel würden 981 (nicht 980) übrig geweſen ſeyn. Mehr als dieſs iſt hier nicht nöthig, um den Grund und die Sicherheit der folgenden Rechnungsarten einzuſehen.

Anmerkung. Einige nennen auch die Zahl der Lebenden im Anfang der Jahre, wie ſie in den Tabellen ſtehen, *die Wahrſcheinlichkeit des Lebens.* Darum. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Perſon von einem beſtimmten Alter in einem gewiſſen Jahre noch lebe, verhält ſich zu der Wahrſcheinlichkeit ihres Lebens für ein anderes Jahr, wie die Zahl der Lebenden in der Tabelle bey dem erſten Jahr zu der Zahl derſelben bey dem letzten. Z. B. die Wahrſcheinlichkeit eines Funfzehnjährigen, daſs er 50 Jahr alt werde, iſt $\frac{300}{511}$; und die Wahrſcheinlichkeit, daſs er 60 Jahr erreiche, iſt $\frac{210}{511}$. Folglich die erſtere zur letzteren wie 300:210, das iſt, wie die Zahlen der Lebenden bey dem Alter 50 und 60 Jahren, in den Tabellen.

40.

Satz 8. Es ſey die *anfängliche Zahl der Lebenden* von einem gewiſſen Alter, A, das *Alter* ſelbſt a; die Zahl der von A, nach Einem Jahr noch Lebenden, oder A nach Einem Jahr ſey $\overset{1}{-}A$, und nach zwey Jahren $\overset{2}{-}A$, nach drey Jahren $\overset{3}{-}A$ u. ſ. f. nach x Jahren $\overset{x}{-}A$, wo

nämlich der Buchſtabe x an der linken Seite der Gröſse geſchrieben und unterſtrichen wird. Dieſs *Zeichen des Zuſtandes einer veränderlichen Gröſse nach einer gewiſſen Zeit* wird auf dieſe Art ſehr kenntlich gemacht.

Nun bezeichne man noch die *Leibrente* einer Perſon vom Alter a oder *ihren baaren Wehrt*, durch $\lambda\overline{a}$.

So iſt überhaupt

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right).$$

Dieſs iſt der Grundſatz, aus dem alles Uebrige hergeleitet wird. Die Formel druckt in jedem einzelnen Theil die Ausgabe für *jedes Jahr* beſonders aus, reducirt auf ihren baaren Wehrt.

41.

Die *Ergänzung des Alters a, (complementum aetatis) zu dem höchſten Lebensziel*, iſt x, wo nämlich $\frac{\overset{x}{-}A}{r^x}$ als das letzte Glied = o wird. Z. B. iſt jemand 20 Jahr, ſo iſt nach der ſüſsmilchiſchen Tafel ſeine *Altersergänzung* 96 — 20 = 76. Er lebet nämlich ſein 76ſtes Jahr durch, und ſtirbt nun am Ende deſſelben, oder im Anfang des folgenden.

42.

Anmerkung 1. Die Zahlen $\overset{1}{-}A$, $\overset{2}{-}A$, $\overset{3}{-}A$ u. ſ. f. nimmt man aus den ſogenannten *Mortalitätstabellen.* Bey dieſen kommt alles darauf an, daſs man aus mehreren

mit einander verglichenen Erfahrungen vieler Jahre wiſſe, „*wie viele Menſchen jährlich von jedem Alter aus einer* „*gewiſſen Anzahl abſterben.*" Die Liſten der Verſtorbenen nach dem Alter geben nun zwar dieſe Zahlen ſo gerade zu nicht. Denn man muſs auch wiſſen, *aus wie vielen deſſelben Alters* ſie ſterben. Allein, wenn man von einem Lande, oder von einer Stadt annehmen darf, daſs die Volksmenge die Jahre durch, wovon man die Liſten hat, unveränderlich dieſelbige geweſen ſey, ſo hat man in jenen Liſten die Data, die man haben muſs für die Tabellen. Es läſst ſich daraus die geſammte *Sterbensordnung*, (die *Todtenleiter* oder wenn man will, die *Lebensleiter*,) nämlich die *Zahl der Lebenden* aus einer gewiſſen anfänglichen Menge, für *jedes Jahr*, und die *Abnahme*, oder die Zahl der Sterbenden für *jedes Jahr*, und daraus weiter die *mittlere Lebensdauer* berechnen. *Halley* war der erſte, der dieſen Zuſammenhang durchſchaute. Ein ſcharfſinniger und glücklicher Blick. Er entdeckte eine neue Wiſſenſchaft.

Weiſs man nämlich, wie viele Menſchen an einem Orte oder in einem Lande, wo die Zahl der Lebenden immer dieſelbige bleibet, von jedem Alter jährlich abſterben, ſo weiſs man ja auch, wie viel jährlich daſelbſt geboren werden; ſo viel nämlich als zuſammen aus jedem Alter abgehen. Weiſs man aber, wie viele ins erſte Jahr eintreten, und wie viele daraus auch abſterben, ſo weiſs man, wie viele das erſte Jahr *durchleben*. Eben ſo viele

viele treten in das zweyte Jahr. Und da man wiederum von diesen den Abgang weiss, so hat man auch die Zahl derer, die das zweyte Jahr ihres Alters durchlebet haben, und so ferner. Also hat man auch die ganze Zahl der Lebenden von jedem Alter.

43.

Anmerkung 2. Der *jährliche Abgang von jedem Alter aus einer gewissen Anzahl von Lebenden* ist es, was man auf diese Art *unmittelbar* aus den Beobachtungen nimmt. Tabellen also, die solche Verzeichnisse enthalten, sind *Grundtabellen.* Sie geben die Ordnung im Sterben an. Sie sind nicht von allen einzelnen Orten und Ländern, aus denen man sie erhalten hat, einander gleich, konnten es auch nicht seyn. Man nimmt das *Mittel* oder den *Durchschnitt* aus mehreren. Es ist aber doch so viel Uebereinstimmung unter ihnen, dass man sie mit einem gewissen Grade der Zuverlässigkeit, als *allgemeine Tabellen* zum Grunde legen kann.

Von diesen Grundtabellen habe ich folgende beygebracht. Die *Süssmilchische* Tab. IV. so wie sie von Herrn *Baumann* in der Ausgabe von *Süssmilchs Ordnung* von 1775 verbessert ist. Sie ist auf einer grossen Menge von Beobachtungen und besondern Tabellen gegründet, davon sie die mittlern Resultate enthält. Auch haben die nachher von dem *Herrn Stiftsamtmann Oeder* gesammleten Erfahrungen gezeiget, dass man wenigstens in *Norderdeutschland* ohne Gefahr sonderlich zu irren, sie

zum

zum Grunde legen könne, zumahl ſo lange noch nicht auf die verſchiedene Sterblichkeit der Geſchlechter Rückſicht genommen werden darf. Sie iſt auch mit viel kritiſchen Scharfſinn gemacht, ob ſie gleich in ihrer erſten Einrichtung Fehler bekam, die Herr *Baumann* bemerkte und einige davon in ſeiner Ausgabe verbeſſerte. Sie leidet noch mehr Verbeſſerungen, und wird ſie ohne Zweifel mit der Zeit erhalten. Uebrigens will ich im Vorbeygehen noch bemerken, daſs ſcharfſinnige Critik bey dieſem Tabellenmachen nöthig ſey, und man nicht blos die rohen Todtenverzeichniſſe zuſammen rechnen, daraus das Mittel ſuchen und dieſs geradezu zu tabellariſchen Zahlen machen könne. Man ſetzet voraus, die Volksmenge an einem Orte oder in einem Lande, deren Verzeichniſſe man gebraucht, bleibe unveränderlich. Das iſt ſelten der Fall. Die Population vergröſſert ſich oder nimmt ab. Es wandern jährlich Menſchen aus, oder, wie bey den groſsen Städten, kommen anders woher hinzu, und ſterben an einem Ort, wo ſie nicht geboren ſind. Es kann auſserordentliche Urſachen des Sterbens oder der Fruchtbarkeit in der Periode gegeben haben, wozu die Liſten gehören; nicht zu ſagen, daſs ſelbſt die Liſten, die hier die Stelle der unmittelbaren Beobachtungen vertreten, Prüfung, und wie man weiſs, ſehr viele Prüfung bedürfen. Solche Abänderungen und beſondere Umſtände ſollten zugleich mit den Liſten gegeben ſeyn. Je mehr ſie es ſind, deſto mehr kann ein ſcharfſinniger Tabellenmacher, bey der Vergleichung der Liſten unter

einander,

einander, Gründe finden, ſtatt der Zahlen, worauf dieſe unmittelbar führen, andere zu ſetzen, die mehr mit der Wirklichkeit zutreffen, die ſicherer nämlich als das Mittel aus den Erfahrungen gebraucht werden können. Herr D. *Price* *) hat hierüber Bemerkungen gemacht, auf die ich verweiſe. Ich will damit nichtsweniger als den Hang billigen, den einige wohl haben mögen, zu Gunſten einer Hypotheſe Verzeichniſſe zu corrigiren, und Tabellen zu verändern, unter dem Vorwande, daſs ſie doch ſo ganz genau nicht ſind. Sind die Liſten richtig, und die Tabellen nur aus dieſen gemacht, ſo ſind beyde als Facta zu betrachten, die man nicht umändern oder anders darſtellen muſs, als ſie ſind. Geht man von ihnen ab, ändert man aus Raiſonnement, ſo kann gefodert werden, daſs doch jene, wovon man abgeht, getreulich vorgelegt, daſs die Abweichung genau angemerkt, und dann durch Gründe gerechtfertigt werde. Alsdenn, aber nur alsdenn, will ich zugeben, daſs hier, wie in andern Fällen, die *mit Verſtand gemachte Geſchichte richtiger, wahrer ſey, als die unmittelbar in den Zeugniſſen lieget.*

44.

Anmerkung 3. Die zwote *Mortalitätstabelle* (Tab.V.) die ich als claſſiſch anſehe, iſt die *Nordhamptonſche*, ſo wie

*) *Obſervations on the proper Method of conſtructing Tables* etc. Eſſay 4. in ſeinen *Obſervations on reverſionary Payments.* Sie ſind in der vierten Ausgabe vermehrt.

wie ſie D. *Price* in der neuſten Ausgabe, Vol. 2. ſeines vorgedachten Buchs geliefert hat. Sie iſt nur von einer Stadt, aber auf Verzeichniſſen von 46 Jahren gegründet, genau und mit Scharfſinn gemacht, und in Hinſicht der darauf gebauten Rechnungen vorzüglich durchgearbeitet. Ich trage kein Bedenken ihr eben den Wehrt zuzuſchreiben, den die Süſsmilchiſche hat, und für England noch einen gröſsern. Ihr Unterſchied von dieſer iſt zwar merklich, jedoch ſteigt ſie bey den *Leibrenten* nur aufs höchſte bis zu Einer Jahrshebung.

Die dritte (Tab. VI.) iſt die *Wargentiniſche* von *Schweden.* Sie beruhet auf Beobachtungen aus dem ganzen Königreiche von vielen Jahren, und nichts übertrifft die Sorgfalt, womit ſie verfertigt und durchgerechnet iſt. Ich habe ſie aus D. *Price* genommen, der ſie in der vierten Ausgabe mitgetheilet hat. Sie kann, meiner Meinung nach, als eine allgemeine Tabelle für das *nordliche Europa* angeſehen werden. Alle *Leibrenten* ſind nach ihr gröſser als nach den beyden vorhergehenden, doch iſt der Unterſchied darin von der Süſsmilchiſchen, (der ſie bis gegen das 35ſte Jahr näher kommt, als der Northamptonſchen,) nie gröſser als Eine Jahrshebung; die meiſten male geringer.

45.

Anmerkung 4. In der VIIten Tabelle habe ich die des *Deparcieux* von den *Rentenirern* beygebracht, ſo eingerich-

eingerichtet, wie Herr *Florencourt* *) ſie verändert hat. Sie iſt wichtig für die Praxis, weil ſie noch faſt die einzige iſt, die man von dem Abſterben aus Geſellſchaften hat, die als *ausgeſuchte* anzuſehen ſind.

Die *Halleyſche* aus den Regiſtern von *Breslau*, (Tab. VIII.) auch die *Londoner*, nach *Simpſon* (Tab. IX.) ſind für die Praxis zwar entbehrlich, dienen aber zur Vergleichung, und ſind darum nicht überflüſsig, weil anſehnliche Tabellen darnach berechnet ſind. Die *Kerſeboomſche* aus *Holland* und *Weſtfriesland* (Tab. X.) gehört auch zu denen, die ſich auszeichnen, obgleich *Süſsmilch* einige nicht ungegründete Zweifel gegen ihre Zuverläſsigkeit, zumal bey den jüngern Jahren gemacht hat. Endlich habe ich noch die Tabelle XI. von der *Sterbensordnung in der Churmark* von Hr. *Baumann* angefügt, die ich für eine der vorzüglichſten unter denen aus beſondern Provinzen halte.

46.

Anmerkung 5. Die XII[te], XIII[te] und XIV[te] Tabellen ſind, ſo viel ich weiſs, die zuverläſsigſten, die man bis hieher hat über den *Unterſchied der Sterblichkeit bey den beyden Geſchlechtern.* Man wird ſie künftig in der Praxis nicht entbehren können, am wenigſten bey Leibrentencaſſen.

47. *Erklä-*

*) *Abhandl. aus der juriſt. und politiſchen Rechenkunſt.*

47.

Erklärung. Wenn man die Jahre, die eine gewisse Anzahl Personen von bestimmten Alter nach den Tabellen einige mehr, andere weniger noch zu leben haben, zusammennimmt, und die Summe durch die Zahl der Personen theilet, so bekommt man ein Mittel, welches anzeiget, wie viele Jahre jedes Individuum noch leben müsste, wenn sie alle gleich alt werden sollten. Z. B. aus 300 Funfzigjährigen lebet nach der Süssmilchischen Tafel Einer noch 46 Jahre, ein Anderer noch 45; noch Einer 44 u. s. w. Die Summe dieser verschiedenen Dauer auf alle 300 gleich vertheilet, ist *die mittlere künftige Lebensdauer*, kürzer, *die mittlere Lebensdauer*, (*die Dauer der Existenz*, *die Existenz*, *the Expectation of Life.*) Sie soll in der Folge auf eine ähnliche Art bezeichnet werden, wie die Leibrente durch $E\overline{a}$, für eine Person vom Alter *a*.

Zusatz. Wenn zu der *mittlern künftigen Lebensdauer* das wirklich schon erreichte Alter addirt wird, so bekommt man das gesammte *erreichbare Alter im Durchschnitt*, welches einige *die mittlere Lebensdauer* nennen. In diesem Sinn will ich aber das letztere Wort hier nicht nehmen, sondern die *künftige* mittlere Lebensdauer darunter verstehen.

48.

Satz 9. Die mittlere Lebensdauer einer Person vom gegebenen Alter a, wird gefunden, wenn man alle Zahlen

der

der Lebenden in den Tabellen bey dem Jahre $a+1$, *und den folgenden, bis ins höchste Alter summirt, und diess Summe durch die Zahl der Lebenden in dem gegebenen Alter dividirt.*

Es sey die *Anfangszahl*, das ist die Zahl der Lebenden in der Tabelle für das gegebene Alter *a*, wiederum A, und $\overset{1}{-}A$ die Zahl der Lebenden für das Jahr $a+1$; $\overset{2}{-}A$ für das Jahr $a+2$ u. s. f. so ist

$$Ea = \frac{\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + + \overset{x}{-}A}{A}..$$

Beweis. Da von A im Anfang des folgenden Jahrs nur $\overset{1}{-}A$ übrig sind, und die Gestorbenen als gleich im Anfang des Jahrs $(a+1)$ abgegangen, angesehen werden, so haben $\overset{1}{-}A$ Personen 1 Jahr durchgelebet. Eben so auch $\overset{2}{-}A$ Ein Jahr; und so ferner. Man bekommt auf diese Art die Summe aller Producte der Lebenden in die Jahre, die sie gelebet haben. Die das höchste Alter erreichende Zahl ist so viel mal mit Eins multiplicirt, als Jahre zwischen dem gegebenen und dem höchsten Alter sind. Die Ein Jahr weniger erreichten, sind ebenfalls in so viele Jahre weniger Eins multiplicirt in jener Summe, und so ferner, bis auf die, welche nur Ein Jahr nach dem gegebenen Alter übrig blieben, die auch noch in diess Eine Jahr multiplicirt darinnen sind. Jene ganze Summe also, dividirt durch die Zahl der Personen, die nach der Tabelle in dem Alter *a* leben, giebt zum Quotienten die mittlere Lebensdauer.

49.

Zuſatz I. Man kann ſie auch ſo finden. Es ſey $A - \overset{1}{-}A = \Delta A$, das iſt, die Zahl der in dem erſten Jahr Sterbenden, (der *Abgang*, das *Decrement*) von A für das Jahr. Eben ſo $\overset{1}{-}A - \overset{2}{-}A = \Delta \overset{1}{-}A$ der Abgang oder das *Decrement von* $\overset{1}{-}A$, und ſo ferner. Nun erreichen ΔA, weil ſie gleich im Anfang des erſten Jahrs abgehen, gar kein Alter, ſie ſterben ſo gleich ab. $\Delta \overset{1}{-}A$ erreichen nur Ein Jahr; $\Delta \overset{2}{-}A$ ſterben, nachdem ſie zwey Jahre gelebet haben, und ſo ferner, $\Delta \overset{n}{-}A$, wenn ſie *n* Jahre erreichet haben. Folglich iſt die Summe $\Delta \overset{1}{-}A + 2\,\Delta \overset{2}{-}A + 3\,\Delta \overset{3}{-}A + + x.\ \Delta \overset{x}{-}A$ die Summe aller Producte aus der Zahl der Sterbenden für jedes Jahr in die Zahl der Jahre multiplicirt, die ſie nach dem gegebenen Alter *a* noch gelebet haben. Alſo iſt auch

$$E\overline{a} = \frac{\Delta \overset{1}{-}A + 2.\ \Delta \overset{2}{-}A + + (x)\, \Delta \overset{x}{-}A}{A}.$$

Es iſt $\overset{x}{-}A$ für die höchſte Lebenszeit $= 0$. Da iſt auch $\Delta \overset{x}{-}A = 0$.

Dieſe Gleichheit der beyden erwähnten Summen erhellet auch überdieſs daraus, weil die Zahlen $\overset{1}{-}A, \overset{2}{-}A + + \overset{x}{-}A$, wenn man von hinten anfängt, bey jedem Jahr die Summen der jährlichen Decremente ſind, die auf ſie folgen. *)

50. *Zu-*

*) *Zuſätze zu dieſem Capitel.* §. I.

50.

Zuſatz 2. Die vorhergehenden Ausdrücke ſind nur richtig, wenn man blos auf *ganze* Jahre rechnet; nach der Vorausſetzung, daſs die im *Lauf des Jahrs Sterbende alle am Anfange deſſelben abgehen.* Aber da das nicht iſt, ſo nimmt man an, daſs ſie während des Jahrs *gleichförmig* abſterben; das iſt denn ſo viel, als wenn ſie alle noch die *Mitte* deſſelben erreichet, alſo $\frac{1}{2}$ Jahr länger gelebt hätten, als vorher angenommen war. Daher muſs zu dem obigen Wehrt von $E\overline{a}$ noch $\frac{1}{2}$ Jahr addirt werden. Es wird alſo

$$E\overline{a} = \frac{\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + \overset{x}{-}A}{A} + \frac{1}{2}.$$

Dieſs iſt die *corrigirte mittlere Lebensdauer*, die in den Tabellen ſteht.

51.

Zuſatz 3. Es iſt auch

$$E\overline{a} = \frac{A + \overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + \overset{x}{-}A}{A} - \frac{1}{2}.$$

das iſt, man kann die Summe der Lebenden ſo nehmen, daſs die zu dem gegebenen Alter gehörige Anfangszahl darunter mit begriffen iſt. Dann muſs $\frac{1}{2}$ abgezogen werden. Wird nur auf *volle* Jahre gerechnet, ſo muſs 1 abgezogen werden.

52.

Erklärung. Das *künftige wahrſcheinliche Leben* eines Menſchen vom gegebenen Alter *heiſst die Zeit, in der die Hälfte der Perſonen dieſes Alters geſtorben ſind:* Z. B. von 511 Lebenden im 15ten Jahr ſind am Ende des 55ſten, oder im Anfang des 56ſten nur noch 255 nach *Süſsmilchs* Tafel am Leben, das iſt die Hälfte von der Zahl der 15 jährigen. Folglich iſt das künftige wahrſcheinliche Leben eines 15 jährigen 40 Jahr. Auf dieſelbe Art wird es für alle andere Fälle faſt unmittelbar aus den Tabellen gefunden.

Zuſatz. Wird das ſchon erreichte Alter zu dieſem künftigen *wahrſcheinlichen* addirt, ſo bekommt man das *ganze wahrſcheinliche* Alter. Es iſt in dem vorigen Beyſpiel 55 Jahr.

53.

Anmerkung. Es heiſst die *wahrſcheinliche Dauer* darum, weil es *mehr wahrſcheinlich* iſt, daſs ein Menſch vom gegebenen Alter jenes Alter erreiche, als daſs ers nicht erreiche; auch *mehr wahrſcheinlich* iſt, daſs einer nicht länger lebe, als daſs er länger lebe. Es iſt *wahrſcheinlicher*, daſs ein Funfzehnjähriger bis 55 Jahre komme, als daſs er ſchon früher geſtorben ſeyn werde. Denn für das Erreichen jener Gränze iſt die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{1}{2}$, aber davon, daſs er früher todt ſey, iſt ſie kleiner, ſie iſt davon, daſs er nur 54 Jahr erreiche,

$\frac{511 - 264}{511} = \frac{247}{511}$. Eben so ist auch die Wahrscheinlichkeit, daſs er länger am Leben seyn werde als am Ende des 55sten Jahrs, kleiner als $\frac{1}{2}$; z. B. für das 56ste Jahr nur $\frac{246}{511}$. Nennt man nun, wie die meisten Male in dem gemeinen Sprachgebrauch, *wahrscheinlich*, *was mehr zu erwarten ist*, oder überhaupt, *mehr für sich hat*, *als das Gegentheil*, so kann man sagen, es sey dieſs die *wahrscheinlich noch künftige Lebensdauer.*

Allein dieſs ist gewiſs nicht die Wahrscheinlichkeit, daſs *eine Person gerade so alt werde*, gerade in dem so gefundenen bestimmten Jahr, nicht früher noch später, sterben werde. In dem 56sten Jahr sterben wiederum 9 ab. Die letztere Wahrscheinlichkeit, daſs nämlich ein Funfzehnjähriger gerade im 56sten Jahre sterben werde, ist nicht gröſser als $\frac{9}{511}$. Auch hat es nicht den Sinn, als wenn sich annehmen oder voraussetzen lasse in Rechnungen, daſs ein Funfzehnjähriger nach 40 Jahren todt seyn werde. Es läſst sich dieſs eher voraussetzen als das Gegentheil, aber deswegen ist es nur etwas *mehr wahrscheinlich*, läſst sich nicht als gewiſs annehmen. Wenn die Gesetze bestimmen, daſs jemand, von dessen Leben sich keine Nachricht in so vielen Jahren findet, für todt zu halten sey, so kann das andere Gründe haben, und gute Gründe haben, und hat sie; sonst würde es sehr unlogisch seyn, den für todt anzunehmen, dessen am

Lebenseyn fast eben so viel für sich hat, als sein Todtseyn; und von dem es nur etwas mehr wahrscheinlich ist, daſs er todt sey.

Diese *wahrscheinliche Lebensdauer* ist sehr leicht aus den Tabellen zu finden; aber sie ist in der folgenden Rechnung wenig brauchbar. Da kommt es auf die *mittlere Lebensdauer* mehr an. Diese ist auch nichts weniger als die Dauer, von der man annehmen dürfte, daſs *eine bestimmte Person von gegebenen Alter sie erreichen werde.* Bey den Funfzehnjährigen ist solche z. B. 38, 56 Jahr (nach der Süſsmilchischen Tafel, das ist, derjenigen, die ich überhaupt verstanden haben will, wenn ich keine andere nenne.) Nun sterben so viele von den 511 Funfzehnjährigen vor und nach dem 54sten Jahr, und in diesem nur 9, daſs die Wahrscheinlichkeit, der Funfzehnjährige A werde gerade in dem 54sten sterben, nicht gröſser ist als $\frac{9}{511}$. Allein da *im Durchschnitt* auf jeden Funfzehnjährigen noch $38\frac{1}{2}$ Jahr für das künftige Leben fällt, obgleich sonst auf einige mehr, auf andere minder, so erhält man bey 511 Personen von 15 Jahren gleich viel künftige Lebensjahre, wenn man für jeden im Durchschnitt $38\frac{1}{2}$ nimmt, als wenn man für einige mehr, für andere weniger, der Tabelle gemäſs, rechnet. Bey einer einzelnen Person läſst sich also nur auf so viel Jahre rechnen, als dieser Durchschnitt angiebt. In so weit kann sie die *Erwartung des Lebens* genennet werden.

54.

Anmerkung. Simpson, der sehr richtig die *mittlere* Lebensdauer und die *wahrscheinliche* unterschied, characterisirt die erste mit andern seiner Landsleute, durch *the Number of Years, which a Person of a given Age, may upon an Equality of Chance expect to enjoy.* Die *wahrscheinliche* Lebensdauer ist bey ihm: *that Period, which a Person hath an equal chance of surviving.* *) Diese Erklärungen sind doch undeutlich. Von der *wahrscheinlichen* Lebensdauer läßt sich sagen, es sey gleiche Wahrscheinlichkeit (eigentlich ist sie grösser) daß eine Person vom gegebenen Alter sie erreiche. Von der *mittlern* kann man nur sagen: Es ist gleich wahrscheinlich, daß die bestimmte Person A sie erreiche als jede andere B, C, von demselben gegebenen Alter.

55.

Zusatz 4. Wenn das Absterben *gleichförmig* erfolgte, das ist, in jedem Jahr die Zahl der Sterbenden in den Tabellen gleich groß wäre, so *würden* beyde, die *mittlere* und die *wahrscheinliche* Lebensdauer einerley seyn. In jedem andern Fall sind sie verschieden und müssen es seyn, ob sie gleich bey einem einzelnen Alter zusammentreffen können. **) Die *mittlere* ist nach den Tabellen grösser in den ersten Jahren des Lebens, nachher, und gewöhnlich, kleiner als die *wahrscheinliche*, wenn gleich der Unterschied nicht sehr groß ist.

*) *Simpsons Select Exercises for young Proficients in the Mathematicks.* London 1752. p. 273.

**) Man sehe die *Zusätze zu diesem Capitel*, §. 12.

56.

Practische Methode, die mittlere Lebensdauer und die Leibrenten nach jeder gegebenen Sterblichkeitstafel zu berechnen.

Die hieher gehörigen Rechnungsmethoden führen entweder nur zu *beynahe richtigen Wehrten*, dieſs ſind die *Approximationsmethoden;* oder ſie geben ſolche völlig genau. Man nahm zu jenen ſeine Zuflucht, weil die letztern weitläuftig und mühſam ſchienen. Das ſind ſie aber nicht, wenn man nur mit den Hülfstabellen, die zu der Zinsrechnung gehören, verſehen iſt.

Durch eine neue Hülfstabelle, die man ſich in Beziehung auf die Mortalitätstafel macht, nach der gerechnet werden ſoll, und nach dem Zinsfuſs, den man zum Grunde legt, kann die ganze Arbeit ſowohl bey den Leibrenten als bey der mittlern Lebensdauer auf Eine Diviſion gebracht werden. Die Verfertigung jener Tabelle erfodert, wenns nur bloſs um die *Lebensdauer* zu thun iſt, nichts als ein leichtes Addiren; ſoll ſie aber zur *Leibrentenrechnung* eingerichtet werden, etwas mehr Mühe, daher man ſie auch wohl um einer einzigen ſolchen Rente willen nicht machen wird. Allein ſie giebt denn auch zugleich alle Wehrte der Leibrenten, wie alle Dauer für jedes Alter auf einmal. Ich will ſie, wie ſie zu der Süſsmilchiſchen Mortalitätstafel gehört, hieher ſetzen. Sie iſt das Muſter für andere ähnliche.

A.

A. *Alter.*	B. *Lebende nach Süſsmilch.*	C. *Die Zahlen in B. discontirt auf die Jahre des Alters, für* r = 1,04.	D. *Summen der Zahlen in B. von hinten an addirt.*	E. *Summen der Zahlen in C. von hinten an addirt.*
0	1000	1000	28988	12431, 48
1	750	721, 15	27988	11431, 48
2	661	611, 13	27238	10710, 33
3	618	549, 40	26577	10099, 20
4	593	560, 90	25959	9549, 80
5	579	475, 90	25366	9042, 90
6	567	448, 11	24787	8567, 00
7	556	422, 51	24220	8118, 89
8	547	399, 69	23664	7696, 38
9	539	378, 69	23117	7296, 69
10	532	359, 40	22578	6918, 00
11	527	342, 33	22046	6558, 60
12	523	326, 66	21519	6216, 27
13	519	311, 70	20996	5889, 61
14	515	297, 40	20477	5577, 91
15	511	283, 74	19962	5280, 51
16	507	270, 69	19451	4996, 77
17	503	258, 23	18944	4726, 08
18	499	246, 32	18441	4467, 85
19	495	234, 95	17942	4221, 53
20	491	224, 09	17447	3986, 58
21	486	213, 27	16956	3762, 49
22	481	202, 96	16470	3549, 22
23	476	193, 13	15989	3346, 26
24	471	183, 75	15513	3153, 13
25	466	174, 80	15042	2969, 38
26	461	166, 28	14576	2794, 58
27	456	158, 15	14115	2628, 30
28	451	150, 40	13659	2470, 15
29	445	142, 69	13208	2319, 75
30	439	135, 35	12763	2177, 06

A.	B.	C.	D.	E.
31	433	128, 37	12324	2041, 71
32	427	121, 72	11891	1913, 34
33	421	115, 39	11464	1791, 62
34	415	109, 37	11043	1676, 23
35	409	103, 65	10628	1566, 86
36	402	97, 95	10219	1463, 21
37	395	92, 55	9817	1365, 26
38	388	87, 41	9422	1272, 71
39	381	82, 53	9034	1185, 30
40	374	77, 90	8653	1102, 77
41	367	73, 50	8279	1024, 87
42	360	69, 33	7912	951, 37
43	353	65, 36	7552	882, 04
44	346	61, 60	7199	816, 68
45	339	58, 04	6853	755, 08
46	332	54, 65	6514	697, 04
47	324	51, 28	6182	642, 39
48	316	48, 09	5858	591, 11
49	308	45, 07	5542	543, 02
50	300	42, 21	5234	497, 95
51	291	39, 37	4934	455, 74
52	282	36, 69	4643	416, 37
53	273	34, 15	4361	379, 68
54	264	31, 75	4088	345, 53
55	255	29, 49	3824	313, 78
56	246	27, 36	3569	284, 29
57	237	25, 34	3323	256, 93
58	228	23, 44	3086	231, 59
59	219	21, 65	2858	208, 15
60	210	19, 96	2639	186, 60
61	201	18, 37	2429	166, 54
62	192	16, 87	2228	148, 17
63	182	15, 38	2036	131, 30
64	172	13, 98	1854	115, 92
65	162	12, 66	1682	101, 94

A.	B.	C.	D.	E.
66	152	11, 42	1520	89, 28
67	142	10, 26	1368	77, 86
68	132	9, 17	1226	67, 60
69	122	8, 15	1094	58, 43
70	112	7, 19	972	50, 28
71	103	6, 36	860	43, 09
72	94	5, 58	757	36, 73
73	85	4, 85	663	31, 15
74	77	4, 23	578	26, 30
75	69	3, 64	501	22, 07
76	62	3, 15	432	18, 43
77	55	2, 68	370	15, 28
78	49	2, 30	315	12, 60
79	43	1, 94	266	10, 30
80	37	1, 61	223	8, 36
81	32	1, 33	186	6, 75
82	28	1, 12	154	5, 42
83	24	0, 93	126	4, 30
84	20	0, 74	102	3, 37
85	17	0, 61	82	2, 63
86	14	0, 48	65	2, 02
87	12	0, 40	51	1, 54
88	10	0, 32	39	1, 14
89	8	0, 24	29	0, 82
90	6	0, 18	21	0, 58
91	5	0, 14	15	0, 40
92	4	0, 11	10	0, 26
93	3	0, 08	6	0, 15
94	2	0, 05	3	0, 07
95	1	0, 02	1	0, 02

57.

Diese Tabelle eingerichtet, so ist zur Berechnung der mittlern Lebensdauer nichts mehr erforderlich, als dass, wenn das Alter einer Person a ist, die Zahl in der Columne D bey dem nächstfolgenden Jahre $a+1$, durch die Zahl in der Columne B bey dem gegebenen Alter a dividirt, und $\frac{1}{2}$ hinzugeleget werde.

Die Zahl in der Columne D bey dem Jahre $a+1$ enthält die Summe der Zahlen der Lebenden in B, von dem Jahre $a+1$ an, diess eingeschlossen, bis ans Ende der Tabelle. Ist also die *Anfangszahl*, oder die Zahl der Lebenden in dem gegebenen Alter, A, welche in der Columne B bey dieses Alters Jahre steht, so ist die Zahl in der Columne D bey dem nächstfolgenden Jahr $= \overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + \overset{x}{-}A$. Diese also durch A dividirt, und $\frac{1}{2}$ hinzugelegt, giebt $\frac{\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + \overset{x}{-}A}{A} + \frac{1}{2} = E_{\overline{a}}$. (nach Satz 9. §. 48.)

Ex. Das gegebene Alter sey 15 Jahr, so ist $A = 511$. Die bey dem 16ten Jahr stehende Zahl unter D, ist 19451. Nun ist $\frac{19451}{511} + \frac{1}{2} = 38{,}06 + 0{,}5 = 38{,}56$. Diess ist die mittlere Lebensdauer.

58.

Um den Wehrt der *Leibrente* 1 zu haben, nämlich auf *ganze* Jahre, wobey die Zwischenzeiten nicht gerechnet

rechnet werden, und auch die Rente jedesmal am Ende des Jahrs zahlbar ist, wie im 8ten Satz §. 40. dividire man die Zahl aus der Columne E, welche bey dem um 1 Jahr grössern Alter steht, durch die Zahl aus der Columne C, bey dem gegebenen Alter selbst.

Ex. Es sey das gegebene Alter 20 Jahr, so stehet in der Columne E bey 21 Jahr die Zahl 3762,49; und in der Columne C bey 20 Jahr, 224,09. Es ist $\frac{3762,49}{224,09} = 16,79$. Diess ist der baare Wehrt der Leibrente 1, für eine Person von 20 Jahren, wenn die Zinsen des Geldes zu 4 Procent gerechnet werden.

Die gefundenen Wehrte sind nur bis auf zwey Decimalziffern richtig, wenn die Zahlen in der Columne B nur bis auf so viele genommen sind. Soll eine Tabelle mit Fleiss bearbeitet werden, so muss man darinn weiter gehen, bis auf 5 Ziffern. In dem vorigen Exempel findet man bey den angenommenen Zahlen, $\lambda\overline{20} = 16,7901$; aber der schärfer gesuchte Wehrt ist 16,7905.

Uebrigens erhellet aus der Einrichtung der Hülfstabellen von selbst, dass die Art zu rechnen richtig sey. Die Zahl bey dem Jahre 20 in der Columne C, nämlich 224,09 ist die Zahl der Lebenden in dem Jahr, 491, in der Columne B, zurück discontirt auf 20 Jahre, also $\frac{491}{r^{20}}$. Die folgenden Zahlen derselben Columne C, sind die folgenden Zahlen der Lebenden discontirt,

$\frac{1}{}$A

$\frac{\overset{1}{-}A}{r^{20+1}}$, $\frac{\overset{2}{-}A}{r^{20+2}}$, $\frac{\overset{3}{-}A}{r^{20+3}}$, und so ferner, wenn wiederum A die Zahl der anfänglich Lebenden im Alter von 20 Jahren, $\overset{1}{-}A$ dieselbe für das erste folgende, $\overset{2}{-}A$ für das zweyte, u. s. f. ist. Nun giebt aber die Zahl der Columne E bey 21 die Summe

$$\frac{\overset{1}{A}}{r^{20+1}} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{20+2}} + + \frac{\overset{x}{A}}{r^{20+x}}.$$

Daher diese Zahl durch die Zahl der Columne C bey 20 Jahr dividirt so viel ist als

$$\frac{1}{A:r^{20}} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r^{20+1}} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{20+2}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{20+x}} \right)$$

und wenn statt 20 überhaupt jedes gegebene Alter *a* gesetzet wird

$$= \frac{1}{A:r^{a}} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r^{a+1}} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{a+2}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{a+x}} \right)$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{2}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x}} \right) =$$

dem baaren Wehrt der Leibrente für das Alter *a*, $= \lambda\overline{a}$. nach Satz 8. §. 40.

Diese Methode halte ich für die vorzüglichste von allen, zumal weil man die so gemachte Hülfstabelle auch bey dem Wehrte der Verbindungsrenten mit vielem Vortheil gebrauchen kann, wie ich unten zeigen will. Sonst kann man, weil doch die Columne C etwas Mühe macht,

in

in Hinsicht auf die einfachen Leibrenten noch mit einer leichtern Vorrichtung abkommen.

59.

Zweyte Art die Leibrente zu finden.

1) Anstatt der discontirten Zahlen der Lebenden nehme man die eben so *discontirten jährlichen Decremente* und setze diese in die Columne C, und ihre Summen von hinten an in die Columne E. Die Decremente sind viel kleinere Zahlen, daher das Discontiren leichter und geschwinder von statten geht.

2) Ist das gegebene Alter *a*, so dividire man die bey *a* stehende Summe aus der Columne E, durch die Anfangszahl A.

3) Dieser Quotient werde wiederum durch r^{a+1} multiplicirt, so bekommt man den *baaren Wehrt der beym Tode einer Person vom Alter a zahlbaren Summe 1.* Diese Wehrte nach der *Süssmilchischen* Tafel und nach dem Zinsfuss r = 1,04 enthält die XXIste Tabelle.

4) Diess Product von 1 abgezogen und den Rest mit dem *Grundcapital* multiplicirt giebt den Wehrt der Leibrente 1, woraus ihr Wehrt für jede andere Grösse der jährlichen Rente leicht erhalten wird.

So eine Tabelle selbst will ich nicht hersetzen. Ihre Einrichtung ist leicht begreiflich. Man sieht, dass man auf diese Art die Arbeit bey der Vorrichtung abkürze, aber denn auch wiederum mehr zu rechnen habe, als bey dem

dem vorher beſchriebenen Verfahren. Gleichwohl ſind ſolche Methoden ſehr dienlich, wo man man nur eine oder die andere Leibrente nach einer Sterblichkeitstafel ſuchet, ohne ſie alle haben zu wollen.

Verfährt man auf die vorgeſchriebene Art, ſo iſt die Summe bey dem Alter *a*, die man aus der Tabelle nimmt, (ſie heiſse S) $= \frac{\Delta A}{r^a} + \frac{\overset{1}{\Delta}A}{r^{a+1}} + + \frac{\overset{x}{\Delta}A}{r^{a+x}}$. Es ſind nämlich ΔA, $\overset{1}{\Delta}A$, $\overset{x}{\Delta}A$, die auf einander folgende *Decremente* der Anfangszahl A, für das Alter *a*, jedes auf den Anfang des Lebens zurück discontirt. Daher iſt

$$\frac{r^a S}{A} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\overset{1}{\Delta}A}{r^2} + + \frac{\overset{x}{\Delta}A}{r^x} \right).$$

Dieſe letztere Gröſse nochmals mit *r* multiplicirt, iſt der *baare Wehrt einer beym Tode einer Perſon von gegebenen Alter a zahlbaren Summe 1*, (*der Wehrt einer Erbſchaft 1*, die bey dem Tode der Perſon zu empfangen iſt.) Dieſer Wehrt wird zu manchen Aufgaben gebraucht, daher eine beſondere Tabelle für ſie nöthig war.

Wird dieſer Wehrt T genannt, ſo iſt $\lambda\overline{a} = p(1 - T)$ Man ſehe *Zuſätze* zu dieſem Capitel. *)

Es ſey das gegebene Alter 40 Jahre; ſo iſt nach der XXIſten Tabelle der Wehrt T = 0,4737, und weil nach

*) §. 3.

nach demselbigen Zinsfuſs, $r = 1,04$, auch $p = 25$, so hat man $(1 - 0,4737) \cdot 25 = 13,1575$ für die Leibrente, oder $\lambda \overline{4c}$.

Anmerkung. Wenn man die Wehrte von T nicht schon aus den Wehrten der Leibrente berechnet hätte, so könnte man die letztern aus den erstern erhalten. Die Engländer nennen die Leibrente den *Wehrt des Lebens*, the *Value of the Life*. Die erwähnten Wehrte T könnten nach dieser Analogie *Wehrte des Todes* heiſsen. Aber sie haben schon andere Namen, und die behalte man lieber, um die andächtelnden Wortspiele, den Wehrt des Lebens aus dem Wehrt des Todes zu finden, u. d. g. zu vermeiden.

60.

Dritte Methode die Leibrenten zu berechnen.

Noch leichter ist die Vorrichtung nöthig bey folgendem Verfahren:

1) An statt der *jährlichen Decremente* nehme man die *Unterschiede* derselben, und discontire einen jeden auf den Anfang des Alters zurück, wie vorher. Läſst man die unterzehnjährigen Personen weg, da ihre Leibrenten selten vorkommen, so ist nach *Süſsmilchs* Tafel die *erste Differenz der Decremente*, $5 - 4 = 1 = \Delta A - \Delta \overset{1}{-} A$ und die folgende bis zum Jahr 20 sind alle $= 0$, und alle folgende sind entweder 1 oder 0. Folglich kann die Columne der discontirten Zahlen, die sonst die meiste

Rechnung erfordert, blos aus der Tabelle der Disconto-zahlen Tab. II. abgeschrieben werden.

2) Man summire diese *discontirten Differenzen* von hinten an. Allein dabey ist zu bemerken, dass wo das *folgende Decrement* grösser ist als das vorhergehende, wenn $\Delta \overset{n+1}{-}A > \Delta \overset{n}{-}A$, da wird die *Differenz* $\Delta \overset{n}{-}A - \Delta \overset{n+1}{-}A$, und auch die discontirte *verneinend*, muss also bey der erwähnten Summirung von hinten an, *abgezogen* werden.

3) Diese Summen nun für ein andres Alter, z. B. 20 Jahr zu gebrauchen, muss die zu 20 Jahr gehörige Summe mit r^{20} wieder multipliciret werden. Die so gefundene Summe der Differenzen für eine Anfangszahl $\overset{a}{-}A$ sey N.

4) Die Zahl N subtrahire man von dem ersten Decrement der Anfangszahl A, das ist, von Δ A, und multiplicire den Rest durch $\frac{rp}{A}$. Diess ist alsdenn wiederum *der Wehrt der Erbschaft 1.* §. 60. Daher

5) Selbiger von 1 abgezogen und mit dem *Grundcapital* multiplicirt, den Wehrt der *Leibrente* 1 giebet.

Diess ist in Zeichen ausgedruckt,

$$\lambda\bar{a} = \left(1 - rp\,\frac{(\Delta A - N)}{A}\right) P.$$

(Siehe *Zusätze* zu diesem Capitel.) *)

61. Man

*) §. 4.

61.

Man kann noch weiter an ſtatt der *Differenzen* ſelbſt die *Differenzen der Differenzen* nehmen, ſolche auf dieſelbe Art wie vorher discontiren, und die discontirten Zahlen vom Ende an rückwärts ſummiren. Bey der *Süſsmilchiſchen* Tafel gewinnet man dadurch nichts, weil man weder kleinere Zahlen, noch weniger zu discontiren hat, als wenn die Differenzen ſelbſt gebraucht werden. Bey andern Tabellen kann das anders ſeyn. Die Rechnung, die alsdenn mit dieſer Summe zu machen ſeyn würde, iſt zwar ſchon etwas zuſammengeſetzter, allein das iſt unerheblich. In den Zuſätzen habe ich mehr davon beygebracht. Da findet ſich auch noch eine andere Methode *mittelſt der Decrementen* und der *Zeitrenten* die Leibrenten zu finden.

62.

Anmerkung. *Morgans* *) Methode, die Leibrenten zu berechnen durch eine *doppelte Rechnung*, davon eine zugleich die Probe der andern iſt, will ich noch anführen, weil D. *Price* ſie jeder andern vorzieht, wozu ich eben keinen Grund ſehe. Sie beruhet auf folgenden. Es ſey A die Zahl der Gebohrnen, das iſt, der vom Alter o, (oder auch, wenn die Tabellen nicht ſo weit zurückegehen, wie die ältere Northamptonſche, die *Morgan* damals noch gebrauchte, ſo ſey A die Zahl der Lebenden

*) *Doctrine of Annuities and Aſſurances* p. 58. u. folg.

für das jüngste Alter in der Tabelle.) Es sey ferner für ein gegebenes Alter *a*, die Zahl der Lebenden $\overset{a}{-}A$, die hier die Anfangszahl für das gegebene Alter *a* ist, so ist nach dem obigen, §. 58.

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{\overset{a}{-}A : r^{a}}\left(\frac{\overset{a+1}{-}A}{r^{a+1}} + \frac{\overset{a+2}{-}A}{r^{a+2}} + +\right)$$

und folglich

$$\frac{\overset{a}{-}A}{A : r^{a}} \cdot \lambda\overline{a} = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overset{a+1}{-}A}{r^{a+1}} + \frac{\overset{a+2}{-}A}{r^{a+2}} + +\right).$$

Nun ist zugleich klar, dass $\frac{\overset{a}{-}A}{A\, r^{a}}$ so viel ist, als der *baare Wehrt einer Summe 1, welche zahlbar ist, im Fall ein jetzo Geborner* (oder eine Person von dem jüngsten Alter in der Tabelle) *das Alter a erreicht.* Denn diese Summe 1 ist nur nach *a* Jahren zahlbar, folglich ihr baarer Wehrt $\frac{1}{r^{a}}$; aber auch nur zahlbar unter der Bedingung, dass die gegebene Person noch am Leben sey, davon die Wahrscheinlichkeit $\frac{\overset{a}{-}A}{A}$ ist.

Ferner sind $\frac{\overset{a+1}{-}A}{A\, r^{a+1}}$ und $\frac{\overset{a+2}{-}A}{A\, r^{a+2}}$ u. s. f. die *baaren Wehrte der Summe 1*, wenn die Person vom jüngsten Alter der Tabellen, das Alter $a + 1$, $a + 2$ u. s. f. erreichet.

Daraus

Daraus folget denn im Allgemeinen, „daſs jede für „ein beſtimmtes Alter *a* berechnete Leibrente, multipli„cirt in den baaren Wehrt einer Summe 1 zahlbar, wenn „das jüngſte Leben der Tabelle das Alter erreichet, wo„für die Leibrente berechnet iſt, ein Product giebet, „gleich der Summe der baaren Wehrte der zahlbaren „Summe 1, wenn das jüngſte Leben zum Alter $a+1$ „und zum Alter $a+2$, und ſo ferner, bis zum höchſten „Alter kommt."

Man ſchreibe alſo die Leibrenten in *einer Columne*, von der für das älteſte Leben an, rückwärts unter einander. Die Alterszahlen von der höchſten an ſetze man zur Seite. Alsdenn mache man eine *dritte* Columne, worin die Wehrte der Summe 1 zahlbar, wenn das jüngſte Leben das höchſte Alter, das nächſtniedrigere, und ſo ferner, erreicht, geſetzet werden. Dieſe Wehrte ſummire man in einer *vierten* Columne, und ſetze die Summe der höhern Jahre dem nächſt niedrigern Jahre gegen über. Bey dieſer Einrichtung muſs das Product der Leibrente für ein gewiſſes Jahr, multiplicirt durch den dabey ſtehenden baaren Wehrt der Summe 1 der dritten Columne, der Zahl in der vierten jedesmal gleich ſeyn. Dieſs iſt die Probe der Rechnung.

Die *Leibrentenwehrte* ſelbſt ſucht *Morgan* ſo, daſs aus dem Wehrt einer für ein Alter *a* jedesmal der Wehrt derſelben für das um Ein Jahr niedrigere Alter gemacht

 wird.

wird. Diess geschieht nach einer Formel, die ich unten beybringen will, und erfodert nicht viel Rechnung.

Allerdings hat diese Methode ihren Wehrt, aber ich meine doch, sie sey an Kürze nicht mit der zu vergleichen, die ich vorher gewiesen habe. Die Verfertigung der Hülfstabelle (im 56sten §.) erfodert schlechterdings kein Dividiren, wenn man die Discontozahlen schon hat, die auch *Morgan* voraussetzet, nur blos Multipliciren und Addiren. Will aber jemand bey Verfertigung jener Tafel, die discontirten Zahlen der Lebenden in der Columne C, als worauf am Ende alles beruhet, zugleich durch eine doppelte Rechnung haben, um sicher zu gehen, so kann das auf folgende Art leicht geschehen.

Man schreibe die erwähnten discontirten Zahlen unter einander in umgekehrter Ordnung, wie sie in der obigen Tabelle (§. 56.) stehen; nämlich die zum Alter 95 gehörige zuerst. Zur Seite mache man eine Columne, worin die discontirten jährlichen Decremente in eben der Ordnung stehen. Die Decremente sind kleine Zahlen, man findet also diese Reihe sehr leicht. Nun werde eine vierte Columne aus der dritten gemacht. Das discontirte Decrement des letzten Lebensjahrs (hier in der dritten Columne das erste) ist auch das erste in der vierten Columne. Die folgenden Zahlen der vierten sollen jede aus ihren nächstvorhergehenden mit dem Zinsfuss *r* multiplicirt, wozu die Zahl der dritten Columne für dasselbe Jahr addirt wird, gemacht werden. Ist richtig gerechnet, so

ſo ſind die Zahlen dieſer vierten Columne dieſelben mit denen in der zweyten.

Die Vorſchrift wird durch das folgende Schema deutlich werden.

Alter.	Discontirte Zahl der Lebenden.	Discontirte Decremente.	Vierte Columne.
95	0, 02	0, 02	0, 02
94	0, 05	0, 025	0, 02. r + 0, 025 = 0, 05
93	0, 08	0, 026	r, 0, 05 + 0, 026 =0, 08
92	0, 11	0, 027	r. 0, 08 + 0, 027 = 0,11
+	+	+	

Bey dieſen erſten Theilen iſt die doppelte Rechnung gar nicht nöthig, in der Folge aber, wenn die Zahl der Lebenden gröſser wird, macht ſie die Arbeit ſicher und angenehm. Sind aber die discontirten Zahlen einmal richtig berechnet, ſo erfodert das Uebrige bey jener Tabelle nichts mehr, als ein ſimples Addiren.

63.

Berechnungsarten, die nur zu Näherungen führen.

Man ſucht Abkürzungen durch Hypotheſen, da man eine gewiſſe allgemeine Regel für die jährlichen Decremente annimmt. Bey den *einfachen Leibrenten* iſt das

nicht

nicht nöthig, weil diese ohnediess leicht genug zu finden sind. Ein anders ist es bey den Verbindungsrenten für mehrere Personen, wo man zuweilen genöthigt ist, sich mit Näherungen zu begnügen. Aber dennoch giebt es manche Gelegenheit, wo dergleichen auch bey jenen gebraucht werden können.

Moivre, der erste, der nach *Halleys* Grundsätzen diese Berechnung vortrug, nahm die *Decremente aller Jahre einander gleich an.* Die *Breslauer* Sterblichkeitstafel, die man damals nur allein gebrauchte, schien diese Gleichförmigkeit im Absterben zuzulassen. Für gewisse Perioden des Lebens weicht das auch nicht sehr ab von der *Northamptoner* und der *Warwicher* Tabelle, die *Price* bekannt machte. Dazu nahm *Moivre* das 86ste Jahr für das *höchste Alter* an, die wenigen, die darüber herauslebten, glaubte er weglassen zu können. Es hat sich nachher gefunden, dass man weder das eine noch das andere annehmen darf, auch wenn mans in Praxi nicht ganz genau nehmen will. *Moivre* hat diess am Ende selbst erkannt, und in der letzten Ausgabe seiner *Doctrine of Chance* andere Regeln gegeben. Allein nach D. *Price* Zeugniss sind auch diese nicht zutreffend. Eine andere Hypothese, die *Moivre* bey den Verbindungsrenten annahm, weicht noch weiter von den Tabellen ab, als die vorige.

Gleichwohl muss man sich diese Art zu rechnen bekannt machen. Sie liegt bey vielen Betrachtungen zum Grunde.

Satz 10. Aufgabe: Wenn das Absterben gleichförmig erfolgt, (oder, die jährliche Abnahme einer Zahl von Lebenden immer von gleicher Gröſse angenommen wird) den Wehrt der Leibrente 1, für das gegebene Alter a zu finden.

1) Es sey die zu dem Alter *a* gehörige *Altersergänzung* α, so nehme man den Wehrt der *Zeitrente* für so viele Jahre als diese Ergänzung groſs ist.

2) Diese *Zeitrente* durch den *Zinsfuſs* multiplicirt, und mit der *Altersergänzung* dividirt, ziehe man von 1 ab.

3) Der Rest multiplicirt mit dem *Grundcapital*, giebt den gesuchten Wehrt der Leibrente:

Es ist $\lambda\overline{a} = p - \frac{pr}{\alpha} \cdot \int \frac{1}{r^{\alpha}}$. *)

Ex. Das gegebene Alter sey 20 Jahr, so ist nach *Moivres* Voraussetzung die Altersergänzung $\alpha = 66$. Nimmt man $r = 1,04$ so ist die Zeitrente $\int \frac{1}{r^{66}}$, nach der *II*ten Tafel, 23, 1218 und $\frac{23,1218}{66} = 0,3503$, und $0,3503 \cdot 1,04 = 0,3643$. Also $(1 - 0,3643) \cdot 25 = 0,6357 \cdot 25 = 15,8925$ nach der Voraussetzung. Nach *Süſsmilchs* Tafel ist sie für dasselbe Alter 16,7905. Der Unterschied nahe an eine Jahrs Hebung.

Simpson machte hiebey eine sinnreiche Aenderung. Er nahm an statt der *Altersergänzung*, die *richtig berechnete*

*) *Zusätze* zu diesem Cap. §. 8.

rechnete mittlere Lebensdauer zweymal. Die letztere rechnete er selbst nach der Londoner Tabelle. Er nennt sonst jene doppelte Lebensdauer die *Altersergänzung*, aber eigentlich ist sie das nicht. Sie konnte nur so heissen, weil nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben, die mittlere Lebensdauer zweymal der Altersergänzung gleich ist.* Die auf *Simpsons* Art gefundene Wehrte weichen von dem genauen Wehrt selten über $\frac{1}{40}$ des Ganzen ab, doch finden sich in der von ihm beygefügten Tabelle grössere Unterschiede.*) Nach *Süssmilchs* Sterblichkeitsordnung sind die Abweichungen grösser, obgleich noch kleiner, als wenn nach *Moivres* Methode gerechnet würde.

Ex. 1. Für das Alter 70 Jahr ist die mittlere Lebensdauer 8, 18; das angenommene Complement des Alters also 16, 36. Diese Zahl für α gesetzt in dem Wehrte der Rente nach *Moivres* Hypothese, giebt $\int \frac{1}{r^{16,36}}$ 11, 83711, und $\frac{1,04}{16,36} \cdot$ 11, 83711 = 0, 75248; Folglich (1 — 0, 75248). 25 = 6, 1940 für $\lambda\, \overline{70}$. Der wahre Wehrt ist 5, 9901. Also der Unterschied 0, 2039 das ist $\frac{1}{29}$tel (genau $\frac{2}{59}$tel) des Ganzen.

Ex. 2. Es sey das gegebene Alter 20 Jahr, so ist die mittlere Lebensdauer = 35, 03. Also das Complement eines erdichteten Lebens, wie *Simpson* sich ausdrückt, eigentlich das *angenommene Complement des Alters*,

*) *Select Exercises.* p. 314.

Alters, $= 70,06$. Wird dieſs für α geſetzet, ſo iſt $\lambda\overline{a} = p - \frac{r}{\alpha} p \int \frac{1}{r^{\alpha}} = 16,3168$. Der genaue Wehrt iſt 16,7905; Unterſchied 0,4737 alſo $\frac{1}{35}$tel des Ganzen.

Wenn keine Zinſen gerechnet werden, ſo iſt der Wehrt der Leibrente einerley mit der mittlern Lebensdauer. Die mittlere Lebensdauer iſt aber ſo groſs als ſie auch heraus kommt, wenn die jährlichen Decremente einander gleich, und die Alterergänzung die doppelte Lebensdauer iſt. *) Daher werden die nach *Simpſons* Methode berechneten Leibrenten genau richtig ſeyn unter derſelben Bedingung. Dieſe findet nun zwar nicht Statt, aber man ſieht daraus doch, daſs ſie deſto genauer zutreffen, je geringer der Zinsfuſs iſt. Im Ganzen iſt dieſs nur eine Approximation, aber wie aus dem obigen Beyſpiele erhellet, eine ſehr brauchbare. Kaum kann man in Praxi die ſo berechneten Leibrenten entbehren. Daher habe ich ſie in der XXXſten Tabelle angefügt. Aber die Lebensdauer iſt jedesmal der *Süſsmilchiſchen* Tafel gemäſs genommen.

64.

Indeſſen wenn man mit einem ſolchen Grade der Richtigkeit zufrieden ſeyn will, als man hier hat: ſo giebt es noch einen andern Weg durch *die mittlere Lebensdauer* und *die Zeitrenten* ſchnell genug zu den *Leibrenten*

renten

*) *Zuſätze* zu dieſem Capitel. §. 12.

renten zu kommen. Man kann annehmen: *daſs die Leibrenten in demſelben Verhältniſs ſtehen wie die Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer.* Man ſuche dieſs Verhältniſs nur in einem Fall, und zwar für das Alter von 50 Jahren. Für dieſs Alter müſsten alſo die Leibrenten nach der Sterblichkeitstafel und dem Zinſenfuſs berechnet ſeyn. Ihr Verhältniſs zu der *Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer* kann alsdenn für allgemein bey jedem ſonſtigen Alter genommen werden.

Die mittlere Lebensdauer eines Funfzigjährigen iſt 16,95 Jahr. Wenn $r = 1,04$, ſo iſt die Zeitrente auf 16,95 = 12,1355. Die Leibrente für 50 Jahre iſt 10,7961, und 12,1355 : 10,7961 = 1000 : 890.

Dieſs Verhältniſs als allgemein angeſehen, ſo hat man für das Alter von 15 Jahren die mittlere Lebensdauer 38,56 Jahr. Die Zeitrente dafür iſt 19,4892. Nun 100 : 89 = 19,4892 : 17,3454. Der wahre Wehrt iſt 17,6104; alſo der Unterſchied 0,265 = $\frac{1}{66}$tel des Ganzen. Die gröſste Differenz iſt etwan $\frac{1}{30}$tel des ganzen Wehrts.

Ich will hier eine Tabelle von den Verhältniſſen der Zeitrenten auf die Lebensdauer, zu der Leibrente herſetzen, weil ſolche ſonſt noch brauchbar iſt.

Verglei-

Vergleichung der Leibrenten mit den Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer.

Alter.	*Dauer im Durchschnitt.*	*4 Proc. Zeitrenten-Wehrt.*	*Wehrt der Leibrenten.*	*Verhältniſs.*
15 Jahr	38,56 Jahr	19,4892	17,6104	1000: 900
20	35,03	18,6719	16,7905	1000: 899
25	31,78	17,8108	15,9870	1000: 898
30	28,57	16,8458	15,9847	1000: 895
35	25,49	15,7989	14,1175	1000: 894
40	22,64	14,7108	13,1565	1000: 894
45	19,72	13,4625	12,0108	1000: 892
50	16,95	12,1355	10,7961	1000: 890
55	14,50	10,8408	9,6394	1000: 889
60	12,07	9,4271	8,3422	1000: 885
65	9,88	8,0298	7,0527	1000: 878
70	8,18	6,8592	5,9901	1000: 875
75	6,76	4,8197	5,0578	1000: 869
80	5,53	4,8707	4,2021	1000: 863
		5 Proc.		
15	38,56	16,9514	15,2564	1000: 900
20	35,03	16,3794	14,6447	1000: 894
25	31,78	15,7565	14,0434	1000: 891
30	28,57	15,0366	13,3496	1000: 888
35	25,49	14,2318	12,5918	1000: 885
40	22,64	13,3714	11,8332	1000: 885
45	19,72	12,3567	10,8979	1000: 882
50	16,95	11,2523	9,8810	1000: 878
55	14,50	10,1391	8,8980	1000: 878
60	12,07	8,9004	7,7656	1000: 873
65	9,88	7,6481	6,6115	1000: 864
70	8,18	6,5792	5,6713	1000: 862
75	6,76	5,6158	4,8192	1000: 858
80	5,53	4,7249	4,0323	1000: 853

Alter.

Alter.	*Dauer.*	*Wehrt der Zeitrente.*	*Wehrt der Leibrente.*	*Verhältniſs.*
		a $1\frac{1}{2}$ Proc. halbjährlich.		*3 Proc. jährlich.*
15 Jahr	38,56 Jahr	22,6693	20,5921	1000: 908
20	35,03	21,4976	19,4708	1000: 906
25	31,78	20,3033	18,3801	1000: 905
30	28,57	19,0059	17,1894	1000: 904
35	25,49	17,6404	15,9402	1000: 904
40	22,64	16,2612	14,7144	1000: 905
45	19,72	14,7224	13,3023	1000: 904
50	16,95	13,1359	11,8416	1000: 901
55	14,50	11,6170	10,4703	1000: 901
60	12,07	10,0017	8,9748	1000: 897
65	9,88	8,4409	7,5218	1000: 891
70	8,18	7,1576	6,3383	1000: 886
75	6,76	6,0351	5,3119	1000: 880
79	5,69	5,1576	4,4989	1000: 871

65.

Daran fehlt viel, daſs die *Decremente* einander gleich ſind. Aber ſehr nahe kommt man, wenn man ſie vom 15ten Jahr des Alters an, als *gleichförmig ſich ändernd annimmt.* Sie können auf zwo *arithmetiſche* Reihen gebracht werden. Die erſtere davon gehe bis ans Ende des 66ſten Jahrs; *in dieſer nehmen ſie gleichförmig zu.* In der *zwoten*, von dahin bis zum höchſten Lebensjahr, *nehmen ſie gleichförmig ab.* Auf die Art entſteht eine Tabelle, bey der ſich für die Leibrente ein allgemeiner Ausdruck geben läſst, der zwey Theile enthält, und der die

die Wehrte näher giebt, als die vorbeſchriebene Rechnungsart nach *Simpſon.* Um der einfachen Leibrenten willen bedarf es keiner Hypotheſe mehr: auch nicht einmal für die Verbindungsrenten auf *zwo* Perſonen. Allein in ſolchen Fällen, wo man für drey und mehr Perſonen einige einzelne Verbindungsrenten zu haben wünſchet, ohne zugleich mehrere zu berechnen, da kommt es zu Statten, wenn man ſich der allgemeinen Formel bedienen kann, die von der gedachten leichten Abänderung der Tabelle abhängt. Dieſe Aenderung kann ganz kurz ſo angegeben werden.

Zur Grundzahl der Tabelle nehme man der Bequemlichkeit wegen 9000, als die Anfangszahl der Gebohrnen beym Alter 0.

Jahre des Alters.	*Zahl der Lebenden im Anfang des Jahrs.*	*Jährlicher Abgang.*
15 — 16	4598	38
16 — 17	4560	39

Die *Differenz der Decremente iſt* 1 bis

65 — 66 — —	1473 — —	88

Bis dahin geht die erſte arithmetiſche Progreſſion der Decremente. Dann fängt die *zwote* an, deren *Differenz* $2\frac{1}{2}$ iſt, aber *verneinend*, denn die folgenden Decremente ſind kleiner.

66 — 67	1385	85, 5
67 — 68	1299, 5	83, 0
— — —	— — —	— — —
95 — 96	21, 5	13, 0
96 — 97	7, 5	7, 5

Das

Das letzte Jahr macht eine Ausnahme, davon aber nichts abhängt, als etwan nur wenn das gegebene Alter ſehr hoch genommen wird, und dann kann jenes leicht für ſich berechnet werden.

Weiter zurück zu gehen als auf das 15te Jahr, iſt nicht, oder doch ſelten, erforderlich. Es läſst ſich auch nach derſelben Regel nicht wohl thun, oder man ändert mehr, als ichs wagen mögte, wenn *Süſsmilchs* Tafel noch als das Reſultat der Erfahrung gelten ſoll.

66.

Die *allgemeine Formel für Leibrenten* nach der ſo *veränderten Tafel* iſt folgende. Es ſey das gegebene Alter *a*, die Anfangszahl für ſelbiges wie vorher A; das erſte jährige Decrement von A, *d*. Die *Differenz der Decremente* iſt 1 in der erſten Periode. Ferner das *erſte Decrement der zwoten Periode*, oder für das Jahr 66 — 67 ſey *d'* und die Zahl der Lebenden für eben das Jahr A'. Die *Differenz der Decremente* iſt von da an — $2\frac{1}{2}$. Iſt nun *a* kleiner als 66, ſo iſt

$$\lambda\overline{a} = \int\frac{1}{r^{66-a}} - \frac{1}{A}\left((d-\tfrac{1}{2})\int\frac{66-a}{r^{66-a}}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}\int\frac{(66-a)^2}{r^{66-a}}\right) + \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{r^{66-a}}\left(A'\int\frac{1}{r^{30}}\right.$$

$$\left.-(d'+1{,}25)\int\frac{30}{r^{30}} + 1{,}25\int\frac{30^2}{r^{30}} + \frac{7{,}5}{r^{30}}\right)$$

wo auch das letzte Jahr ſchon mit genommen iſt, was ſonſt als unbeträchtlich weggelaſſen werden kann.

Iſt

Iſt a = 66, ſo fällt der erſte Theil ganz weg; ſtatt der Zahl 30 kommt die *Alterſergänzung 96 — a*, und es wird der geſuchte Wehrt

$$= \frac{1}{A} \left(A \int \frac{1}{r^{96-a}} - (d' + 1,25) \int \frac{96-a}{r^{96-a}} \right.$$

$$\left. + 1,25 \int \frac{96-a}{r^{96-a}} + \frac{7,5}{r^{96-a}} \right).$$

Nach dieſen Formeln iſt ſehr leicht zu rechnen, wenn man Tabellen von den Summen $\int \frac{n}{r^n}$, und $\int \frac{n^2}{r^n}$ hat. Sonſt kann man ſolche auch aus der Zeitrententabelle ſuchen nach den Formeln, die in den *Zuſätzen zum erſten Capitel* *) vorkommen. Solche Summentabellen braucht man bey manchen Gelegenheiten. Ich hatte ſie bis auf die für die 6te Potenz berechnet, allein um die Zahl der Tabellen nicht zu ſehr zu vergröſsern, habe ich ſie zurückgelaſſen.

Die einfachere *Formel für die mittlere Lebensdauer* iſt

$$66 - a - \frac{1}{A} \left((d - \tfrac{1}{2}) \int \overline{66 - a} + \tfrac{1}{2} \int \overline{(66 - a)^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{A} \left(30\ A' - (85,25 + 1,25) \int \overline{30} \right.$$

$$\left. + 1,25 \int \overline{30^2} + 7\tfrac{1}{2} \right) + \tfrac{1}{2}.$$

Die Leibrenten für a = 20 Jahr, und für 70 Jahr kommen den völlig genauen Wehrten näher als nach *Simpſons* Methode.

Die

*) *Zuſätze* zu Cap. I. §. 14. und 16.

H

Die Beweise für die Richtigkeit der Formeln stehen in den *Zusätzen zu diesem Capitel,* *) wo auch noch einige allgemeine Betrachtungen über die Mortalitätstafeln beygebracht sind.

67.

Bey Berechnung der *jährlichen* Leibrenten wird angenommen, daſs der *jährliche Abgang jedesmal im Anfang des Jahrs erfolge.* Das heiſst, für den Theil des Jahrs, welches der Rentenier nicht ganz durchlebet, wird nichts gerechnet. Daher ist die Ausgabe $\frac{\overset{x}{-}A}{r^x}$ für das höchste Lebensjahr = o, weil alsdenn $\overset{x}{-}A = o$ ist.

Satz 11. Soll auch die Zwischenzeit gerechnet und den Erben des Renteniers dafür ein proportioneller Theil der jährlichen Rente ausgezahlet werden, sobald solche eine bestimmte Gröſse hat, (ein viertheil oder halbes Jahr ist,) *so muſs zu dem Wehrt der jährlichen Leibrente noch etwas hinzugesetzet werden,* was nach den verschiedenen Voraussetzungen, von verschiedener Gröſse ist, aber überhaupt nicht viel ausmacht.

Wenn *halbe* Jahre gerechnet werden, aber die Zahlung nur am Ende jeden Jahrs geschieht, so beträgt solches $\frac{1}{4}$tel *des*, aus der XXIsten Tabelle zu nehmenden, *Wehrts einer beym Tode der gegebenen Person zahlbaren Summe, auf Ein Jahr zurück discontirt.*

Werden

*) §. 9. 10. 11.

Werden *Vierteljahre* gerechnet, ſo macht es $\frac{7}{16}$tel der letzterwähnten Summe aus, oder $\frac{7}{16}\frac{T}{r}$ §. 59.

Mehr hievon in den *Zuſätzen.* *)

Ex. Wenn das Alter der Perſon 40 Jahr iſt, ſo iſt $T = 1 - \frac{\lambda \overline{a}}{p} = 0,4737$, (Tab. XXI.) und $\frac{1}{r}\left(1 - \frac{\lambda \overline{a}}{p}\right) = 0,4555$. Alſo iſt zu dem Wehrt der Leibrente 1 hinzuzulegen $\frac{1}{4}$. 0,4555 = 0,11387.

68.

Satz 12. Wenn zu dem baaren Wehrt einer Leibrente, welche jährlich bezahlet wird, noch ein Viertheil einer Jahrsrente addirt wird, ſo iſt dieſs ganz nahe dem Wehrt einer Leibrente gleich, welche halbjährlich zur Hälfte gezahlet wird, vorausgeſetzet, daſs die *Hälfte der Jahreszinſen* für die *halbjährlichen Zinſen* genommen werden.

Satz 13. Wenn man zu dem Wehrt der jährlichen Leibrente $\frac{3}{8}$tel *einer Jahrshebung hinzuleget, ſo hat man den Wehrt der Leibrente in vierteljährlichen Zahlungen, unter derſelbigen Bedingung, ganz nahe.* Die obige Art die Zinſen zu berechnen vorausgeſetzt.

Der Beweis dieſer Sätze ſteht in den *Zuſätzen.* **) Wenn halbjährlich bezahlet wird, ſo verlieret erſtlich

*) §. 13.

**) *Zuſätze* zu Cap. II. §. 14.

der Entrepreneur etwas an den Zinsen, weil jedes Jahr die Hälfte der Rente um ein halbes Jahr früher zahlbar wird; und zweytens so ist es $\frac{1}{2}$ wahrscheinlich, daſs noch ein halbjährlicher Termin mehr zahlbar werde, als bey jährlichen Zahlungen. Dieſs beydes zusammen macht nahe $\frac{1}{4}$tel einer jährlichen Einnahme; und $\frac{3}{8}$tel desselben, wenn vierteljährlich $\frac{1}{4}$tel Rente gezahlt wird.

Satz 14. Ist die Leibrente in augenblicklichen Terminen zahlbar, so ist zu dem Wehrt der jährlichen, noch die Hälfte einer Jahreshebung zuzulegen, nach der gewöhnlichen Art die Zinsen für kleinere als Jahrstermine zu rechnen. Das ist; $\lambda\overline{a} + \frac{1}{2} =$ dem baaren Wehrt der augenblicklichen Rente. *)

Anmerk. Der Wehrt eines *Landgutes*, oder einer andern Sache, welche täglich oder gar stündlich genutzet wird, kann darnach beurtheilet werden.

69.

Satz 15. Aufgabe. Aus der Leibrente für ein gegebenes Alter a, die Leibrente für ein Alter, das um ein Jahr gröſser ist, (a+1), zu finden.

„1) Man multiplicire die gegebene Leibrente mit „dem Zinsenfuſs."

„2) Man

*) Siehe *Zusätze* zu diesem Cap. §. 16. 17. wo auch der Unterschied gewiesen ist, wenn der Jahrszinsfuſs durchaus beybehalten wird.

„2) Man multiplicire dieſen Wehrt, $r\,\lambda\overline{a}$ durch das „*Decrement des erſten Jahrs*, und dividire das Product „mit der Zahl der Lebenden von nächſtfolgendem Jahre „$(a+1)$, das iſt man mache

$$\frac{\Delta\, A}{\overset{1}{-}A}\cdot\; r\,\lambda\overline{a}.$$

„3) Man addire das Gefundene aus n. 1 und 2, und „ziehe davon die Einheit ab, ſo hat man den geſuchten „Wehrt." Es iſt

$$\left(1+\frac{\Delta\, A}{\overset{1}{-}A}\right) r\,\lambda\overline{a} - 1 = \lambda\overline{(a+1)}$$

Beweis. Die Leibrente für das Alter *a* iſt

$$= \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r}+\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}+\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)(\S.\ 40.)$$

und die Leibrente für $(a+1)$ oder $\lambda\overline{(a+1)}$ iſt

$$= \frac{1}{\overset{1}{-}A}\left(\frac{\overset{2}{-}A}{r}+\frac{\overset{3}{-}A}{r^2}++\frac{\overset{x}{-}A}{r^{x-1}}\right).$$

$$\text{Folglich}\ \frac{\lambda\overline{a+1}}{r} = \frac{1}{\overset{1}{-}A}\left(\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}+\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$$

$$\text{und}\ \frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\ \frac{\lambda\overline{a+1}}{r} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}+\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$$

$= \lambda\overline{a} - \dfrac{\overset{1}{-}A}{A.r}.$ Daraus wird $\lambda\overline{a+1} =$

$$\frac{Ar\,\lambda\overline{a}}{\overset{1}{-}A} - 1 = \frac{(\overset{1}{-}A+\Delta\,A)\,r\,\lambda\overline{a}}{\overset{1}{-}A} - 1 = \left(1+\frac{\Delta A}{\overset{1}{-}A}\right) r\,\lambda\overline{a} - 1.$$

Ex. Die Leibrente für eine zwanzigjährige Person ist $= 16,7905 = \lambda \overline{a}$ auf 4 Proc. gerechnet, oder für $r = 1,04$. Also ist $r. \lambda \overline{a} = 17,46212$. Nach *Süssmilchs* Tabelle ist der Abgang im 21sten Jahr 5, und die Zahl der Lebenden am Ende des 21sten ist 486. Folglich

$$\frac{5 \cdot 17,46212}{486} = 0,17928$$

$$\text{dazu} \quad 17,46212 - 1 = 16,46212$$

$$\text{macht} \quad 16,64140$$

70.

Anmerk. Gemeiniglich berechnet man nur die Leibrenten von 5 zu 5 Jahren, und *sucht* dann die *dazwischenfallende durch die Differenzen*, als *arithmetisch proportionelle Grössen.* Z. B.

die Leibrente fur 20 Jahre ist = 16, 7905
die - - - für 25 - - - ist = 15, 9870

Differenz = 0, 8035
5) 0, 1607
subtrahirt von - - 16, 7905

bleibt Leibrente für 21 Jahr = 16, 6298

Diess letzte ist doch um 0,012 zu klein.

Zusatz 1. Es ist jedesmal 1 grösser als $\left(\frac{r \Delta A}{A} + r - 1\right) \lambda \overline{a}$, weil $\lambda \overline{a} - \lambda \overline{(a+1)}$ $= 1 - \left(\frac{r \Delta A}{A} + r - 1\right) \lambda \overline{a}$ ist, und $\lambda \overline{a} > \lambda \overline{(a+1)}$

Daher

Daher muſs in jedem Fall auch $\lambda \overline{a}$ kleiner ſeyn als $\frac{1}{r.\frac{\Delta A}{A} + r - 1}$, wie groſs oder klein auch der Zins-fuſs genommen werde.

71.

Zuſatz 2. Zugleich iſt klar, wie ***aus einer gegebenen Leibrente, die für Ein Jahr jünger gefunden werde.*** Nämlich

„1) man addire zu dem Wehrt der gegebenen Leib-„rente 1 noch die Einheit.

„2) Dieſe Summe werde auf Ein Jahr zurück dis-„contirt.

„3) Man dividire das Decrement für das Jahr, wel-„ches nächſt vor dem, wozu die gegebene Leibrente „gehört, in der Tabelle ſteht, durch die Zahl der Le-„benden für eben dasſelbige, und ziehe dieſen Quotien-„ten von der Einheit ab.

„4) Mit dieſem Reſt wird die vorher nach n. 1. dis-„contirte Summe multiplicirt.“

Es iſt $\lambda(\overline{a+1}) = \frac{A}{\overset{1}{-}A}\, r.\, \lambda\overline{a} - 1.$

Folglich $\left(\frac{1 + \lambda\overline{a+1}}{r}\right)\frac{\overset{1}{-}A}{A} = \lambda\overline{a} =$

$$\frac{(1 + \lambda\overline{a+1})}{r}\left(1 - \frac{\Delta A}{A}\right).$$

72.

Zusatz 3. Will man aus der Leibrente $\lambda\overline{a}$ die Leibrente für $(a+2)$ unmittelbar haben, so ist

$$\lambda\overline{a}-\frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r}+\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}\right)=\frac{1}{A}\left(\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}+\frac{\overset{4}{-}A}{r^4}++\right)=\frac{\overset{2}{-}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{(a+2)}}{r^2}.$$

Folglich $\lambda\overline{a+2}=\frac{r^2A}{\overset{2}{-}A}\cdot\lambda\overline{a}-\frac{\left(r\overset{1}{-}A+\overset{2}{-}A\right)}{\overset{2}{-}A}$

$$=\frac{A.r^2.\lambda\overline{a}-r\Delta\overset{1}{-}A}{\overset{2}{-}A}-(r+1).$$

Für eine um drey Jahre ältere Person, oder für $(a+3)$ ist

$$\lambda\overline{a+3}=\frac{A}{\overset{3}{-}A}\cdot r^3\lambda\overline{a}-\left(\frac{(r^2+r)\Delta\overset{2}{-}A+r^2\Delta\overset{1}{-}A}{\overset{3}{-}A}\right)-(r^2+r+1)$$

Für $\overline{a+4}$ ist

$$\lambda(a+4)=\frac{A}{\overset{4}{-}A}.r^4.\lambda a-\left(\frac{(r^3+r^2+r)\Delta\overset{3}{-}A+(r^3+r^2)\Delta\overset{2}{-}A+r^3\Delta\overset{1}{-}A}{\overset{4}{-}A}\right)$$
$$-(r^3+r^2+r+1).$$

73.

Methoden, Leibrenten nach einem Zinsfuſs in solche nach einem andern zu verändern.

Soll bey einem Leibrenteninstitut ein gewisser Zinsfuſs durchgängig zum Grunde gelegt werden, so erfordert es die Genauigkeit, daſs man auch nach diesem Fuſs die Leibrenten genau berechne. Aber oftmals werden nur von einzelnen Leibrenten die Wehrte für einen neuen

Zinsfuſs

Zinsfuſs erfordert, um eine Vergleichung anzuſtellen, der die gröſste Schärfe fehlen kann. Für dieſe Fälle gehören die folgenden Methoden, die ſonſt an ſich nur Approximationen ſind.

Hat man die *Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer nach dem neuern Zinsfuſs* noch nicht, ſo ſuche man ſolche vorher aus andern (nach Cap. I. §. 14.). Hat man dieſe, ſo kann man auf eine der folgenden Arten verfahren.

1) Man bediene ſich des Verhältniſſes der *Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer* zu den *Leibrenten*, dergleichen die obige Tabelle §. 64. giebt, bey ſolchen, die nach *Süſsmilchs* Tafel berechnet ſind.

Es ſey die gegebene Leibrente nach irgend einer Sterblichkeitstafel berechnet, zu einem gegebenen Fuſs; man ſuche ihr Verhältniſs zur Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer aus der nämlichen Tafel, nach demſelbigen Zinsfuſs.

Dann ſuche man die letztere Zeitrente nach dem zweyten Zinsfuſs.

Nun nehme man das Verhältniſs der letzten Zeitrente zu der ihr zugehörigen Leibrente, ſo groſs wie bey dem erſten, ſo erhält man den Wehrt der Leibrente nach dem letztern durch die Regel de Tri.

Z. B. Es ſey die Leibrente für das Alter von 35 Jahren, nach dem Zinsfuſs r = 1,04 gegeben, 14, 1175,

ſo iſt die mittlere Lebensdauer für jenes Alter 25,49 Jahr, und die Zeitrente auf ſo viele Jahre nach demſelbigen Zinsfuſs 15,7989. Nach 5 Procent gerechnet, iſt die Zeitrente 14,2318. Man ſage alſo, wie die Zeitrente nach 4 Proc. zur Zeitrente nach 5 Proc., ſo die Leibrente nach 4 Proc. zur Leibrente nach 5 Proc.

15,7989 : 14,2318 = 14,1175 : 12,717. Der genaue Wehrt der letztern iſt 12,592. Der Unterſchied alſo 0,125.

Zuſatz 1. Hat man ſchon irgend eine Leibrente nach dem neuen Zinsfuſs für ein gewiſſes Alter genau berechnet, ſo kann man ihr Verhältniſs zu der ihr zugehörigen Zeitrente nach demſelben Fuſs, mit dem Verhältniſſe dieſer beyden, nach dem gegebenen Zinsfuſs vergleichen und daraus ein näher zutreffendes Verhältniſs zwiſchen der *geſuchten Leibrente* und *der ihr zugehörigen Zeitrente* finden.

Zuſatz 2. Sind Leibrenten nach zwey verſchiedenen Zinsfüſsen berechnet, und für dieſe alſo auch ihre Verhältniſſe zu den Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer, z. B. nach 4 und 5 Procent, und man ſucht die Leibrente für einen neuen Zinsfuſs 3 Procent, der ſo viel von einem der erſtern verſchieden iſt, als dieſe unter ſich es ſind; ſo kann man annehmen, „*die Unterſchiede in* „*dem Verhältniſs der Leibrenten zu den Zeitrenten auf* „*die mittlere Lebensdauer, bey verſchiedenen Zinsfüſsen,* „*ſind gleich groſs, wenn die Unterſchiede der Procente*

„*gleich*

„*gleich ſind;*" und dieſer Unterſchied iſt zu dem Verhältniſs zu addiren, wo der Zinsfuſs kleiner iſt. Dieſs Verfahren giebt die Wehrte genauer.

Z. B. das Verhältniſs der Leibrente für das Alter von 50 Jahren *zur Zeitrente auf die mittlere Lebensdauer*, iſt nach dem 5 Procentfuſs 0,878; und nach dem 4 Procentfuſs 0,890. Der Unterſchied iſt 0,012. Dieſs addirt zu dem letzten Verhältniſs giebt 0,902 für den 3 Procentfuſs. Dieſs iſt nur um 0,001 von dem genauen Verhältniſs unterſchieden. (Man ſehe die obige Tabelle §. 64.) Darnach alſo aus der Zeitrente nach 3 Procent die Leibrente berechnet, giebt ihren Wehrt bis auf $\frac{1}{1000}$tel des Ganzen.

74.

2) Man berechne aus der gegebenen *Zeitrente* den Wehrt der geſuchten *Leibrente* nach *Simpſons Methode*, §. 63. das iſt, nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben aus der mittlern Lebensdauer. Auf dieſelbige Art habe man auch die Leibrente berechnet nach dem vorigen Zinsfuſs, nach welchem man die *genauen* Wehrte der Leibrenten ſchon hat. Es ſey der *genaue Wehrt* der *Leibrente* nach dem gegebenen Zinsfuſs L, ihr *hypothetiſcher Wehrt* M; ferner der *hypothetiſche Wehrt* nach dem *neuen* Zinsfuſs M'; man ſuche den genauen Wehrt zu dem neuen Zinsfuſs L'.

Alsdenn nehme man an, „*daſs die Differenz zwi-* „*ſchen den hypothetiſchen Wehrten*, M — M' *ſich ver-* „*halte*

„*halte zu der Differenz der genauen Wehrte*, L — L′, „*wie der hypothetische Wehrt zu dem genauen,*" das ist wie M : L, so bekommt man die *Differenz der genauen Wehrte*, die zu *addiren* oder zu *subtrahiren* ist, je nachdem der neue Zinsfuſs *kleiner* oder *gröſser* ist, als der gegebene.

Oder auch, man nehme an, *daſs die hypothetischen Wehrte sich verhalten wie die wahren.*

Ex. Die richtige Leibrente für 40 Jahr nach *Süſsmilchs* Tafel und 4 Proc. ist 13,1565 = L. Der hypothetische Wehrt derselben ist $25.\left(1 - \frac{1,04}{45,28}\int\frac{1}{1^{45,28}}\right)$, weil die mittlere Lebensdauer 22,64 ist. Nun ist $\int\frac{1}{1^{45,28}} = 20,7661$. Daher wird

$$25.\left(1 - \frac{1.04}{45,28}. \quad 20,7661\right) = 13,0760.$$

Den 5 Procentfuſs genommen ist der hypothetische Wehrt $20\left(1 - \frac{1.05}{45,28}. \; 17,80387\right) = 11,7426$. Die Differenz beyder = 1,3336. Diese vermindert in dem Verhältniſs 13,08 : 13,16 wird 1,3255, und dann abgezogen von 13,1565, läſst zurück 11,8310. Der wahre Wehrt ist 11,8330, also die Abweichung nur 0,002 einer Jahrshebung.

Da der *hypothetische* Wehrt der Leibrente nach dem ersten Zinsfuſs von dem *genauen* nach demselbigen sehr wenig verschieden ist, so kann die Differenz der beyden hypothe-

hypothetischen Wehrte gerade zu für die Differenz der beyden genauen Wehrte genommen werden. Diess letztere ist die Regel, die D. *Price* giebt, (*in der vierten Ausgabe seiner Observations.* *) Er versichert, dass die Abweichung des so gefundenen Wehrts, von dem völlig richtigen zuweilen gar nichts, überhaupt nur $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{30}$ einer Jahrshebung betrage. Diese letzte Methode hat also von dieser Seite Vorzüge vor der ersten vorhergehenden in §. 73. allein sie ist auch so kurz und leicht nicht als jene.

Anmerkung. Bey diesen und ähnlichen practischen Arbeiten wird es nöthig, die Leibrenten nach der erwähnten Hypothese berechnet, in der XXX[sten] Tabelle, zur Hand zu haben.

Zweyter Abschnitt.

Von veränderlichen Leibrenten.

75.

Satz 16. Wenn die Leibrente in dem geometrischen Verhältniss wachsen soll, in welchem ein Capital durch seine Zinsen und Zinsen von Zinsen aufläuft, so ist der baare Wehrt einer Leibrente, die im ersten Jahre 1 ist, so gross als die mittlere Lebensdauer der Person die sie empfangen soll, weniger $\frac{1}{2}$, auf Ein Jahr zurück discontirt.

Beweis.

*) Volum. II. p. 155.

Beweis. Diefs erhellet unmittelbar aus dem obigen Ausdruck für die immer gleich bleibende Leibrente 1. Es ift nämlich $\lambda \overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$.

Wenn nun, ftatt jedes Jahr 1 zu zahlen, im erften Jahr 1; im zweyten r; im dritten r^2; im *xten* r^{x-1} zu zahlen ift, fo ändert fich jener Ausdruck in folgenden

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}Ar}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}Ar^2}{r^3} + + \frac{\overset{x}{-}Ar^{x-1}}{r^x}\right) = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + \overset{x}{-}A}{r}\right)$$

Nun ift $\frac{1}{A}\left(\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + + \overset{x}{-}A\right)$ die künftige mittlere Lebensdauer in den Tabellen weniger $\frac{1}{2}$. §. 50. das ift, die nicht ergänzte, blos auf ganze Jahre berechnete mittlere Lebensdauer. Diefe mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt, giebt alfo den Wehrt der nach einer geometrifchen Progreffion fteigenden Leibrente, wovon der Exponent der Zinsfufs ift.

Ex. Bey einer 21 jährigen Perfon ift die mittlere Lebensdauer 34,39 Jahr, davon fubtrahirt 0,5, giebt 33,89. Fängt die Leibrente mit $\frac{1}{2}$ an, und fteigt jährlich nach dem Verhältnifs des Zinsfufses, fo ift ihr Wehrt 16,945 mit 0,961 multiplicirt, das ift 16,2841. Der Wehrt einer *unveränderlichen* Leibrente 1 ift 16,6417 beynahe jener gleich.

76.

Zufatz. Wenn das Verhältnifs, in welchem die Rente jährlich fteigen oder fallen foll, fo grofs ift, als das Verhält-

Verhältniſs des Zinsfuſses (*r*), wornach die Renten berechnet werden, zu einem andern Zinsfuſs *p*, oder (n für den Exponenten der Veränderung geſetzt, wie n : 1 = r : p iſt) ſo *hat man den baaren Wehrt der veränderlichen Leibrente, wenn man die für den Zinsfuſs r gegebene Rente in eine andere für den Zinsfuſs p umändert, und dieſe letztere wiederum durch den Exponenten n dividirt.*

Man bezeichne die *veränderliche* Rente für das Alter $\overline{a}$, durch $L\,\overline{a}$, ſo iſt

$$L\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A.\,n}{r^2} + + \frac{\overset{x}{-}A.\,n^{x-1}}{r^x}\right),$$

und weil n = r : p, ſo iſt n. $L\,\overline{a}$

$$= \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A}{p} + \frac{\overset{2}{-}A}{p^2} + + \frac{\overset{x}{-}A}{p^x}\right)$$

das iſt, gleich dem Wehrt einer Leibrente nach dem Zinsfuſs *p*.

Noch etwas hievon in den *Zuſätzen zu dieſem Capitel.* *)

77.

Satz 17. Wenn die Rente im erſten Jahr 1 iſt, im zweyten 2, im dritten 3, und ſo ferner nach der Ordnung der natürlichen Zahlen ſteiget, ſo wird ihr baarer Wehrt auf folgende Art gefunden.

1) Man ſuche die Reihe $\frac{\Delta A}{r} + \Delta\overset{1}{-}A.\,\frac{2}{r^2}$

$$+ \Delta\overset{2}{-}A.\,\frac{3}{r^3} + + \Delta\overset{x-1}{-}A.\,\frac{x}{r^x}. = \int\Delta\overset{x-1}{-}A.\,\frac{x}{r^x}.$$

2) Dieſe

*) §. 19 u. f. f.

2) Diese Reihe dividire man mit A, und multiplicire sie mit dem Zinsfuss *r*. Es sey das herauskommende r S. Diess ist hier das Aehnliche von dem, was oben §. 59. bey der unveränderlichen Leibrente der Wehrt der Erbschaft war.

3) Man ziehe rS, von dem Wehrt der unveränderlichen Leibrente ab, und

4) addire dazu 1. und dann

5) multiplicire man diess mit dem *Grundcapital;* so hat man den gesuchten Wehrt.

Der Wehrt der auf die vorbestimmte Art wachsenden Leibrente sey $L\overline{a}$ für das Alter $\overline{a}$, so ist

$$L\overline{a} = \frac{\lambda\overline{a} + 1 - rS}{r - 1}. \text{ *)}$$

78.

Anmerkung 1. Der Wehrt solcher nach der natürlichen Ordnung der Zahlen wachsenden Leibrenten, kann nahe genug, mittelst der unveränderlichen Leibrenten und der *Verbindungswehrte für zwo Personen* gefunden werden, wie auch wiederum die letzten Verbindungswehrte aus jenen. Allein es kann aus andern Gründen wichtig werden, jene ersten für sich genau zu haben. Eine sehr leichte Art, mittelst einer allgemeinen Hülfstabelle, sie zu erhalten, soll unten (§. 88.) gezeiget werden.

79. *An-*

*) Der Beweis in den *Zusätzen zu diesem Capitel.* §. 20.

79.

Anmerkung 2. Nach der Hypothese des gleichförmigen Sterbens ist die Reihe $S = \int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a}$ *) wo x die *Altersergänzung* ist, wofür aber nach *Simpsons* Verfahren die doppelte mittlere Lebensdauer zu nehmen ist.

Daraus wird es leicht, den Wehrt von $L \overline{a}$ zu berechnen, und wenn es nur um einen allgemeinen Ueberschlag zu thun ist, kann man ihn so nehmen.

Ex. Für $a = 20$ Jahre ist $x = 2 \cdot 35{,}03 = 70{,}06$, und nach dem Zinsfuss $r = 1{,}04$ ist $\lambda \overline{a} = 16{,}3168$, nämlich ihren Wehrt nach eben der Hypothese genommen; die mittlere Lebensdauer nach *Süssmilchs* Tafel berechnet. Ferner $\int \frac{1}{r^{70,06}} = 23{,}39807$. Daraus wird $\int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a} = 7{,}0813$, und $r\left(\int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a}\right) = 7{,}3646$; auch $1 + \lambda \overline{a} - r\left(\int \frac{1}{r^x} - \lambda \overline{a}\right) = 9{,}9522$, und also $L \overline{a} = 25 \cdot 9{,}9522 = 248{,}805$ das ist 15 mal die beständige Leibrente 1.

Soll also die steigende Leibrente nicht mehr kosten als eine unveränderliche, so muss jene mit $\frac{1}{15}$ anfangen. So würde eine Person von 20 Jahren, wann sie 35 Jahr alt geworden ist, erst zur jährlichen Hebung von 1 gelangen.

80. *An-*

*) Siehe *Zusätze* zu diesem Cap. §. 27.

80.

Anmerkung 3. Nach derſelben Vorausſetzung vom *gleichförmigen Abſterben* iſt die ſo *wachſende Leibrente* auch ſo groſs als das Product aus dem *Grundcapital* in den Reſt, der übrig bleibet, wenn man von der mit $r+1$ multiplicirten *beſtändigen* Leibrente die *Zeitrente* auf ſo viel Jahre als die Alterergänzung weniger 1 iſt, abziehet. Es ſey a das gegebene Alter, α die *Alterergänzung*, ſo

iſt $L\overline{a} = p\left((1+r)\,\lambda\overline{a} - p\left(1 - \frac{1}{r^{\alpha-1}}\right)\right)$ *)

Daraus iſt ſie leicht zu berechnen.

Ex. Für $a = 70$ Jahre iſt $\alpha = 16,36$. Die Leibrente $\lambda\overline{70} = 6,2808$. Die Jahrsrente für 15, 36 Jahre iſt 11, 3106, und 2, 04. 6, 2808 = 12, 8128. Folglich $L\overline{a} = 25 \cdot (12,8128 - 11,3106) = 25 \cdot 1,5022 = 37,555$, das iſt nahe an $6.\ \lambda\overline{a}$. Alſo iſt eine beſtändige Rente 1, und eine ſolche ſteigende, die mit $\frac{1}{6}$tel anfängt, für das Alter von 70 Jahren von gleichem Wehrt.

81.

Zuſatz. Soll die Leibrente im erſten Jahr 1, im nächſtfolgenden $\frac{1}{n}$tel *mehr ſeyn, und ſo ferner mit jedem Jahr um* $\frac{1}{n}$tel *anwachſen, ſo findet man ihren baaren Wehrt auf folgende Art:*

1) Man ſucht den Wehrt der *beſtändigen* Leibrente 1, oder $\lambda\overline{a}$.

2) Man

*) *Zuſätze* zu dieſem Capit. §. 22.

2) Man ſucht den Wehrt einer mit $\frac{1}{n}$ tel anfangenden, und in der Ordnung der natürlichen Zahlen ſteigenden Leibrente für ein Alter um 1 Jahr höher, und discontirt dieſe letztere auf 1 Jahr. Oder man ſuchet $\frac{L\overline{a+1}}{nr}$.

3) Von $\frac{L\overline{a+1}}{nr}$ zieht man ab $\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{L\overline{a+1}}{nr}$, das iſt, $\frac{L\overline{a+1}}{nr}$ durch die *Sterblichkeit* des erſten Jahrs multiplicirt.

4) Es werde die letztgefundene Differenz zu dem Wehrt der Leibrente $\lambda\overline{a}$ addirt, ſo bekommt man den geſuchten Wehrt; oder

$\lambda\overline{a} + \frac{L\overline{a+1}}{nr}\left(1 - \frac{\Delta A}{A}\right)$ = *dem Wehrt der angenommenen Leibrente.* *)

Ex. 1. Wenn $a = 19$, ſo iſt die mittlere Lebensdauer 35,75, und $x = 71,5$. Folglich $\lambda\overline{a}$, die beſtändige Leibrente 1, nach der Vorausſetzung des gleichförmigen Abſterbens = 16, 4575. Die Leibrente für $a = 20$, die mit $\frac{1}{n}$ tel anfängt und nach der Ordnung der natürlichen Zahlen ſteiget, iſt $\frac{248,05}{n}$ (§. 77.) Es ſey $n = 10$, ſo iſt $\frac{L\overline{20}}{n} = 24,805$, $\frac{L\overline{a}}{nr} = 23,85$, und $1 - \frac{\Delta A}{A} = 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{71,5} = 0,96$.

Folglich der geſuchte Wehrt des mit 1 anfangenden und

*) *Zuſätze* zu dieſem Capitel. §. 25.

auf die im Satz bestimmte Art jährlich um $\frac{1}{10}$tel steigenden Rente, $V = 16,4575 + 23,85 \cdot 0,96 = 39,4399$.

Ex. 2. Für $a = 69$ ist $\lambda \overline{a} = 6,3732$ nach *Simpsons* Art berechnet. Nun ist auch $\frac{L\overline{a+1}}{n}$ oder $\frac{L\overline{70}}{n} = 37,555$ §. 80, und $\frac{L\overline{70}}{nr} = 36,1019$, und weil $x = 16,94$, so ist $1 - \frac{1}{x} = 0,941$. Folglich der gesuchte Wehrt $V = 6,3732 + \frac{36,10819 \cdot 0,941}{n}$ $= 6,3732 + \frac{33,9719}{n}$.

Wenn $n = 5$, so ist $V = 6,3732 + 6,7944 = 13,1676$.

Dritter Abschnitt.

Von aufgeschobenen, aufhörenden und aufgesparten Leibrenten.

82.

Erklärungen. Man kann bedingen, dass eine Leibrente nicht so gleich, sondern nach einer bestimmten Anzahl von Jahren erst lauffend werde. Diess sind die *aufgeschobenen* Leibrenten bey der *Hamburger allgemeinen Versorgungsanstalt.* Es versteht sich, dass wenn der Rentenier stirbt, ehe diese Jahre abgelauffen sind, gar nichts gezahlt werde, und dass übrigens die Leibrente nur auf Lebenszeit des Renteniers gehe.

Wenn

Wenn die Leibrente, die sogleich anfängt, nur auf eine bestimmte Zahl von Jahren gezahlet werden soll, so gehört sie zu den *aufhörenden.* Dergleichen sind die Renten, die man für *Waysen* kauft, und die mit einem bestimmten Alter der Person, die sie geniesst, aufhören.

Eine Leibrente kann so bestimmt werden, dass sie beydes zugleich sey.

Wenn von einer Leibrente einige zahlbare Termine nicht ausgezahlt, sondern bey der Casse bleiben, und mit ihren Zinsen, und Zinsen von Zinsen, zum Vortheil des Renteniers aufbewahrt werden, so ist das eine in so ferne *aufgesparte Leibrente.* Die Zahl der Jahre, in welche sie aufgespart werden soll, kann zum voraus bestimmt seyn; sie kann aber auch *unbestimmt* bleiben, und jedesmal vom Willkühr des Empfängers abhangen. Man nennt sie in dem letzten Fall bey dem Hamburger Institut eine ***ruhende Leibrente***, insonderheit wenn sie in den ersten Jahren gesammlet wird.

Das was der Rentenier durch das Aufsparen seiner Leibrente sammlet, kann nachher auf einmal ausbezahlet werden, aber auch zur Vergrösserung seiner nachherigen Leibrente gebraucht werden. In dem letzten Fall *wächset die Rente durch die Ruhe.* Diese durch die Ruhe sich vergrössernde Leibrente wird eine *wachsende Leibrente* genannt.

83.

Satz 18. Der baare Wehrt einer auf eine bestimmte Zahl von Jahren (n) aufgeschobenen Leibrente, wird aus der Leibrententabelle auf folgende Art berechnet.

1) Wenn das Alter der Person a ist, so suche man die Leibrente für das Alter $a+n$, und discontire solche auf n Jahre zurück.

2) Diese Grösse vermindere man in dem Verhältniss der in dem Alter $a+n$ Lebenden zu denen im Alter a, nach den Tabellen, das ist, man multiplicire sie durch $\frac{\overset{n}{-}A}{A}$ oder durch die Wahrscheinlichkeit des Lebens nach n Jahren. §. 39.

Wenn die auf n Jahre aufgeschobene Leibrente $\lambda\,\overline{a}$, bezeichnet wird durch ${}^{\overset{n}{-}}\lambda\,\overline{a}$ und die übrigen sonst schon gebrauchten Zeichen behalten werden, so ist

$$ {}^{\overset{n}{-}}\lambda\,\overline{a} = \frac{\overset{n}{-}A}{A} \cdot \frac{\lambda\,\overline{a+n}}{r^n}. $$

Beweis. Aus dem allgemeinen Ausdruck für die so gleich lauffende Leibrente wird diess leicht eingesehen. Es ist nämlich

$$ \lambda\,\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + + \frac{\overset{n}{-}A}{r^n} + \frac{\overset{n+1}{-}A}{r^{n+1}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right). $$

Weil nun in den ersten n Jahren nichts ausgezahlet werden soll, so sind alle erste n Glieder dieser Reihe nichts.

Folglich ist ${}^{\overset{n}{-}}\lambda\,\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{n+1}{-}A}{r^{n+1}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$.

Es

Es ist aber eine Leibrente für das Alter $a+n$, oder

$$\lambda\overline{a+n} = \frac{1}{\overset{n}{-}A}\left(\frac{\overset{n+1}{-}A}{r} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x-n}}\right).$$

Daher $\dfrac{\lambda\overline{a+n}}{r^n} = \dfrac{1}{\overset{n}{-}A}\left(\dfrac{\overset{n+1}{-}A}{r^{n+1}} + + \dfrac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$

und $\dfrac{\overset{n}{-}A}{A} \cdot \dfrac{\lambda\overline{a+n}}{r^n} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\overset{n+1}{-}A}{r^{n+1}} + + \dfrac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$

$= \overset{-n}{-}\lambda\overline{a}.$

84.

Zusatz 1. Weil $\overset{n}{-}A = A - \left(A - \overset{n}{-}A\right)$ so ist

auch $\overset{-n}{-}\lambda\overline{a} = \dfrac{\lambda\overline{a+n}}{r^n}\left(1 - \dfrac{(A - \overset{n}{-}A)}{A}\right).$

Nach dieser Formel rechnet man mit kleinern Zahlen.

Ex. Eine zwanzigjährige Person kaufe sich eine Leibrente, welche sie erst nach 16 Jahren geniessen will, das ist, welche 16 Jahre aufgeschoben werden soll, wie groß ist ihr baarer Wehrt?

Hier ist $a = 20$, $n = 16$.

$\lambda\overline{a+n} = \lambda\overline{36} = 13{,}9379$ nach *Süßmilchs* Tabelle und dem 4 Proc. Zinsfuß.

$A = 491$, $\overset{n}{-}A = 402$, also $\dfrac{A - \overset{n}{-}A}{A} = \dfrac{89}{491}$

$= 0{,}1812$. Ferner $\dfrac{1}{r^{16}} = 0{,}5339$; also

$\frac{\lambda\overline{36}}{r^{16}} = 7,4414$, und $\frac{\lambda\overline{36}}{r^{16}} \cdot 0,1812 = 1,3484$.

Folglich $\overset{n}{-}\lambda\overline{a} = 7,4414 - 1,3484 = 6,093$.

85.

Zusatz 2. Mittelst einer solchen Hülfstabelle als die obige §. 56. zur Berechnung der Leibrenten, findet man *aufgeschobene Leibrenten* auf eine ähnliche Weise durch Eine Division. Die in der Columne E bey dem Jahre $a+n+1$ stehende Summe der discontirten Zahlen der Lebenden wird durch die in der Columne C bey dem Jahr a stehende discontirte Zahl der Lebenden dividirt, und der Quotient ist, was man sucht. Es ist nämlich die Zahl in der Columne E bey dem Jahr $a+n+1$,

$= \frac{\overset{n+1}{-}A}{r^{a+n+1}} + \frac{\overset{n+2}{-}A}{r^{a+n+2}} + +$ wann A für die Anfangszahl in der Tabelle beym Alter a genommen wird; auch ist die Zahl der Columne C beym Jahre a, $\frac{A}{r^a}$.

Folglich ist jene Summe durch diese Zahl dividirt

$$= \frac{1}{A : r^a}\left(\frac{\overset{n+1}{-}A}{r^{a+n+1}} + \frac{\overset{n+2}{-}A}{r^{a+n+2}} + +\right)$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{n+1}{-}A}{r^{n+1}} + \frac{\overset{n+2}{-}A}{r^{n+2}} + \ + \right) = \overset{n}{-}\lambda\overline{a}.$$

Wenn $a = 20$, und $n = 16$, so steht bey dem Jahr $a+n+1 = 37$, in der Columne E, 1365,26, und bey 20 Jahr in der Columne C, 224,09. Es ist $\frac{1365,26}{224,09} = 6,093$. wie vorher.

86. *An-*

86.

Anmerkung. Wenn jemand ſtatt eine *aufgeſchobene* Leibrente zu kaufen, das dazu erfoderliche Geld bis dahin aufhebet, da er des Genuſſes der Rente bedarf, ſo wird der jetzige Wehrt der aufgehobenen Leibrente nach *n* Jahren ſeyn $r^n . \overline{{}^{-n}\lambda\, a} = \lambda\, \overline{a + n} . \frac{{}^{-n}A}{A}$. Das iſt weniger als ihm alsdenn nach ſeinem Alter $a+n$, eine Leibrente für ſein künftiges Leben koſten wird. Allein er hat in der Zwiſchenzeit der *n* Jahre ſein Geld mit den gewonnenen Zinſen für ſich und ſeine Erben in Beſitz gehabt. Hätte er ſolches für eine *aufgeſchobene* Leibrente hin gegeben, ſo würde es, im Fall er vor *n* Jahren verſtorben wäre, der Caſſe des Entrepreneurs verfallen ſeyn. Er kann alſo nach *n* Jahren in dem erſten Fall nicht ſo viel haben, als er im letztern gehabt haben würde, wo er eben der Gefahr wegen, das Geld ohne Genuſs ausgegeben zu haben, mehr gewonnen haben würde.

87.

Zuſatz 3. Soll eine nach der Ordnung der natürlichen Zahlen *ſteigende Leibrente* auf *n* Jahre aufgeſchoben, alsdenn aber das erſtemal ſo genoſſen werden, wie es in demſelben Jahre geſchehen ſeyn würde, wenn ſie gleich vom Anfang an lauffend geweſen wäre, ſo findet man ihren Wehrt, wenn man eine ſolche ſteigende Leibrente für das Alter $a+n$ auf dieſelbige Weiſe verändert,

wie die beständige Leibrente nach dem vorhergehenden §. 83. und die auf ähnliche Art veränderte beständige Leibrente mit der Zahl der Jahre *n* multiplicirt, hinzugeleget.

Oder es ist $\overset{-n}{}L_{\overline{a}} = \left(\frac{n. \lambda_{\overline{a+n}}}{r^n} + \frac{L_{\overline{a+n}}}{r^n} \right) \frac{\overset{n}{-}A}{A}$.

Siehe Zusätze *)

88.

Satz 19. Wenn man zu dem Wehrte der Leibrente 1 für ein gegebenes Alter, die Wehrte der auf 1, der auf 2, der auf 3 Jahre, und so ferner, bis die auf die ganze Altersergänzung fort aufgeschobenen Leibrenten addirt, so ist die Summe dieser Leibrenten gleich dem Wehrt einer nach der natürlichen Ordnung der Zahlen bis ans Ende des Lebens steigenden Leibrente, die mit 1 anfängt. Oder es ist

$$L_{\overline{a}} = \lambda_{\overline{a}} + \overset{-1}{}\lambda_{\overline{a}} + \overset{-2}{}\lambda_{\overline{a}} + + \overset{-\alpha}{}\lambda_{\overline{a}}.$$

Beweis. Es ist klar, daſs der Rentenier, der die letzten Renten zu erwarten hat, am Ende des ersten Jahrs 1; am Ende des zweyten, 2; am Ende des dritten, 3; und so ferner, am Ende des *nten* Jahrs, *n*; bis am Ende des Lebens, mit jedem folgenden Jahre Eins mehr empfangen soll. Das ist, seine Rente ist eine *nach der natürlichen Ordnung der Zahlen steigende Leibrente.*

89. Zu-

*) zu diesem Capitel. §. 26.

89.

Zusatz. Daraus ergiebt sich eine Methode, mittelst einer allgemeinen *Hülfstabelle* die Wehrte der so steigenden Leibrenten durch Eine Division zu finden. Man summire von neuen die Zahlen der Columne E der Tabelle in §. 56. von hinten an, auf dieselbige Art, wie man diese Zahlen in E durch die Summirung der discontirten Zahlen der Lebenden der Columne C gemacht hat, und schreibe auch die neuen Summen auf dieselbige Art gegen die Jahrszahlen über. Alsdenn giebt die *Division der beym Alter a+1 stehenden Zahl der neuen Columne durch die zum Alter a gehörige discontirte Zahl der Lebenden* den Wehrt für die steigende Leibrente $L\overline{a}$. Es ist nämlich die Zahl der Columne E, bey dem Jahr

$$a+1 = \frac{\overset{1}{-}A}{r^{a+1}} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{a+2}} + +;$$ die Zahl bey $a+2$

ist $$= \frac{\overset{2}{-}A}{r^{a+2}} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^{a+3}} + \; +$$ und so ferner.

Diese Zahlen durch $\frac{A}{r^a}$, das ist durch die Zahl der Columne C bey dem Alter *a* jede für sich dividirt, geben, die erste, die Leibrente für *a;* die zwote, die auf ein Jahr aufgeschobene Leibrente für dasselbe Alter §. 85. und so weiter. Wenn nun jene Summen von neuem summirt sind in der Zahl der neuen Columne, die bey *a+1* stehet, so ist klar, dass diese letztere sey

$$= \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r^{a+1}} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{a+2}} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\overset{2}{-}A}{r^{a+2}} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^{a+3}} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\overset{3}{-}A}{r^{a+3}} + +\right)$$

Dieſe alſo mit $\frac{A}{r^a}$ dividirt, giebt

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + +\right) + \left(\frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + +\right) = \lambda\overline{a} + \overset{1}{-}\lambda\overline{a} + \overset{2}{-}\lambda\overline{a} = L\overline{a}.$$

Unten in dem nächſtfolgenden Capitel von den Wehrten der Verbindungsrenten zwoer Perſonen ſoll eine ſolche Tabelle beygebracht werden. Sie dient zugleich die Verbindungswehrte auf die kürzeſte Art zu berechnen.

90.

Satz 20. Eine Leibrente, welche nur auf eine beſtimmte Zahl von Jahren, n, dauren, und dann aufhören ſoll, iſt gleich dem Ueberſchuſs einer vollen Leibrente über eine auf n Jahre aufgeſchobene für daſſelbige Alter.

Beweis. In dem Ausdruck

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + + \frac{\overset{n}{-}A}{r^n} + \frac{\overset{n+1}{-}A}{r^{n+1}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$$

ſind allein die Ausgaben der erſten *n* Jahre, oder die er-

sten *n* Glieder zu berechnen; das ist $\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + + \frac{\overset{n}{-}A}{r^n}\right)$; das ist, diejenigen, die bey der Berechnung der *aufgeschobenen* Leibrente wegfallen. Nach dem *n*ten Jahr wird nichts mehr bezahlt. Folglich besteht die *volle* Leibrente aus dem Theil, der auf die ersten *n* Jahre fällt, und aus dem Rest, der die auf *n* Jahr *aufgeschobene* Leibrente ausmacht.

Man kann die nur auf *n* Jahre daurende Leibrente bezeichnen durch $\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a}$; Es ist dann $\lambda\,\overline{a} = \overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a} + \overset{-n}{-}\lambda\,\overline{a}$.
Also $\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a} = \lambda\,\overline{a} - \overset{-n}{-}\lambda\,\overline{a}$.

Ex. Eine 20 jährige Person will eine Leibrente für sich auf 16 Jahre haben, die nachher aufhören soll, so ist

$\lambda\,\overline{a} = 16{,}7905$, und $\overset{-n}{-}\lambda\,\overline{a} = 6{,}0931$. (§. 84.)
Folglich $\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a} = 10{,}6974$. Für die ersten 16 Jahre ist die Leibrente mehr wehrt, als für den ganzen übrigen Theil des Lebens.

91.

Zusatz 1. Dieser Satz ist auch wahr von *veränderlichen Leibrenten.*

Zusatz 2. Eben so gilt er auch für *Leibrenten in halbjährlichen Zahlungen.* Macht man diese letztern aus den jährlichen Leibrenten durch den Zusatz von $\frac{1}{4}$ einer Jahrshebung, nach §. 68; so kann dieser Zusatz auf die

beyden

beyden Stücke der ganzen Rente in Verhältniss mit diesen Stücken selbst vertheilet werden. Diess ist für die Praxis genau genug.

92.

Satz 21. Wenn A eine Leibrente 1 kauft, solche aber in den ersten n Jahren nicht geniessen will, mit der Bedingung, dass ihm oder seinen Erben dafür am Ende dieser n Jahre eine Summe ausgezahlet werde, so ist der baare Wehrt dieser alsdenn zahlbaren Summe gleich dem baaren Wehrt einer nach n Jahren aufhörenden Leibrente, das ist, $\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a}$. *Die Grösse dieser nach n Jahren zahlbaren Summe selbst, oder ihr derzeitiger Wehrt ist* $r^n.\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a}$.

Beweis. Diess ist für sich klar. A bezahlt eine ganze Leibrente, und will doch nur eine auf *n* Jahre aufgeschobene geniessen. A zahlet also der Casse den baaren Wehrt einer *n* Jahre daurenden und dann aufhörenden Rente mehr, als er für die aufgeschobene zu bezahlen hatte. §. 90. Nach *n* Jahren ist die Grösse der alsdenn zahlbaren Summe so viel als der Wehrt der aufhörenden Leibrente nach *n* Jahren, mit Zinsen und Zinsen von Zinsen, das ist, $r^n.\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a}$.

Ex. Die ganze Leibrente einer 20 jährigen Person ist 16, 795; nach dem Zinsfuss $r = 1,04$; und eine nach 16 Jahren aufhörende ist 10, 6975 jetzo baar wehrt

wehrt. Dieſs beträgt nach 16 Jahren 10, 6975 · 1,873 = 20, 0364.

Anmerkung. Es verſteht ſich, daſs dieſe Summe alsdenn, nämlich nach *n* Jahren zahlbar ſey, der Rentenier ſelbſt mag am Leben ſeyn oder nicht. Sie iſt gleich anfangs mit bezahlt worden.

93.

Zuſatz 1. Soll die *n* Jahre aufgeſchobene Rente *bey dem Tode des Renteniers* bezahlet werden, ſo kann ihre Gröſse, die ſie *alsdenn* hat, (ihr *derzeitiger Wehrt*) aus dem Wehrt einer beym Tode einer Perſon zahlbaren Summe berechnet werden, mittelſt Tab. XXI.

Ex. Um bey dem Tode einer 40 jährigen Perſon 1 zu empfangen, zahlt man baar 0,4737. Da die *ganze* Leibrente für 40 Jahr = 13, 1565, und die auf 16 Jahr *aufgeſchobene* Leibrente = 4, 2395, ſo iſt die mit 16 Jahren *aufhörende* = 8, 917. Weil nun für 0,4737 beym Tode eines 40 jährigen bezahlet wird 1, ſo iſt für 8, 917 zu bezahlen 18, 824.

94.

Zuſatz 2. Will A von 40 Jahren, nichts von ſeiner Leibrente genieſsen, ſondern dafür einem andern eine nach ſeinem Tode zu zahlende Summe hinterlaſſen, ſo iſt dieſe letztere $\frac{13,\,1565}{0,\,4737} = 27,\,7740$.

95. *Zu-*

95.

Zusatz 3. Wenn A die Leibrente 1 in den ersten *n* Jahren, die er fortlebet, bey der Casse stehen läfst, und dann bey seinem Tode die so gesammlete Summe mit ihren Zinsen und Zinseszinsen ausgezahlet werden soll, so beträgt sie alsdenn $\frac{1}{r-1} \cdot (r^n - 1)$ wo *n* die Zahl der Jahre ist, welche A durchlebet. Das ist, sie ist so grofs als eine durch *n* Jahre *aufgesparte Jahrrente.* $r^n . \int \frac{1}{r^n} .$ (Cap. I. §. 25.)

Wenn A vom Alter 40 Jahr ist, wie in dem vorigen Exempel, §. 93. so ist $r^n . \int \frac{1}{r^n}$, für $r = 1, 04$, und $n = 16$, gleich 25. 0, 873 = 21, 925. Diefs ist mehr, als bey dem Tode des A zahlbar (nach §. 93.) gewesen seyn würde, wenn A nach 16 Jahren gestorben wäre. Aber A hat in jenem Fall auch wirklich 16 Jahre leben müssen, um diese Summe zu sammeln. Die vorher §. 93. berechnete Summe wird in jedem Fall beym Tode von A bezahlet, dieser erfolge früh oder spät.

96.

Satz 22. *Soll die Ruhe der Leibrente*, (oder der Aufschub des Genusses in den ersten Jahren) *dazu gebrauchet werden, um die jährlichen Hebungen für die folgenden Lebensjahre desto gröfser zu haben, und man setzet zum voraus die Dauer der Ruhe auf n Jahre fest, so ver-*

verhält sich die jährliche Hebung der durch die Ruhe gewachsenen Leibrente zu der jährlichen Hebung der sogleich lauffenden, wie der baare Wehrt der letztern zu dem baaren Wehrt einer auf n Jahre aufgeschobenen.

Beweis. Es ist eine *volle* Leibrente bezahlt, und soll doch nur eine *aufgeschobene* genossen werden. Nun sind in jedem Fall die *jährlichen Hebungen, bey derselben Art von Renten, in dem Verhältniss der baaren Wehrte*, die man dafür zahlt. Daher wird die jährliche Hebung der aufgeschobenen Leibrente in dem Verhältniss grösser, als der dafür bezahlte baare Wehrt, das ist der Wehrt der vollen Leibrente, grösser ist.

Ex. Eine 20 jährige Person bezahlt eine volle Leibrente, will aber erst nach 16 Jahren Ruhe sie geniessen. Sie kann also für ihr Geld jährlich empfangen 2,287 an statt 1. Denn der Wehrt der vollen Leibrente ist 13,9379, und der auf 16 Jahre aufgeschobenen Leibrente ist 6,093. Also jene zu dieser wie 2,287 : 1.

97.

Zusatz. Sind die Jahre der Ruhe nicht zum voraus bestimmt, sondern hangen von der Willkühr des Empfängers ab, der, wenn er will, für die aufgesparte Summe eine grössere Leibrente für künftig nehmen kann, so ist der Wehrt der aufgesparten, zu der Zeit, wenn die Rente aufhört, nach §. 95. zu berechnen. Der Rentenier erhält jährlich so viel mehr über die anfangs gekaufte Hebung,

als ihm an Rente *für die aufgeſparte Summe nach ſeinem dermaligen Alter gegeben werden kann.*

Z. B. Ein Zwanzigjähriger hat nach 16 Jahren ſeine jährliche Rente 1 aufgeſpart, und ſich dadurch erworben 21,925. Nun iſt er 36 Jahr alt; und der Wehrt einer Leibrente 1 für 36 Jahr iſt 13,9379. Folglich $\frac{21,925}{13,9379} = 1,57$. Um ſo viel kann ſeine jährliche Hebung 1 gröſser werden, alſo fürs künftige 2,57 ſeyn.

Vierter Abſchnitt.

Vom Wehrt der Erbſchaft.

98.

Satz 23. Der baare Wehrt einer Summe, welche bey dem Tode einer Perſon A, vom gegebenen Alter a zahlbar iſt, (das iſt der *baare Wehrt der Erbſchaft*) *iſt ſo groſs, als die zu empfangende Summe ſelbſt, wenn davon der baare Wehrt einer Leibrente ſo groſs als die Zinſen dieſer Summe für die Perſon A abgezogen wird.*

Beweis. Es iſt aus der Natur der Sache klar. Wenn ein Capital, es ſey das *Grundcapital*, hingelegt wird, ſo kann erſtlich die Perſon A davon, ſo lange ſie lebt, die Zinſen 1 heben, und wenn A ſtirbt in dem Termin, da die Rente empfangen iſt, ſo bleibt für B daſſelbige Capital zurück und bringt dem B die Zinſen 1 in dem nächſtfolgenden Termin.

Auf

Auf gleiche Art verhält es sich mit jeder andern Summe. Wenn A ihre Zinsen lebenswierig geniesset, so bleibt bey dem Tode von A dasselbige Capital für die Erben.

Daraus folget unmittelbar, dass wenn B, an statt den Tod von A abzuwarten, sogleich den Wehrt einer den Zinsen der Summe gleichen Leibrente auszahlt, so könne es die ganze Summe sogleich baar in Empfang nehmen.

Der baare Wehrt einer künftig bey dem Tode von A zu empfangenden Summe ist also so gross als diese Summe selbst, weniger dem baaren Wehrt der den Zinsen gleichen Leibrente.

Es sey die zu empfangende Summe *p*, der baare Wehrt einer den Zinsen von *p*, als Capital gleichen Leibrente $\lambda \overline{a}$, so ist $p - \lambda \overline{a} = p\,T$, wenn T so viel ist als der Wehrt einer Erbschaft 1. §. 59.

99.

Zusatz 1. Daraus folgt dann, dass der baare Wehrt der Erbschaft 1 sey $1 - \frac{\lambda \overline{a}}{p}$.

Wenn *p* das Grundcapital ist, so ist $\lambda \overline{a}$ der Wehrt der Leibrente 1.

Die Erbschaft ist einerley mit einer beym Tode einer Person zahlbaren Summe, davon die Wehrte durch die XXIste Tabelle gefunden werden. Die *Süssmilchische* Sterblichkeitsordnung und 4 Proc. Zinsen vorausgesetzt.

100.

Anmerkung 1. Dieser Satz wird gebraucht zur Berechnung der Einsätze in *Todtencassen*, das ist, der baaren Wehrte einer Summe, welche bey dem Tode einer Person ausgezahlet wird. Eine solche Summe kommt auch vor unter dem Namen einer *Assuranz des Lebens*. Es ist *eine Erbschaft, die einem andern bey dem Tode einer Person zufällt.*

Ex. A ist 50 Jahr alt, und geniesst die jährlichen Zinsen eines Capitals von 10000 Rthl., welches nach seinem Tode auf B fällt. A will die Forderung des B abkaufen, wie gross ist der jetzige Wehrt derselben? Die Zinsen des Capitals, 4 Procent gerechnet, machen 400 Rthl. Der baare Wehrt einer jährlichen Leibrente von dieser Grösse für einen Funfzigjährigen, ist 400. 10,7961 = 4318,44 Rthl. Folglich die Forderung des B, (der baare Wehrt seiner Erwartung) gleich 10000 Rthl. — 4318, 44 Rthl. = 5671,56 Rthl.

101.

Anmerkung 2. Es ist einerley, ob es *eine Summe Geldes* ist, welche so gleich beym Tode einer Person ausgezahlt werden soll, oder ein *zinsentragendes Capital*, oder ein *unbewegliches Vermögen*, wovon jährlich ein bestimmter Zins erhoben wird. Ist es das letztere, so bekommt der Erbe so gleich die nächstfolgenden Zinsen auf die, welche zuletzt von dem Erblasser genossen

 worden

worden ſind. Iſt es eine *Summe Geldes*, ſo iſt *der Termin der Auszahlung die Zeit des Todes des Erblaſſers*, das iſt, wenn auf *ganze* Jahre gerechnet wird, zugleich der Termin, in welchem dieſer die letzte Jahrshebung empfangen hat.

102.

Anmerkung 3. D. *Price* *) will die zwey Fälle unterſchieden haben, und führt es als ein Verſehen von *Simpſon* und andern an, daſs man auf dieſe Verſchiedenheit nicht geachtet habe. Wenn es ein *immerwährendes*, *zinſentragendes Capital* iſt, ſo rechnet er den Wehrt deſſelben für den Erben, ſo wie hier geſchehen, nämlich

$$= r \frac{1}{A} \left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta^2 A}{r^2} + + \right) = T \text{ (§. 59.)}$$

für das Capital 1; nicht aber ſo, wenns eine *baar auszuzahlende Summe Geldes* iſt. In dem letzten Fall ſetzet er den Wehrt $\frac{T}{r}$, das iſt, discontirt den auf die erſte Art gefundenen Wehrt auf 1 Jahr zurück.

Es können die Bedingungen ſo gemacht werden, daſs *Price* Recht hat. Man ſetze, die Caſſe ſolle nur jährlich auszahlen, alſo für die während des Jahrs Ab-

 gehende

*) In den *Obſervations on reverſionary Payments*, p. 34 und 291. In der neuſten Ausgabe iſt dieſe Stelle nicht verändert.

gehende nicht anders als am Ende desselben, so ist der baare Wehrt der Summe 1, die in dem *nächst auf den Todesfall folgenden Termin auszuzahlen ist,*

$$= \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{r^2} + + \frac{\Delta \overset{x}{-} A}{r^{x-1}} \right).$$

Allein wenn dagegen *unmittelbar beym Tode der Person die Auszahlung geschehen soll, so muss die Casse* auch im Anfang des Jahrs, für die im Lauf desselben Sterbende die Summe schon in Bereitschaft haben; also *im Anfang der Jahre zahlen.* Folglich ist wiederum der baare Wehrt der obigen Summe so groß als T. Davon kann höchstens der *halbjährliche Zins von der Hälfte dieses Wehrts, auf ein halbes Jahr zurück discontirt*, abgerechnet werden, wenn man nämlich voraussetzet, dass die *Hälfte* der Absterbenden in die erste Hälfte des Jahrs, die übrigen in die letzte fallen. Alsdenn könnte die Casse *von dem im Anfang des Jahrs, für die im Lauf desselben Sterbenden, hinzulegendem Gelde, die Hälfte noch ein halbes Jahr Zinsen* tragen lassen.

Wenn auf *jährliche* Leibrenten gerechnet, und die Zwischenzeit nicht in Anschlag gebracht wird, so wird auch vorausgesetzet, dass *alle innerhalb des Jahrs Sterbende, gleich im Anfang desselben sterben.* §. 39. Eine ähnliche Voraussetzung liegt zum Grunde bey der Berechnung, wenn die Hebungen halbjährlich, vierteljährlich, und so ferner, seyn sollen. *Was abgeht, geht ab im Anfang der Termine.* Derselbe Grundsatz muss

also

alſo auch hier beybehalten werden. Will man Zwiſchenzeiten rechnen, ſo geſchehe das wie bey den Leibrenten ſo bey den Erbſchaften. Man rechne auf augenblickliche Hebungen, ſo iſt ſicher der Termin der letzten Hebung einerley mit dem Termin der Auszahlung der Erbſchaft. In jedem Fall iſt der baare Wehrt der beym Tode zahlbaren Summe ſo groſs, als dieſe Summe ſelbſt, wenn der Wehrt der Leibrente ſo groſs als ihre Zinſen davon abgezogen wird. *)

*) *Zuſ.* §. 27.

Zusätze
zum zweyten Capitel
von Leibrenten.

I.
Beweis des Satzes §. 49.

Für das Jahr, wo $\overset{x}{-}A = 0$ ist, ist auch $\Delta\overset{x}{-}A = 0$. Für das Jahr $x - 1$ ist $\overset{x-1}{-}A = \Delta\overset{x-1}{-}A$, denn es gehen alle im Anfang desselben Lebende auch sogleich ab. Ferner ist $\overset{x-2}{-}A = \overset{x-1}{-}A + \Delta\overset{x-2}{-}A$, weil $\overset{x-2}{-}A - \Delta\overset{x-2}{-}A = \overset{x-1}{-}A$ ist. Also $\overset{x-2}{-}A = \Delta\overset{x-1}{-}A + \Delta\overset{x-2}{-}A$.

Ferner $\overset{x-3}{-}A = \Delta\overset{x-1}{-}A + \Delta\overset{x-2}{-}A + \Delta\overset{x-3}{-}A$; und

$$\overset{3}{-}A = \Delta\overset{x-1}{-}A + \Delta\overset{x-2}{-}A + \Delta\overset{x-3}{-}A +++ \Delta\overset{3}{-}A.$$

$$\overset{2}{-}A = \Delta\overset{x-1}{-}A + \Delta\overset{x-2}{-}A + \Delta\overset{x-3}{-}A +++ \Delta\overset{3}{-}A + \Delta\overset{2}{-}A.$$

$$\overset{1}{-}A = \Delta\overset{x-1}{-}A + \Delta\overset{x-2}{-}A + \Delta\overset{x-3}{-}A +++ \Delta\overset{3}{-}A + \Delta\overset{2}{-}A + \Delta\overset{1}{-}A$$

Folglich $\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A ++ \overset{x-1}{-}A = \Delta\overset{1}{-}A + 2\Delta\overset{2}{-}A + 3\Delta\overset{3}{-}A ++ (x-1)\Delta\overset{x-1}{-}A$.

2.

Es sey M N O P G *Fig. 1. die Curve der Mortalität.* Auf der *Abscisse* A Q werden die *Jahre des Alters* genommen;

nommen; die *Ordinaten* BN, CO, DP, stellen die *Lebenden* vor, von dem Alter AB, AC, AD, so ist $\int\frac{y\,dx}{A}$ die *mittlere Lebensdauer* auf *Augenblicke, dx*, berechnet. Diess *Integral* ist $= 0$, wenn $x = 0$ und $y = A$ ist.

Die Reihe $\int y\,dx$ wird auch gegeben durch $\int x\,dy$, und die *mittlere Lebensdauer* durch $\int\frac{x\,dy}{A}$, wenn nämlich, was vorher *Ordinate*, y, war, nun *Absciſſe* ist, und umgekehrt. Aber alsdenn werden x und y zugleich zu o, wenn das Integral $= o$ ist. Sonst ist, die ganze Fläche genommen, das ist, wenn integriret und die Integralia vervollständigt sind, $\int\frac{y\,dx}{A} = \int\frac{x\,dy}{A}$. Dahin gehört der Fall im vorhergehenden §., aber es findet diese Gleichheit nicht überhaupt statt.

3.

Zu §. 59.

Es ist $\lambda\bar{a} = \frac{1}{\overset{a}{-}A}\left(\frac{\overset{a+1}{-}A}{r} + \frac{\overset{a+2}{-}A}{r^2} + + \frac{\overset{a+x}{-}A}{r^x}\right)$

oder wenn A die Anfangszahl für das Jahr a bezeichnet,

$$\lambda\bar{a} = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right).$$

Es sey $R = \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{r^2} + \frac{\Delta\overset{2}{-}A}{r^3} + + \frac{\Delta\overset{x}{-}A}{r^{x+1}}\right)$.

Weil nun $\overset{1}{-}A + \Delta A = A$

$$\overset{2}{-}A + \Delta \overset{1}{-}A = \overset{1}{-}A$$

$$\overset{x}{-}A + \Delta \overset{x-1}{-}A = \overset{x-1}{-}A, \text{ und}$$

$$\Delta \overset{x}{-}A = \overset{x}{-}A,$$

so ist

$$\lambda \overline{a} + R = \frac{1}{A}\left(\frac{A}{r} + \frac{\overset{1}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^3} ++ \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x+1}}\right) = \frac{1}{r} + \frac{\lambda \overline{a}}{r}.$$

Folglich $\lambda \overline{a}\left(1 - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} - R$

und $\lambda \overline{a} = \frac{1}{r-1} - \frac{r.\,R}{r-1} = p - p.\,rR$

und r R ist der *Wehrt der Erbschaft* $\iota. = T$.

4.

Zu §. *60.*

Es sey

$$\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r^2} + \frac{\Delta \overset{2}{-}A}{r^3} ++ \frac{\Delta \overset{x-1}{-}A}{r^x} + \frac{\Delta \overset{x}{-}A}{r^{x+1}} = M = A.\,R.$$

Ferner

$$\Delta A - \Delta \overset{1}{-}A = \Delta\Delta A, \text{ also } \Delta A - \Delta\Delta A = \Delta \overset{1}{-}A.$$

$$\Delta \overset{1}{-}A - \Delta \overset{2}{-}A = \Delta\Delta \overset{1}{-}A, \text{ also } \Delta \overset{1}{-}A - \Delta\Delta \overset{1}{-}A = \Delta \overset{2}{-}A.$$

$$\Delta \overset{2}{-}A - \Delta \overset{3}{-}A = \Delta\Delta \overset{2}{-}A, \text{ also } \Delta \overset{2}{-}A - \Delta\Delta \overset{2}{-}A = \Delta \overset{3}{-}A.$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$\Delta \overset{x}{-}A - \Delta \overset{x+1}{-}A = \Delta\Delta \overset{x}{-}A, \text{ also } \Delta \overset{x}{-}A - \Delta\Delta \overset{x}{-}A = \Delta \overset{x+1}{-}A.$$

Aber

Aber $\Delta \overset{x+1}{-} A = 0$, weil $\overset{x+1}{-} A = 0$, also auch

$$\Delta \overset{x}{-} A = \Delta \Delta \overset{x}{-} A.$$

Noch sey $\frac{\Delta \Delta A}{r} + \frac{\Delta \Delta \overset{1}{-} A}{r^2} + \frac{\Delta \Delta \overset{2}{-} A}{r^3} + + \frac{\Delta \Delta \overset{x}{-} A}{r^{x+1}} = N.$

Folglich $M - N = \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{r} + \frac{\Delta \overset{2}{-} A}{r^2} + + \frac{\Delta \overset{x}{-} A}{r^x}$

$$= r\,M - \Delta\,A.$$

Also $(r - 1)\,M = \Delta\,A - N$

$$M = \frac{\Delta A - N}{r - 1}, \text{ und } \frac{M}{A} = R = \frac{\Delta A - N}{A\,(r-1)}.$$

Ferner $\lambda \overline{a} = \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r-1} \cdot r.\,R$ (§. 3.)

$$= \frac{1}{r-1} - \frac{1}{(r-1)^2}\, r.\, \frac{\Delta A - N}{A}$$

$$= p - p^2.\, r.\, \left(\frac{\Delta A - N}{A}\right),$$

5.

Zu §. *61.*

Die Reihe N kann wiederum aus einer Reihe von

$\frac{\Delta^3 A}{r} + \frac{\Delta^3 \overset{1}{-} A}{r^2} + \frac{\Delta^3 \overset{2}{-} A}{r^3} + + \frac{\Delta^3 \overset{x}{-} A}{r^{x+1}} = O$, gefunden werden.

Wenn $\Delta^2\,A - \Delta^2 \overset{1}{-} A = \Delta^3\,A$

$$\Delta^2 \overset{1}{-} A - \Delta^2 \overset{2}{-} A = \Delta^3 \overset{1}{-} A, \text{ u. s. f.}$$

$\Delta^2 \overset{x}{-} A - \Delta^2 \overset{x+1}{-} A = \Delta^3 \overset{x}{-} A$, gesetzet wird.

Alsdenn

Alsdenn erhellet, daſs N aus O auf dieſelbige Art beſtimmt werde, wie vorher M aus N. Alſo iſt

$$N = \frac{\Delta^2 A - O}{(r-1)}.$$

Folglich $M = \frac{\Delta A - N}{r-1} = \frac{\Delta A}{r-1} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^2} + \frac{O}{(r-1)^2}$

und $\lambda \overline{a} = \frac{1}{r-1} - \frac{1}{A} \cdot r. \left(\frac{\Delta A}{(r-1)^2} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3} + \frac{O}{(r-1)^3}\right)$

Noch weiter. Wenn P eine ähnliche Summe von

$\frac{\Delta^3 A}{r} - \frac{\Delta^3 \overset{1}{-} A}{r} = \frac{\Delta^4 A}{r}$, u. ſ. f. iſt, ſo wird O aus P, wie N aus O. Alſo wird

$$M = \frac{\Delta A}{r-1} - \left(\frac{\Delta^2 A}{(r-1)^2} + \frac{\Delta^3 A}{(r-1)^3} - \frac{P}{(r-1)^3}\right)$$

Und die *Leibrente*, $\lambda \overline{a}$, iſt

$$= \frac{1}{r-1} - \frac{r}{A} \cdot \left(\frac{\Delta A}{(r-1)^2} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3} + \frac{\Delta^3 A}{(r-1)^4} - \frac{P}{(r-1)^4}\right).$$

Ueberhaupt

$$\lambda \overline{a} = \frac{1}{r-1} - \frac{r}{A}\left(\frac{\Delta A}{(r-1)^2} - \frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3} + - \right.$$

$$\left. + - \left(\frac{\Delta^{n-1} A}{(r-1)^n} - \int \frac{\Delta^n A}{(r-1)^n}\right)\right)$$

wo $\int \Delta^n A$ die *Summe der letzten discontirten Differenzen* iſt, die von der Ordnung *n* ſind,

$\frac{\Delta^n A}{r} + \frac{\Delta^n \overset{1}{-} A}{r^2} + + \frac{\Delta^n \overset{x}{-} A}{r^x}$, wenn die *Decremente* als die *erſten Differenzen* angeſehen werden.

6.

Setzet man ſtatt der Leibrentenreihe

$$\frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r}+\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}+\,+\,\frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$$ die folgende:

$$\frac{1}{A}\cdot\left(\frac{A}{r}+\frac{\overset{1}{-}A}{r^2}+\frac{\overset{2}{-}A}{r^3}+++\frac{\overset{x}{-}A}{r^{x+1}}\right)=\frac{\lambda\,\overline{a+1}}{r}=L,$$

ſo wird L aus M, auf eine ähnliche Art wie M aus N, wie N aus O u. ſ. f. Es iſt nämlich

$$L=\left(\frac{A-M}{r-1}\right)\frac{1}{A},$$

$$M=\frac{\Delta A-N}{r-1},$$

$$N=\frac{\Delta^2 A-O}{r-1}\text{ u. ſ. f.}$$

Folglich $L=\frac{1}{A}\cdot\left(\frac{A}{r-1}-\frac{\Delta A}{(r-1)^2}+\frac{\Delta^2 A}{(r-1)^3}+-\right.$

$$\left.\cdot\left(\frac{\Delta^{n-1}A}{(r-1)^n}-\int\frac{\Delta^n A}{(r-1)^n}\right)\right).$$

7.

Zu §. 61.

Noch eine leichtere Methode, die *Leibrenten* zu finden, iſt folgende, nur daſs man keine ſo bequeme allgemeine Vorrichtung dabey für alle Alter anbringen kann. Man multiplicire die auf einander folgende Zeitrenten $\int\frac{1}{r}$, $\int\frac{1}{r^2}$, $\int\frac{1}{r^3}$, u. ſ. f. in der III^ten

Tabelle

Tabelle bis $\int\frac{1}{r^{x-1}}$, wenn x die *Altersergänzung* ist, jede in die dazu gehörigen *Decremente*, welche nur kleine Zahlen sind, und zwar $\int\frac{1}{r}$ in $\Delta\overset{1}{-}A$, das ist, in das Decrement des *zweyten* Jahrs. Ferner $\int\frac{1}{r^2}$ in $\Delta\overset{2}{-}A$ und so fort. So ist

$$\Delta\overset{1}{-}A\int\frac{1}{r} + \Delta\overset{2}{-}A\int\frac{1}{r^2} + \Delta\overset{3}{-}A\int\frac{1}{r^3} + +$$

$$\Delta\overset{x-1}{-}A\int\frac{1}{r^{x-1}} = A\ \lambda\overline{a}.$$

Es ist nämlich, (weil $\overset{x}{-}A = 0$), $\frac{\overset{x-1}{-}A}{r^{x-1}} = \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^{x-1}}$,

$$\frac{\overset{x-2}{-}A}{r^{x-2}} = \frac{\overset{x-1}{-}A}{r^{x-2}} + \frac{\Delta\overset{x-2}{-}A}{r^{x-2}} = \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^{x-2}} + \frac{\Delta\overset{x-2}{-}A}{r^{x-2}},$$

$$\frac{\overset{x-3}{-}A}{r^{x-3}} = \frac{\overset{x-2}{-}A}{r^{x-3}} + \frac{\Delta\overset{x-3}{-}A}{r^{x-3}} = \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^{x-3}} + \frac{\Delta\overset{x-2}{-}A}{r^{x-3}} + \frac{\Delta\overset{x-3}{-}A}{r^{x-3}},$$

$$+ \quad + \quad + \quad +$$

$$\frac{\overset{2}{-}A}{r^2} = \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^2} + \frac{\Delta\overset{x-2}{-}A}{r^2} + \frac{\Delta\overset{x-3}{-}A}{r^2} +++ \frac{\Delta\overset{2}{-}A}{r^2}.$$

und

$$\frac{\overset{1}{-}A}{r} = \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r} + \frac{\Delta\overset{x-2}{-}A}{r} + \frac{\Delta\overset{x-3}{-}A}{r} ++ \frac{\Delta\overset{2}{-}A}{r} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{r}.$$

Folglich $\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} +++ \frac{\overset{x-1}{-}A}{r^{x-1}} + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x-2}} = A.\ \lambda\overline{a}$

$$= \Delta\overset{1}{-}A\int\frac{1}{r} + \Delta\overset{2}{-}A\int\frac{1}{r^2} + \Delta\overset{3}{-}A\int\frac{1}{r^3} +++ \Delta\overset{x-1}{-}A\int\frac{1}{r^{x-1}}.$$

Auch

Auch ist

$$\frac{\overset{1}{-}A}{r} = \frac{A}{r} - \frac{\Delta A}{r}$$

$$\frac{\overset{2}{-}A}{r^2} = \frac{A}{r^2} - \frac{\Delta A}{r^2} - \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r^2}$$

$$\frac{\overset{3}{-}A}{r^3} = \frac{A}{r^3} - \frac{\Delta A}{r^3} - \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r^3} - \frac{\Delta \overset{2}{-}A}{r^3}$$

$$\frac{\overset{x}{}A}{r^x} = \frac{A}{r^x} - \frac{\Delta A}{r^x} - \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r^x} - \frac{\Delta \overset{2}{-}A}{r^x} - - \frac{\Delta \overset{x-1}{-}A}{r^x}$$

Daher

$$A.\lambda\overline{a} = A\int\frac{1}{r^x} - \Delta A\int\frac{1}{r^x} - \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r}\int\frac{1}{r^{x-1}}$$

$$- \frac{\Delta \overset{2}{-}A}{r^2}\int\frac{1}{r^{x-2}} - - \frac{\Delta \overset{x-1}{-}A}{r^{x-1}}\int\frac{1}{r}.$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit dem Vorhergehenden, so bekommt man

$$A\int\frac{1}{r^x} = \Delta A\int\frac{1}{r^x} + \Delta \overset{1}{-}A\left(\int\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\int\frac{1}{r^{x-1}}\right)$$

$$+ \Delta \overset{2}{-}A\left(\int\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int\frac{1}{r^{x-2}}\right) + +$$

$$\Delta \overset{x-1}{-}A\left(\int\frac{1}{r^{x-1}} + \int\frac{1}{r^{x-1}}\int\frac{1}{r}\right).$$

$$= \Delta A\int\frac{1}{r^x} + \Delta \overset{1}{-}A\int\frac{1}{r^x} + \Delta \overset{2}{-}A\int\frac{1}{r^x} + +$$

$\Delta \overset{x-1}{-}A\int\frac{1}{r^x}$ wie sonst auch unmittelbar klar ist. Denn es ist überhaupt $\int\frac{1}{r^x} = \int\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^n}\int\frac{1}{r^{x-n}}$.

8. *Beweis*

8.

Beweis der Sätze von Moivrischen Leibrenten.

Zu §. 63.

Es ist $\lambda \overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} ++ \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$

wo x die *Altersergänzung ist.* Aber nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* ist

$$\overset{1}{-}A = A - \Delta A$$

$$\overset{2}{-}A = A - 2.\Delta A$$

$$\overset{x}{-}A = A - x.\Delta A.$$

Folglich $\lambda \overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{A}{r} - \frac{\Delta A}{r} + \left(\frac{A - 2.\Delta A}{r^2}\right) ++ \left(\frac{A - x.\Delta A}{r^x}\right)\right) = \int\frac{1}{r^x} - \frac{\Delta A}{A}.\int\frac{x}{r^x}$, und weil $A = x.\Delta A$, so ist $\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{x}$,

$$\lambda \overline{a} = \int\frac{1}{r^x} - \frac{1}{x}\int\frac{x}{r^x}.$$

Allein $\int\frac{x}{r^x} = r\,p\int\frac{1}{r^x} - \frac{p\,x}{r^x}$. (*Zusätze zu Cap. I. §. 14.*)

Daher $\int\frac{1}{r^x} - \frac{1}{x}\int\frac{x}{r^x} = p - \frac{p}{r^x} - \frac{pr}{x}\int\frac{1}{r^x} + \frac{p}{r^x}$

$= p - \frac{pr}{x}\int\frac{1}{r^x}$.

9. Zu

9.
Zu §. 65 und 66.

Nach dem hier angenommenen Geſetz der *Decremente*, wird zuerſt die *mittlere Lebensdauer* für jedes gegebene Alter, von 15 Jahren und darüber, auf folgende Weiſe gefunden. Es iſt, wenn $E\overline{a}$ dieſe *mittlere Lebensdauer* anzeigt

$$E\overline{a} = \frac{(\overset{a+1}{-}A + \overset{a+2}{-}A + + \overset{66}{-}A)}{\overset{a}{-}A} + \frac{(\overset{67}{-}A + + \overset{x}{-}A)}{\overset{a}{-}A} + \tfrac{1}{2}.$$

Hier iſt $\overset{a}{-}A$ die *Zahl der Lebenden* vom Alter *a*, oder die *Anfangszahl* für das *gegebene Alter.*

Dieſer allgemeine Ausdruck beſteht aus zwey Theilen. In jedem ſtehen *die Decremente in einer arithmetiſchen* Reihe, davon die erſte bis aufs Jahr 65 — 66; die zwote von da bis 95 — 96 geht. Das letzte Jahr iſt noch für ſich ein eigener nicht ſehr beträchtlicher Theil.

Es ſey das *erſte Decrement* im $(a+1)^{ten}$ Jahr *d;* die *beſtändige Differenz* dieſer Decremente in der erſten Reihe ſey $\delta, = 1$.

Das *erſte Decrement* in der *zwoten Reihe* ſey d' und die *beſtändige Differenz* dieſer Decremente $\delta' = 2\tfrac{1}{2}$.

Weil nun $\overset{a+1}{-}A = \overset{a}{-}A - d$

$$\overset{a+2}{-}A = \overset{a}{-}A - 2.d - \delta$$

$$\overset{a+3}{-}A = \overset{a}{-}A - 3.d - 3.\delta$$

$$\overset{a+4}{-}A = \overset{a}{-}A - 4.d - 6.\delta$$

und so ferner, so daſs die Factores von δ die *Trigonalzahlen* sind. Dieſs giebt das *allgemeine Glied der Reihe*

$$\frac{\overset{a}{-}A - x\delta}{\overset{a}{-}A} - \frac{x.(x-1)\delta.}{2\overset{a}{-}A} = \frac{\overset{a}{-}A - x(\delta - \frac{1}{2}\delta) - x^2\frac{\delta}{2}}{\overset{a}{-}A}.$$

Die *Summe* des ersten Theils von $E\frac{}{a}$ ist also

$$= 66 - a - \frac{(d-\frac{1}{2})\, S\overline{66-a}}{\overset{a}{-}A} - \frac{\frac{1}{2}\, S\, 66-a)^2}{\overset{a}{-}A}.$$

Für das *zwote* Stück, $\frac{\overset{67}{-}A + \overset{68}{-}A + \quad + \overset{96}{-}A}{\overset{a}{-}A}$

ist gleichfalls $\overset{67}{-}A = \overset{66}{-}A - d'$

$$\overset{68}{-}A = \overset{66}{-}A - 2.d' + \delta'$$

$$\overset{69}{-}A = \overset{66}{-}A - 3.d' + 3.\delta'.$$

Daher für dieses Stück der *Terminus generalis*

$$= \frac{\overset{66}{-}A - x d' + \frac{(x.(x-1)).\delta'}{2}}{\overset{a}{-}A}.$$

Die *Summe* davon ist, (weil $d' = 85\frac{1}{2}$, und $\delta' = -2\frac{1}{2}$)

$$= \frac{30.\overset{66}{-}A - (85\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4})\, S\overline{30} + 1\frac{1}{4}.\, S\overline{30}^2}{\overset{a}{-}A}.$$

Also *beyde Theile zusammen* geben

$$E\frac{}{a} = 66 - a - \frac{(d-\frac{1}{2})\, S\overline{66-a} - \frac{1}{2} S(66-a)^2}{\overset{a}{-}A}$$

+

$$+ \frac{1}{\overset{a}{-}A} \left(\overset{66}{-}A.30 - (85\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{4}) \overline{S30} + 1\tfrac{1}{4} \overline{S30}^2\right)$$

$$+ \frac{7\tfrac{1}{2}}{\overset{a}{-}A} + \tfrac{1}{2}.$$

Wenn $a = 66$, oder grösser, so fällt das erste Stück ganz weg. Wenn a grösser als 66, so kommt im zweyten Stück statt 30, das *Complement des Alters* zu 96 Jahr, und statt $\overset{66}{-}A$ kommt $\overset{a}{-}A$. Für a = 66 wird das *künftige mittlere Leben* = 9, 97; was nach der unveränderten *Süssmilchischen* Tabelle = 9, 50 ist.

10.

Die Formel für die *Leibrente* nach derselben Tabelle entsteht auf eine ähnliche Art.

Der *Terminus generalis* des ersten Stücks ist

$$= \frac{\overset{a}{-}A - xd - \frac{x.(x-1)\delta}{2}}{\overset{a}{-}A r^x}, \text{ (wo } \delta = 1\text{)},$$

$$= \frac{\overset{a}{-}A - (d - \tfrac{1}{2})x - \tfrac{1}{2}x^2}{\overset{a}{-}A . r^x}.$$ Also ist die *Summe* davon bis aufs 67ste Jahr

$$= \int \frac{1}{r^{66-a}} - \frac{1}{\overset{a}{-}A}\left((d - \tfrac{1}{2}) \cdot \int \frac{\overline{66-a}}{r^{66-a}} + \tfrac{1}{2} \int \frac{(66-a)^2}{r^{66-a}}\right)$$

Das zwote Stück hat zum *Terminus generalis*

$$\frac{\overset{66}{-}A - (d + 1\tfrac{1}{4})x + 1\tfrac{1}{4}x^2}{\overset{a}{-}A. \; r^{66-a} \; . \; r^x}.$$

 Daher

Daher ist die ganze Summe, bis $x = 30$,

$$= \frac{\overset{66}{-}A \int\frac{1}{r^{30}} - (85\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{4})\int\frac{30}{r^{30}} + 1\tfrac{1}{4}\int\frac{30^2}{r^{30}}}{\overset{a}{-}A.\; r^{66-a}}.$$

Der unbeträchtliche Theil für das letzte Jahr ist

$$= \frac{7\frac{1}{2}}{\overset{a}{-}A\, r^{66-a}}.$$

Folglich

$$\lambda\,\overline{a} = \left(\overset{a}{-}A\int\frac{1}{r^{66-a}} - (d - 1:2)\int\frac{\overline{66-a}}{r^{66-a}} - \tfrac{1}{2}\int\frac{(66-a)^2}{r^{66-a}}\right) : \overset{a}{-}A + \frac{1}{\overset{a}{-}A\, r^{66-a}}.$$

$$\left(\overset{66}{-}A\int\frac{1}{r^{30}} - (85\tfrac{1}{2} + 1\tfrac{1}{4})\int\frac{30}{r^{30}} - 1\tfrac{1}{4}\int\frac{\overline{30^2}}{r^{30}}\right)$$

$$+ \frac{7\frac{1}{2}}{A.r^{96-a}}..$$

Ist $a = 66$, so fällt das erste Stück weg, und ist a grösser, so wird statt 30 das *Complement des Alters* gesetzet, und für $\overset{66}{-}A$ kommt die Anfangszahl $\overset{a}{-}A$.

II.

Von der Sterblichkeitslinie.

Wenn in *Fig. 1.* die gerade Linie AG als eine *Abscissenlinie* das *Alter* anzeiget, und die senkrechten dazu gehörigen *Ordinaten*, die *Zahl der in jedem Alter Lebenden*, so heisst die Linie MNPG die *Sterblichkeitslinie.*

Nach

Nach *Moivres* Hypotheſe iſt ſie eine *gerade Linie*, und ſchneidet beym Alter von 86 Jahren die *Abſciſſe*. Es ſey GA und GE, GD, GB die *Abſciſſe* von G an, als die *Ergänzungen des Alters* = x, die *Ordinate*, y, ſo iſt nach *Moivre* $dx = n\,dy$ und $x = ny$.

Man kann und muſs annehmen, daſs ſie eine *krumme Linie* ſey. *D'Alembert* und *Lambert* haben Unterſuchungen darüber angeſtellt. Der letztere gab eine Gleichung an, nach welcher ſie aus einer *paraboliſchen* und *logarithmiſchen* Linie zuſammengeſetzt ſeyn ſoll. *) Aber er hatte jene blos als zunächſt zutreffend, aus der Londoner Tabelle durch Verſuche herausgebracht, und in einem Briefe an *Fontana* vom 16. Mart. 1776 **) ſcheint er ſelbſt ſich kein Genüge hierin gethan zu haben.

So viel ſieht man wohl, die Curve muſs *hyperboliſch* ſeyn, und die gerade Linie zur *Aſymptote* haben. Sie kann dieſe nicht ſchneiden, weil ſie an der andern Seite keine *negative Ordinaten* haben kann. Aber zugleich iſt auch klar, ſie kann keine *Aſymptote* haben, die durch die Gleichung $xy = c$ ausgedruckt würde, ſondern nur eine von einer höhern Ordnung $x^n y = c$. Denn aus jenem würde folgen, daſs unter der ganzen Menge von Men-

*) *Lamberts Beyträge*. III. Theil. §. 483.

**) Dieſer Brief iſt abgedruckt in *Fontana's Dottrina degli Azzardi. Diſcorſo Prelim.* p. LV.

Menſchen auf der Welt, Einer oder der Andere jedes noch ſo hohe Alter erreichen müſste. Wie klein die zu x = 1000 Jahren gehörige *Ordinate* auch ſeyn mögte, ſo könnte ſie bey einer gröſsern Anfangszahl = 1 werden, und für eine *unendlich* groſse Anfangszahl würde *y* für jedes noch ſo groſse x endlich ſeyn. Dieſs folgt aber nicht, wenn x^n eine höhere Potenz von x, die Aſymptote alſo von einer höhern Ordnung iſt.

Ferner zeigen ſich folgende Eigenſchaften dieſer Linie, die merkwürdig ſind, ob ſie gleich ihre Natur nicht völlig beſtimmen.

1) *Die Sterblichkeit*, oder das Verhältniſs der in jedem Jahr Abſterbenden zu den Lebenden im Anfang der Jahre, oder $\frac{dy}{y} = s$ *nimmt ab* von dem erſten Jahre des Alters an, bis auf ein gewiſſes Alter vom zehnten, eilften, zwölften Jahre; *nachher nimmt ſie immerfort wieder zu*, bis ſie zuletzt = 1 wird. Dieſs iſt die Grenze, die ſie nicht ganz erreicht, wenn die Curve aſymptotiſch iſt, der ſie ſich aber unendlich nähert. So iſt einmal $s = \frac{dy}{y}$ ein Minimum. Die Tabellen ſtimmen zwar hierin nicht völlig zuſammen; aber bey den meiſten ſind die Abweichungen entweder ſo unerheblich, oder fallen ſo, daſs man geneigt werden muſs, ſie nicht ſo wohl in der Natur der Sache, als in der Unvollſtändigkeit der Verzeichniſſe ſelbſt zu ſuchen. Die *Süſsmilchiſche* Tafel zeiget die bemerkte Regel am deutlichſten.

lichsten. Denn wenn auch hier Jahre zwischen andern vorkommen, die Ausnahmen machen, so ist es fast einleuchtend, daſs dieſs an den zu klein genommenen Zahlen in der Tabelle liege. Ein anders ist es, ob nicht, wie die Abnahme der Sterblichkeit in den ersten Jahren, so die *Zunahme* in der Folge selbst, in einigen Jahren vorzüglich viel gröſser sey als in andern? Sind gewisse Perioden im Leben vorzüglich gefährlich, (denn die Vorurtheile von besondern *Stufenjahren* werden durch die Tabellen widerlegt.) so kann es darin bestehen, daſs alsdenn die Sterblichkeit auf einmal schneller zunimmt, ohne daſs sie eben gröſser seyn dürfe, als in den folgenden Jahren.

2) Eben so *die mittlere Lebensdauer*. *Diese nimmt zu* in den ersten Jahren; *wird ein Gröſstes*, und *nimmt alsdenn beständig ab*, bis o, welches ihre unerreichbare Grenze ist. Sie ist $\frac{S. y\,dx}{y}$. Dieſs wird einmal ein *Maximum*, oder $d\,\frac{S. y\,dx}{y}$ wird einmal = o.

3) *Die jährlichen Decremente* nehmen (wenige unbeträchtliche Abweichungen bey Seite gesetzt) *anfangs ab* bis zum zehnten, eilften, zwölften Jahr; *dann wachsen sie wiederum* bis zwischen 60 und 70, nach *Süſsmilch*, *und von da an nehmen sie von neuem ab.* Die Decremente werden also einmal ein *Minimum* und einmal ein *Maximum*. Das ist, die Aequation $\frac{ddv}{dx^2} = o$ muſs *zwo reelle* Wurzeln haben.

Diese Eigenschaften führen aber zu keiner bestimmten Gleichung, ob man gleich so viel leicht sieht, dass die Linie *hyperbolischer* oder *logarithmischer Art* seyn müsse. In dem Jahr, wo die anfangs abnehmende Sterblichkeit am kleinsten ist, kann man die Linie theilen, und sie aus *zweyen Stücken* logarithmischer Linien zusammen setzen. Für den Theil von da an bis ans Ende wird die Voraussetzung, *dass die Sterblichkeit in dem gleichen Verhältniss der Jahre zunehme, mit den bisher bekannten Tabellen am meisten übereinstimmen.*

Nach dieser Voraussetzung sey die Sterblichkeit für das Jahr, wo sie ein *Minimum* ist s, für die folgenden Jahre also $= s + nx$, wenn x die Jahre ausdrücket.

Es ist n eine beständige Grösse. Es sey nun die Anfangszahl a, die Zahl der Gestorbenen z, so ist die Sterblichkeit für das Jahr x, oder $\frac{dz}{a-z} = (s + nx)\, dx$, wo dx eine beständige Grösse ist; so wie auch s. Diess ist eine Gleichung für eine *logarithmische* Linie. Wird $a - z = y$ gesetzt, da denn y die Zahl der *Lebenden* ist, so wird $-\log. y = \left(s + \frac{nx}{2}\right) x$.

Wenn $x = o$, so ist $y = a$. Folglich die *vollständige Gleichung*

$$\log. a - \log. y = \left(s + \frac{nx}{2}\right) x, \text{ oder}$$

$$\log. \frac{a}{y} = \left(s + \frac{nx}{2}\right) x.$$

Für

Für $y = o$, das ist, für den Fall, wenn alle weggestorben seyn sollen, ist $\log. \frac{a}{y} = \log. o = \infty$, also x ein *unendliches*. Das ist, die Linie muss angesehen werden als eine *asymptotische*, und zwar nach dem obigen als eine solche, deren Asymptote von einer höhern Ordnung ist.

Ueberhaupt aber ist in jeder Linie, wenn z die Zahl der Verstorbenen nach x Jahren ist, und A die Zahl der Lebenden in dem gegebenen Alter a, der baare *Wehrt der Leibrente*, oder

$$\lambda \overline{a} = \int \frac{(A-z)}{A.r^x} dx = \int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{A} \int \frac{z\,dx}{r^x}.$$

Ingleichen ist die *mittlere Lebensdauer* oder

$$E\overline{a} = x - \frac{1}{A} \int z\,dx,$$

12.

Ferner ist in jeder Sterblichkeitslinie die *mittlere Lebensdauer* von der *wahrscheinlichen* verschieden, ausgenommen, wenn die Linie eine gerade ist. Diess ist eine Folge aus der Natur einer jeden Curve überhaupt. *Lambert* gab davon schon einen allgemeinen Beweis. *) Es läst sich kurz so zeigen. Es sey *Fig.* 2. $EG = x$ das *Complement des Alters*, $EM = y$, die *Summe der Lebenden im Alter* E; so ist nach dem obigen die *mittlere Lebensdauer* $= \int \frac{y\,dx}{y}$. Diese sey $= EF$. Soll nun

*) *Beyträge* 3ter Theil. p. 503.

nun E F zugleich das *wahrscheinliche künftige Leben seyn*, so ist die Applicata in F, oder $FV = \frac{1}{2} ME$. Es sey aber überhaupt $x = ay^n + by^m ++$, so ist $ydx = nay^n dy + mby^m dy ++$ und

$$\frac{S.\, ydx}{y} = \frac{n}{n+1} \cdot ay^n + \frac{m}{m+1} \cdot by^m ++ = EF,$$

der *mittlern Lebensdauer*. Es sey auch GF, x' wozu die Ordinate y' gehöret, so ist $x' = a'y'^n + by'^m +++$.

Soll nun $y' = \frac{1}{2} y$ seyn, so ist

$$x' = a\left(\frac{1}{2}y\right)^n + b\left(\frac{1}{2}y\right)^m ++$$

Daher

$$x - x' = EF = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) ay^n + \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) by^m ++$$

Dieser letzte Wehrt von E F mit dem ersten verglichen, erfordert, dass $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2^n}$ sey.

Aber daraus folgt $\frac{1}{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und $n + 1 = 2^n$, welche Gleichung nur für zwey Fälle mögliche Wehrte giebt, nämlich für $n = 0$ und $n = 1$.

Dieselbigen Wehrte kommen auch für m.

Also ist entweder $x = a + b + c ++$ was nicht angeht, oder $x = (a + b + c ++) y$, welches eine Gleichung für die gerade Linie ist. Man sehe auch die Beweise davon beym *Lambert* *) und *Florencourt*. **)

Wenn

*) *Beyträge* 3 Theil, p. 501 und folg.

**) *Abhandlung aus der politischen Arithmetik*. p. 78 und folg.

Wenn die Linie *gerade* ist, so erfolgt das Absterben *gleichförmig*. Dafs in diesem Fall auch die *mittlere Lebensdauer* mit der *wahrscheinlichen* zusammen fallen müsse, kann sehr leicht erwiesen werden. Denn nach der Voraussetzung ist

$$\overset{1}{-}A = A - \Delta A;\ \overset{2}{-}A = A - 2.\Delta A, \text{ und}$$

$$\overset{n}{-}A = A - n\Delta A;\ \overset{x}{-}A = A - x.\Delta A.$$

Folglich ist die *mittlere Lebensdauer* oder

$$E\bar{a} = \frac{A - \Delta A + A - 2\Delta A + \ldots + A - x\Delta A}{A} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{xA - \frac{(x+1)x}{2}.\ \Delta A}{A} + \frac{1}{2}.$$

und (weil $A = x.\Delta A$) auch $= x - \frac{x+1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$, Hier ist x die *Alterserganzung*. Die *wahrscheinliche Dauer* ist $= n$ wenn $A - n\Delta A = \frac{1}{2}A$, also $n = \frac{x}{2}$ ist.

Indessen ist der Unterschied zwischen beyden nicht sehr grofs. Dafs auch ein Mann wie *Dan. Bernoulli* *) (und dazu um 1760, da schon *Simpsons Select Exercises* 1752 gedruckt sind,) glauben können, es liege blofs an Fehlern der Tabellen, wenn beyde nicht gleich grofs herauskommen, (bey *Seyberth* und andern, die diese Meinung gehabt, ist es so befremdend nicht) gehört zu den mehreren Fehlschlüssen in diesem Theil der Arithmetik, wofür sich auch die gröfsten Männer nicht gehütet

*) *Memoires de l' Academie des Sciences.* Paris 1760.

gehütet haben. Das vorlauffende allgemeine Raisonnement, was man als eine Art von Ueberschlag in Gedanken zu machen pflegt, hat hier mehrmalen sehr irre geführt. Auch *Lambert* *) scheint noch die Leibrenten mit den Zeitrenten für die mittlere Lebensdauer verwechselt zu haben, wie *Seyberth* und *Deparcieux* es gethan hatten. Ein ähnlicher Fehlschluss von *Moivre* kommt unten vor.

13.

Zu §. 67.

Sollen die *Theile des Jahrs*, die der Rentenier noch durchlebet, ausser den *ganzen* Jahren gerechnet, dabey aber die dafür zu zahlende Rente nicht eher als am Ende des Jahrs erleget werden, so wird das zu dem baaren Wehrt der Leibrente auf volle Jahre noch hinzukommende so berechnet.

1) Wenn nur vollendete *halbe* Jahre gerechnet werden, so wird die Hälfte der in einem Jahr Sterbenden auf den Anfang des Jahrs gesetzet, und dafür nichts weiter bezahlet; die andere Hälfte aber als in der Mitte des Jahrs sterbend angenommen. Folglich ist dafür noch an diese letzteren eine halbjährige Hebung zu erlegen. Diese macht für das *erste* Jahr $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta A}{r}$, für das zweyte $\frac{1}{4} \frac{\Delta\, ^{1}A}{r^2}$, und so ferner.

Folglich

*) *Beyträge* 3 Theil. §. 34. p. 499.

Folglich für alle Jahre zusammen

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta A}{r}+\frac{\Delta^{\frac{1}{-}}A}{r^2}++\right)=\frac{1}{4^r}\left(1-\frac{\lambda_a}{p}\right)=\frac{1\ T}{4\cdot r}=\frac{1}{4}R.$$

§. 3.

Soll das, was für die Zwischenzeiten fällt, sogleich *beym Tode des Renteniers* bezahlet werden, so beträgt solches für das erste Jahr $\frac{1}{4}\ \frac{\Delta A}{r^{\frac{1}{2}}}$; für das zweyte $=\frac{1}{4}\ \frac{\Delta^{\frac{1}{-}}A}{r^{\frac{1}{2}}}$ u. s. f. Das ist für alle Jahre zusammen $=\frac{1}{4}\ \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\cdot\ T.$

Werden die *halbjährigen* Renten in diesem letztern Fall gerechnet zu $\frac{r-1}{2}$, so beträgt das am Ende des ersten Jahrs mehr zu zahlende

$$\frac{1}{4}\ \Delta A+\frac{r-1}{4}\ \Delta A=\frac{r+1}{8}.\ \Delta A.$$

davon der baare Wehrt $\frac{r+1}{8\cdot r}\ \Delta A$ ist. Für das zweyte Jahr bekommt man $\frac{r+1}{8}.\ \frac{\Delta^{\frac{1}{-}}A}{r^2}$ u. s. f.

Folglich für alle Jahre zusammen $\frac{r+1}{8}.\ \frac{T}{r}.$

2) Sollen *Vierteljahre* gerechnet werden, so ist am Ende des ersten Jahrs nachzuzahlen,

$$\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\Delta A+\frac{2}{4}\Delta A+\frac{1}{4}\Delta\ A\right)=\frac{3}{8}\ \Delta\ A,$$

davon der baare Wehrt $\frac{3}{8}.\ \frac{\Delta A}{r}$ ist.

Denn

Denn $\frac{3}{4}$ Δ A lebt noch ein Vierteljahr; dann

$\frac{2}{4}$ Δ A auch ein Vierteljahr, und endlich

$\frac{1}{4}$ Δ A noch ein Vierteljahr.

Auf alle Jahr zusammen macht diess $\frac{3}{8} \cdot \frac{T}{r}$.

3) Wenn auf $\frac{1}{n}$tel *Theile* des Jahrs zu rechnen ist, so wird die Zulage für das erste Jahr

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{(n-1)}{n} \cdot \Delta A + \frac{n-2}{n} \cdot \Delta A + + \frac{\Delta A}{n}\right)$$

$$= \frac{n.\overline{n-1}}{2n^2} \cdot \Delta A,$$ davon der baare Wehrt

$$= \frac{n.(n-1)}{2n^2} \cdot \frac{\Delta A}{r}$$ ist. Diess für alle Jahr zusammen macht $\frac{n.(n-1)}{2n^2} \cdot \frac{T}{r}$ das ist $= \frac{1}{2} \frac{T}{r}$, wenn *n* unendlich gross ist.

Sollen diese Theile der Renten *sogleich bey dem Tode des Renteniers* bezahlt werden, so ist für das erste Jahr zuzulegen

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{\Delta A}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{\Delta A}{r^{\frac{2}{n}}} + + \frac{\Delta A}{r^1}\right).$$

Wenn *n* unendlich gross ist, so ist das so viel als eine $\frac{1}{n}$tel jährige Rente, deren Wehrt $\frac{1}{n}$ ist. Der baare Wehrt derselben verhält sich zum baaren Wehrt der am Ende des Jahrs zahlbaren Rente 1, wie p′ : p. (*Zusätze zum ersten Cap.* §. 9.) $= \frac{1}{\text{log. nat. } r} : \frac{1}{r-1}$. Folglich

ist

ist das zuzulegende Stück für das erste Jahr $= \frac{p'}{p} \cdot \frac{\Delta A}{r}$.

So für das zweyte Jahr $\frac{p'}{p} \cdot \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r}$, u. s. f. Also für alle Jahr zusammen $\frac{p'}{pr} \cdot T$, was sehr wenig mehr als $\frac{T}{r}$ oder den auf Ein Jahr zurück discontirten Wehrt der Erbschaft 1, ausmacht.

14.

Zu §. 68.

Von halb- und vierteljährlich zahlbaren Leibrenten.

Wenn *jedes halbe* Jahr die Leibrente $\frac{1}{2}$ bezahlet wird, so wird selbige auch noch an *die Hälfte der im Lauf eines jeden Jahrs Sterbenden bezahlet*, folglich ist die Ausgabe auf ihren baaren Wehrt reducirt, am Ende des ersten halben Jahrs

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{\frac{1}{2}}{-}A}{r^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2A} \left(\frac{\overset{1}{-}A + \frac{1}{2} \Delta A}{r^{\frac{1}{2}}} \right);$$

Am Ende des *zweyten halben* Jahrs

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{4} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{r^{1}},$$ des *dritten halben* Jahrs

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \frac{\overset{1\frac{1}{2}}{-}A}{r^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{A} \frac{(\overset{2}{-}A + \frac{1}{2} \Delta \overset{1}{-}A)}{r^{1\frac{1}{2}}}$$

des *vierten halben* Jahrs

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}A}{r^{2}}.$$

und

und für das *letzte halbe* Jahr, (oder das $(2x-1)^{te}$ *halbe* Jahr.

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{x-1}{-}A}{r^{x-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}A \; \frac{\left(\overset{x}{-}A + \frac{1}{2}\,\Delta\overset{x-1}{-}A\right)}{r^{x-\frac{1}{2}}}$$

Der folgende Termin für das $2x^{te}$ halbe Jahr ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{A} \cdot \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x}} = 0.$$

Also ist der ganze baare Wehrt S in *halbjährlichen* Zahlungen

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{1}{-}A}{r^{2}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x}}\right) +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{1\frac{1}{2}}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{r^{1\frac{1}{2}}} + + \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^{x-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\lambda\overline{a} + \frac{1}{2} \cdot r^{\frac{1}{2}} \,.\, \lambda\overline{a} + \frac{1}{4}\,r^{\frac{1}{2}}\,R.$$

$$\text{wenn } R = \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{r^{2}} + + + \frac{\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^{x}}\right)$$

wie vorher gesetzet wird.

Und weil $1-(r-1)\,\lambda\overline{a} = r\,R$ (*Zusätze zu Cap. II.* §. 3.) also $\frac{1}{4r^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4}\,r^{\frac{1}{2}}\,\lambda\overline{a} + \frac{1}{4\,r^{\frac{1}{2}}} \cdot \lambda\overline{a} = \frac{r^{\frac{1}{2}}\,.\,R}{4}$,

so bekommt man $S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{(r+1)}{r^{\frac{1}{2}}}\lambda\overline{a} + \frac{1}{4r^{\frac{1}{2}}}\right.$.

Allein

Allein für die Praxis muss man hier wiederum so rechnen, wie im Cap. I. §. 22., nämlich *die Zinsen der in der Mitte des Jahrs zu zahlenden Termine werden angenommen als die Hälfte der jährlichen Zinsen*, und die Sache so angesehen, als sey am *Ende des ersten Jahrs folgendes zu zahlen:*

1) Das was auch bey jährlichen Zahlungen vorkommt, nämlich $\frac{\overset{1}{-}A}{A}$, dessen baarer Wehrt $\frac{\overset{1}{-}A}{Ar}$ ist.

2) Die halbjährlichen Zinsen von $\frac{1}{2}.\ \frac{\overset{1}{-}A}{A}$, welche Ausgabe in der Mitte des Jahrs vorgefallen ist. Davon ist der baare Wehrt

$$\frac{1}{2}(r-1).\frac{1}{2}\frac{\overset{1}{-}A}{Ar}=\frac{(r-1)\overset{1}{-}A}{4.\ Ar}.$$

3) Die Ausgabe an die Hälfte der in diesem Jahr Abgestorbenen, welche in der Mitte des Jahrs die Rente halb empfangen haben, und die halbjährigen Zinsen davon am Ende des ersten Jahrs. Beydes macht zusammen,

$\frac{1}{4}.\ \frac{\Delta A}{A}+\frac{1}{4}\frac{\Delta A}{A}.\ \frac{\overline{r-1}}{2}$, davon der baare Wehrt

$$=\frac{1}{4}\frac{\Delta A}{Ar}+\frac{1}{4}\frac{\Delta A}{Ar}\frac{\overline{r-1}}{2}$$

Auf gleiche Weise ist die Ausgabe am Ende des *zweyten* Jahrs auf ihren baaren Wehrt reducirt

$$=\frac{\overset{2}{-}A}{Ar^2}+\frac{1}{4}.\ \overline{r-1}\ \frac{\overset{2}{-}A}{Ar^2}+\frac{1}{4}\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{Ar^2}+\frac{1}{4}(r-1)\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{Ar^2}$$

Folglich ist die gesammte Ausgabe S für alle Jahre

$$= \lambda \overline{a} + \frac{\overline{r-1}}{4} \cdot \lambda \overline{a} + \frac{1}{4} R + \frac{1}{4} \cdot \frac{\overline{r-1}}{2} \cdot R$$

Aber $(r-1)\lambda\overline{a} = 1 - rR$ (§. 3.) und $(r-1)\lambda\overline{a}$ $+ rR - (r-1)R = (r-1)\lambda\overline{a} + R = 1 - (r-1)R.$

Daher wird $S = \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} - \frac{(r-1)R}{4}$

$$+ \frac{1}{4} \frac{(r-1)}{2} \cdot R = \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} - \frac{\overline{r-1}}{8} \cdot R.$$

Es ist R schon für sich eine kleine Grösse, es ist nämlich der baare Wehrt einer beym Tode der Person zahlbaren Summe 1, auf ein Jahr zurück discontirt. Noch mehr ist $\frac{(r-1)R}{8} = \frac{R}{8p}$ unerheblich. Also ist ganz nahe $S = \lambda\overline{a} + \frac{1}{4}$ das ist $\frac{1}{4}$tel einer Jahrszahlung mehr als der baare Wehrt der jährlichen Leibrente.

So giebt es auch *Simpson* an. *) Hr. *Florencourt* hat in dem von ihm berechneten Beyspiel **) blos den Unterschied, der aus den Zinsen entstehet, in Betracht gezogen, aber den zweyten Unterschied aus der Acht gelassen, daher der letzte zu klein ausfällt.

Sollen *vierteljährliche* Zahlungen geschehen, so ist der Unterschied des baaren Wehrts nahe an $\frac{3}{8}$tel einer Jahrseinnahme, vorausgesetzt nämlich, dass ein Viertel der

*) *Select Exercises.* p. 283.

**) *Abhandlungen aus der Arithmetik.* Cap. IV. §. 14. p. 131.

der Jahreszinſen für die *vierteljährlichen* und die Hälfte der Jahreszinſen für die *halbjährlichen* genommen werden.

Es ſey der baare Wehrt der Leibrente in *vierteljährlichen* Zahlungen = S, ſo iſt, wenn auf den jährlichen Zinsfuſs r gerechnet wird.

$$S = \frac{1}{4A}\left(\frac{\overset{\frac{1}{4}}{-}A}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{\overset{\frac{1}{2}}{-}A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{\overset{\frac{3}{4}}{-}A}{r^{\frac{3}{4}}} + \frac{\overset{1}{-}A}{r^{1}} + + +\right)$$

$$= \frac{1}{4A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^{2}} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^{x}}\right) + \frac{1}{4A}\left(\frac{\overset{\frac{1}{4}}{-}A}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{\overset{1\frac{1}{4}}{-}A}{r^{1\frac{1}{4}}} + \frac{\overset{2\frac{1}{4}}{-}A}{r^{2\frac{1}{4}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{4A}\left(\frac{\overset{\frac{1}{2}}{-}A}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{\overset{1\frac{1}{2}}{-}A}{r^{1\frac{1}{2}}} + +\right) + \frac{1}{4A} \cdot \left(\frac{\overset{\frac{3}{4}}{-}A}{r^{\frac{3}{4}}} + \frac{\overset{1+\frac{3}{4}}{-}A}{r^{1+\frac{3}{4}}} + +\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \lambda\overline{a} + \frac{1}{4A}\left(\frac{\overset{1}{-}A + \frac{3}{4}\Delta A}{r^{\frac{1}{4}}} + \frac{\overset{2}{-}A + \frac{3}{4}\Delta \overset{1}{-}A}{r^{1\frac{1}{4}}} + +\right)$$

$$+ \frac{1}{4A}\left(\frac{\overset{1}{-}A + \frac{2}{4}\Delta A}{r^{\frac{2}{4}}} + \frac{\overset{2}{-}A + \frac{2}{4}\Delta \overset{1}{-}A}{r^{1\frac{1}{4}}} + +\right)$$

$$+ \frac{1}{4A}\left(\frac{\overset{1}{-}A + \frac{1}{4}\Delta A}{r^{1\frac{3}{4}}} + \frac{\overset{2}{-}A + \frac{1}{4}\Delta A}{r^{1\frac{3}{4}}} + +\right).$$

(Es wird nämlich angenommen, daſs während eines Jahrs das Abſterben gleichförmig ſey.) Alſo

$$\overset{\frac{1}{4}}{-}A = A - \frac{1}{4}\Delta A = \overset{1}{-}A + \frac{3}{4}\Delta A.$$

 Folglich

Folglich $S = \frac{1}{4} \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} \cdot r^{\frac{3}{4}} \lambda\overline{a} + \frac{1}{4} r^{\frac{1}{2}} \lambda\overline{a} +$

$+ \frac{1}{4} r^{\frac{1}{4}} \lambda\overline{a} + \frac{3}{16} \cdot r^{\frac{3}{4}}. R.$

$+ \frac{2}{16} \cdot r^{\frac{1}{2}}. R + \frac{1}{16} \cdot r^{\frac{1}{4}} R$

wenn wiederum $R = \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta^{-1} A}{r} + +\right).$

Dagegen, wenn man auf dieselbige Art rechnet, wie vorher, nämlich die Zinsen der innerhalb des Jahrs fallenden Termine zu $\frac{r-1}{4} \cdot \frac{r-1}{2}, \frac{3}{4} (r-1)$ so bekommt man als Ausgabe am Ende des *ersten* Jahrs

1) das gewöhnliche bey jährlichen Zahlungen $\frac{\overset{1}{-}A}{Ar}$.

2) die Zinsen der drey vorhergehenden Termine

$\frac{1}{4} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A} \cdot \left(\frac{(r-1)}{4} \cdot 3 + \frac{\overline{r-1}}{4} \cdot 2 + \frac{\overline{r-1}}{4} \cdot 1.\right)$

deren baarer Wehrt ausmacht

$\frac{3}{8} \overline{r-1} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{Ar}.$

3) Was ausserdem bezahlt ist an die in dem Lauf des Jahrs abgegangene ΔA, mit seinen Zinsen bis Ende des Jahrs, nämlich für den *ersten vierteljährlichen* Termin

$\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{4}\cdot\ \frac{3}{4}\,\frac{\Delta A}{A}\left(1+\frac{\overline{r-1}}{4}\cdot\ 3\right);$$ für den *zweyten*

$$\frac{1}{4}\cdot\ \frac{2}{4}\,\frac{\Delta A}{A}\left(1+\frac{\overline{r-1}}{4}\cdot\ 2\right);$$ für den *dritten*

$$\frac{1}{4}\cdot\ \frac{1}{4}\,\frac{\Delta A}{A}\left(1+\frac{\overline{r-1}}{4}\right).$$

Dieſes zuſammen auf ſeinen baaren Wehrt reducirt, macht

$$\frac{1}{4}\cdot\ \frac{1}{4}\,\frac{\Delta A}{Ar}\cdot(3+2+1)+\frac{1}{4}\cdot\ \frac{1}{4}\cdot\frac{r-1}{4}\cdot\frac{\Delta A}{Ar}\cdot(3.3+2.2+1.1)$$

$$=\frac{3}{8}\,\frac{\Delta A}{Ar}+\frac{7}{32}\,(r-1).\ \frac{\Delta A}{Ar}\cdot.$$

Da nun für das *zweyte* Jahr die Ausgabe, ebenfalls auf den baaren Wehrt reducirt, alle drey Theile zuſammen genommen, iſt

$$=\frac{\overset{2}{-}A}{Ar^2}+\frac{\overset{2}{-}A}{Ar^2}\cdot\frac{3}{8}(r-1)+\frac{3}{8}\cdot\frac{\Delta^{1}A}{Ar^2}+\frac{7}{32}(r-1)\,\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{Ar^2},$$

ſo hat man für alle Jahre zuſammen

$$S=\left(1+\frac{3}{8}\,(r-1)\right)\left(\frac{\overset{1}{-}A}{Ar}+\frac{\overset{2}{-}A}{Ar^2}++\right)$$

$$+\tfrac{3}{8}\left(\frac{\Delta A}{Ar}+\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{Ar^2}++\right)+\tfrac{7}{32}(r-1)\left(\frac{\Delta A}{Ar}+\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{Ar^2}++\right)$$

$$=\lambda\overline{a}+\tfrac{3}{8}\,(r-1)\,\lambda\overline{a}+\tfrac{3}{8}\cdot R+\tfrac{7}{32}\,(r-1)\,R$$

und weil $(r-1)\,\lambda\overline{a}=1-r\,R$

und $(r-1)\,\lambda\overline{a}+R=1-(r-1)\,R$

ſo wird $S=\lambda\overline{a}+\tfrac{3}{8}-\tfrac{3}{8}\,(r-1)\,R+\tfrac{7}{32}\cdot\ (r-1)\,R$

$=\lambda\overline{a}+\tfrac{3}{8}-\tfrac{5}{32}\,(r-1)\,R.$

das iſt ſehr nahe $\lambda\overline{a}+\tfrac{3}{8}$, wie auch *Simpſon* annimmt.

M 3 15. *An-*

15.

Anmerkung. Wenn die *jährliche* Leibrente *pränumerirt* wird, also die erste Zahlung gleich unmittelbar im Anfang geschiehet, so ist klar, daſs ihr Wehrt um *Eine Jahrshebung* gröſser sey, als wenn sie, wie vorher gerechnet ist, *am Ende des Jahrs* erst zahlbar ist.

Wird die *halbjährliche* pränumerirt, so ist sie nur um *eine Halbjahrshebung* gröſser, als wenn sie am Ende der Termine bezahlet wird. Und da die *halbjährliche gewöhnliche* um $\frac{1}{4}$ einer Jahrshebung besser ist, als die jährliche gewöhnliche, so ist die *halbjährliche vorauszuzahlende* um $\frac{3}{4}$tel Jahrshebung besser als *die jährliche gewöhnliche.* Sollen sie aber beyde vorausbezahlt werden, so ist die *jährliche* um $\frac{1}{4}$tel Hebung besser als die halbjährliche. Ueberhaupt ist es klar, „wenn die Termine „kleiner sind, so ist der Unterschied zwischen den *vor*„*auszuzahlenden* und den *nachzuzahlenden* Renten auch „geringer. Die Wehrte der *nachzuzahlenden* Renten „sind bey *kleinern* Terminen *gröſser*, aber die der *vor*„*auszuzahlenden*, *kleiner.*“

16.

Wenn die Leibrente in $\frac{1}{n}$tel Terminen, welches *augenblickliche* Termine sind, wenn *n* unendlich groſs ist, bezahlet werden soll, so kann ihr baarer Wehrt S, erstlich so gesuchet werden, daſs man den Jahreszinsenfuſs durchaus beybehält; zweytens aber auch auf die zwote

Art,

Art, so daſs die Zinſen für die $\frac{1}{n}$tel Termine ſich verhalten, wie die Termine ſelbſt. Man kann hiervon zuweilen Gebrauch machen. Wenn die Rechnung nach dem *jährlichen* Zinſenfuſs gemacht wird, und die Termine *augenblickliche* ſeyn ſollen, ſo bekommt man für das erſte Jahr anſtatt $\frac{\frac{1}{}A}{Ar}$, folgende Theile, (jede auf ihren baaren Wehrt reducirt),

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{A-\frac{\Delta A}{n}}{Ar^{\frac{1}{n}}}+\frac{A-\frac{2\Delta A}{n}}{Ar^{\frac{2}{n}}}++\frac{A-\Delta A}{Ar}\right)$$

Dieſs macht $\frac{1.\,A}{n.\,A}\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}++\frac{1}{r}\right)$

$$-\frac{\Delta A}{A.\,n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}++\frac{n}{r^{\frac{n}{n}}}\right)$$

Nun iſt $\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}++\right)=\int\frac{dx}{r^x}$, wo nach der Integration $x=1$ wird. Das iſt gleich *dem Wehrt einer in augenblicklichen Terminen zu zahlenden Rente*, welcher (§. 9. *Zuſätze* zu Capitel I.) ſich zu $\frac{1}{r}$ verhält, wie $p' : p$, wenn p das *Grundcapital*, und $p'=\frac{1}{\text{log.nat.}\,r}$, oder das ähnliche *Grundcapital bey augenblicklichen Terminen* iſt. Folglich iſt auch

$$\frac{A}{A}\cdot\frac{1}{n}\cdot\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}++\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}\right)=\frac{A}{A}\cdot\frac{p'}{pr}.$$

 Ferner

Ferner ist $\frac{1}{n^2}\int\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}++\frac{n}{r^{\frac{n}{n}}}\right)=\int\frac{x\,dx}{r^x}$,

(wenn nach der Integration $x=1$) $=\frac{p'}{pr}\;(p'-p)$.

(§. 23. *Zus.* zu Cap. I.)

Denn

$$\int\frac{x\,dx}{r^x}=p'\left(p'-\frac{p}{r}\right)-\frac{p'}{r}=\frac{p'p'(r-1)}{r}-\frac{p'}{r}$$

$$=\frac{p'}{pr}\,(p'-p).$$

Also kommt für das *erste* Jahr

$$\frac{A}{A}\cdot\frac{p'}{pr}-\Delta A\,\frac{p'}{pr}\,(p'-p).$$

Für das *zweyte* Jahr bekommt man

$$\frac{1}{Ar}\left(\overset{1}{-}A-\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\,\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{Ar}\left(\overset{1}{-}A-\frac{2\Delta\overset{1}{-}A}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}$$

$$++\frac{1}{Ar}\left(\overset{1}{-}A-\frac{n\,\Delta\overset{1}{-}A}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{p'}{p.r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{p'}{p.r}\,(p'-p).$$

Auf eine ähnliche Art hat man aus allen Jahren zusammen

$$\frac{1}{A}\cdot\left(A+\frac{\overset{1}{-}A}{r}+\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}++\right)\frac{p'}{pr}$$

$$-\frac{1}{A}\left(\Delta A+\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{r}+\frac{\Delta\overset{2}{-}A}{r^2}++\right)\frac{p'}{pr}\cdot(p'-p)$$

$=$

$= \frac{p'}{pr} \cdot (1+\lambda\overline{a}) - \frac{p'}{pr} (p'-p.)\ r\,R$ (*Zus.* zum I. Cap. §. 14. und *Zus.* zum II. Cap. §. 3).

Für $r = 1{,}04$ ist $\frac{1}{\text{log. nat. } r} = \frac{1}{0{,}03922} = 25{,}49$ ganz nahe; $p = 25$, also $p' - p = 0{,}49$ und $\frac{p'}{p} = 1{,}0196$, $\frac{p'}{pr} = 0{,}98$.

Daraus wird *der gesuchte Wehrt der Leibrente für augenblickliche Hebungen* $= 0{,}98\,(1+\lambda\overline{a}) - 0{,}98 \cdot 0{,}49 \cdot r\,R$, und weil $1 - \frac{\lambda\overline{a}}{p} = r\,R$, so bekommt man

$0{,}98\,(1 + \lambda\overline{a} - 0{,}49 + \frac{0{,}49}{25}\lambda\overline{a})$, was ganz nahe ist $= (0{,}98 + 0{,}02)\,\lambda\overline{a} + 0{,}5 = \lambda\overline{a} + \frac{1}{2}$.

Zusatz. Wenn in der Gleichung für augenblickliche Leibrenten

$S = \frac{p'}{pr}(1+\lambda\overline{a}) - \frac{p'}{pr}(p'-p)\,r\,R$ für

$\lambda\overline{a} = p - p.\,rR$. §. 3. und für $p = \frac{1}{r-1}$, die letzten Ausdrücke gesetzet werden, so wird

$$S = \frac{p'}{pr} + \frac{p'}{r}(1 - rR) - \frac{p'p'}{p}R + p'R$$

$$= \frac{p'}{r}\left(\frac{1}{p} + 1\right) - \frac{p'p'}{p} \cdot R = p' - \frac{p'p'.R}{p}.$$

17.

Zusatz. Setzet man in dem obigen Ausdruck

$$\frac{p'}{pr}(1+\lambda\overline{a}) - \frac{p'}{pr}(p'-p)\, r\, R, \quad p'=p,$$

so wird solcher

$$= \frac{\lambda\overline{a}}{r} + \frac{1}{r} = \frac{\lambda\overline{a}}{r} + \frac{\lambda\overline{a}}{pr} + R = \lambda\overline{a} + R.$$

Anmerkung. Nach der Voraussetzung des *gleichförmigen Absterbens* ist $R = \frac{1}{\alpha} \cdot \int\frac{dx}{r^x}$, das ist gleich der *Zeitrente auf die Altersergänzung, dividirt durch diese letztere.* Diess ist nach *Simpson* *) der Unterschied zwischen der *augenblicklichen Leibrente* und der *jährlichen.* Das ist es aber nicht; auch nach der erwähnten Hypothese nicht, wenn nicht zugleich $p'=p$ gesetzet wird. Nach der letzten Hypothese würde die Rechnung für augenblickliche Leibrenten folgende seyn.

Es ist $\lambda\overline{a} = \int\frac{\alpha-x}{\alpha} \cdot \frac{dx}{r^x} = \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x}$

$$= p'\left(1-\frac{1}{r^x}\right) - \frac{1}{\alpha}p'\left(\int\frac{dx}{r^x} - \frac{x}{r^\alpha}\right).$$

Da nun nach der Integration $x=\alpha$ wird, so wird

$$\lambda\overline{a} = p' - \frac{p'}{r^\alpha} - \frac{1}{\alpha}p'\int\frac{dx}{r^\alpha} + \frac{p'}{r^\alpha}$$

$$= p'\left(1 - \frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{r^x}\right)$$

Allein für *jährliche* Renten ist §. 8. $\lambda\overline{a} = p\left(1 - \frac{r}{\alpha}\int\frac{dx}{r^x}\right)$.

Folglich

*) *Select. Exercises.* p. 324.

Folglich der Unterschied $p' - p + \left(\frac{rp - p'}{\alpha}\right)\int\frac{dx}{r^\alpha}$ was dann erst $= \frac{1}{\alpha}\int\frac{dx}{r^\alpha}$ wird, wenn $p' = p$ gesetzet wird.

18.

Nun auch, wenn die $\frac{1}{n}$tel jährlichen Zinsen zu $\frac{r-1}{n}$ angenommen werden.

Die Ausgabe für das *erste* Jahr ist:

1) wie bey jährlichen Terminen $\frac{\overset{1}{-}A}{A.r}$

2) Die Zinsen der in dem Jahr gefallenen, an $\frac{\overset{1}{-}A}{A}$ bezahlten Termine, welche noch am Ende des Jahrs nachzuzahlen sind, auf ihren baaren Wehrt zurück discontirt. Diese Zinsen für sich machen

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\overline{r-1}+\frac{n-2}{n}(r-1)++\frac{1}{n}\cdot\overline{r-1}\right)$$

$$=\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{(n^2-n)}{2n^2}(r-1)$$ und discontirt

$$\frac{\overset{1}{-}A}{Ar}\cdot\left(\frac{n^2-n}{2n^2}\right)\cdot\overline{r-1}:$$

3) Die noch ausserdiess an die in dem Lauf des Jahrs Abgegangenen gezahlten Termine, nebst den Zinsen davon. Die Termine selbst discontirt, sind

$$\frac{\Delta A}{Ar}\,\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}++\frac{1}{n}\right)=\frac{\Delta A}{A.r}\left(\frac{n^2-n}{2n^2}\right).$$

Die

Die Zinsen davon, wie solche am Ende des Jahrs nachzuzahlen sind, und discontirt, machen

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta A}{A.r}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n-1).(r-1)}{n}+\frac{1}{n}\frac{\Delta A}{Ar}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-2}{n}(r-1)++$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta A}{Ar}\cdot(r-1)\left(\frac{(n-1)^2+(n-2)^2}{n^2}++\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{\Delta A}{A.r}\cdot r-1\;\frac{(n-1).\,n.\,(n+1)}{1.\,2.\,3.\;\;n^3}.$$

Also die Summen aller Stücke zusammen,

$$=\frac{\overset{1}{-}A}{Ar}+\frac{\overset{1}{-}A}{Ar}\cdot(r-1)\frac{(n^2-n)}{2n^2}$$

$$+\frac{\Delta A}{Ar}\frac{(n^2-n)}{2n^2}+\frac{\Delta A}{Ar}(r-1)\frac{(n-1).\,n.\,(n+1)}{1.\,2.\,3.\;\;n^3}.$$

Für das *zweyte* Jahr ist die Ausgabe,

$$\frac{\overset{2}{-}A}{Ar^2}+\frac{\overset{2}{-}A}{Ar^2}\cdot(r-1)\frac{n^2-n}{2n^2}+$$

$$\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{Ar^2}\frac{(n^2-n)}{2n^2}+\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{Ar^2}(r-1)\frac{\overline{n-1}.\,n.\,\overline{n+1}}{1.\,2.\,3.\;n^3}$$

Und so ferner für die folgende Jahre.

Folglich die *Ausgabe für alle Jahre zusammen*

$$S=\lambda\overline{a}+\frac{n^2-n}{2n^2}(r-1)\lambda\overline{a}$$

$$+\frac{n^2-n}{2n^2}\cdot R+\frac{\overline{n-1}.\,n.\,\overline{n+1}}{1.\,2.\,3.\;\;n^3}\cdot(r-1)R.$$

Und weil $(r-1)\lambda\overline{a}+R=1-(r-1)R$, so ist

$$S=\lambda\overline{a}+\frac{n^2-n}{2n^2}-\left(\frac{n^2-n}{2n^2}-\frac{n-1.\,n.\,\overline{n+1}}{2.\,3.\;\;n^3}\right)r-1.R.$$

Wird

Wird *n* unendlich groſs, wie bey augenblicklichen Zahlungen, ſo hat man $S = \lambda \overline{a} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(r - 1) R$, ganz nahe $\lambda \overline{a} + \frac{1}{2}$.

19.

Zu §. 76.

Wenn die Rente *veränderlich* iſt, und nach einem gewiſſen Geſetze ſteiget oder fällt, ſo iſt der allgemeine Ausdruck für die *Leibrente*

$$\lambda \overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r}\overset{1}{-}l + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2}\overset{2}{-}l + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3}\overset{3}{-}l\right),$$ wo

$\overset{1}{-}l$ die Rente des erſten Jahrs und $\overset{2}{-}l\ \overset{3}{-}l$ u. ſ. w. die *veränderten Penſionen* der folgenden Jahre ſind,

Wenn die jährliche Hebung in einem geometriſchen Verhältniſs ſteiget, deſſen Exponent *n* iſt, ſo hat man

$$L\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r}\cdot 1 + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2}\cdot n.\ 1 + +\right)$$ und

$$n\,L\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}An}{r}\,1 + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2}\,n^2\,1 + + +\right)$$

wo dann wiederum ſtatt 1 die Einheit geſetzet, und $\frac{1}{r:n}$ für $\frac{n}{r}$, wird

$$n\,L\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r:n} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2:n^2}\right).$$

Zuſatz 1. Es iſt alſo $n\,L\overline{a}$ eine Leibrente nach dem Zinsfuſs $r:n$ berechnet.

Zuſatz

Zusatz 2. Diese Leibrente kann aber berechnet werden durch die Reihe $\frac{\Delta A}{r:n} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{r^2:n^2} ++$ oder durch eine Reihe der folgenden Differenzen

$\frac{\Delta^n A}{r:n} + \frac{\Delta^n \overset{1}{-}A}{(r:n)^2} +$ wie es oben bey den gewöhnlichen Leibrenten gewiesen ist, §. 3 — 6.

Zusatz 3. Wenn r:n von einem der gewöhnlichen Zinsfüssen, wornach die Tabellen berechnet sind, nicht sehr abweichet, so läſst sich der Wehrt durch die Approximation, nach Cap. II. §. 73. 74. erhalten.

20.

Zu §. 77.

Wenn die Rente im ersten Jahre 1 ist, im zweyten 2; im dritten 3; und so weiter, so ist der Wehrt dieser Leibrente

$$L\,\overline{a} = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{2\,\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{3\,\overset{3}{-}A}{r^3} ++ \frac{x\,\overset{x}{-}A}{r^x}\right)$$

$$= \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{A}{r} - \frac{\Delta A}{r} + \frac{2\,\overset{1}{-}A}{r^2} - \frac{2\,\Delta\overset{1}{-}A}{r^2}\right.$$

$$+ \frac{3\,\overset{2}{-}A}{r^3} - \frac{3\,\Delta\overset{2}{-}A}{r^3} + - + -$$

$$\left. + \frac{x.\,\overset{x-1}{-}A}{r^x} - \frac{x.\,\Delta\overset{x-1}{-}A}{r^x}\right).$$

Wenn

Wenn nun die Reihe

$$\frac{\Delta A}{r} + \frac{2\,\Delta \overset{1}{\overline{A}}}{r^2} + \frac{3\,\Delta \overset{3}{\overline{A}}}{r^3} ++ \frac{x\,\Delta \overset{x-1}{\overline{A}}}{r^x} = M,$$

und $\frac{M}{A} = S$ gesetzet wird,

so ist $L\overline{a} = \frac{L\overline{a} + \lambda\overline{a}}{r} + \frac{1}{r} - S.$

Denn $\frac{1}{A}\left(\frac{A}{r} + \frac{2\,\overset{1}{\overline{A}}}{r^2} + \frac{3\,\overset{2}{\overline{A}}}{r^3} ++ \frac{x.\,\overset{x-1}{\overline{A}}}{r^x}\right)$

$$= \frac{A}{Ar} + \frac{1}{Ar}\left(\frac{\overset{1}{\overline{A}}}{r} + \frac{\overset{2}{\overline{A}}}{r^2} ++ \frac{\overset{x}{\overline{A}}}{r^x}\right)$$

$$+ \frac{1}{Ar}.\left(\frac{\overset{1}{\overline{A}}}{r} + \frac{2\,\overset{2}{\overline{A}}}{r^2} + \frac{3\,\overset{3}{\overline{A}}}{r^3} + \frac{(x-1)\,\overset{x-1}{\overline{A}}}{r^{x-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{r} + \lambda\overline{a} + \frac{1}{r}L\overline{a}.$$

Also $L\overline{a} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\lambda\overline{a} + \frac{1}{r}L\overline{a} - S.$

Folglich $r\,L\overline{a} = \lambda\overline{a} + L\overline{a} + 1 - r\,S.$

Und $L\overline{a} = \frac{\lambda\overline{a} + 1 - r\,S}{r-1}.$

21.

Die Reihe $M = \frac{\Delta A}{r} + \frac{2\,\Delta \overset{1}{\overline{A}}}{r^2} + \frac{3\,\Delta \overset{2}{\overline{A}}}{r^3} ++$ kann aus einer ähnlichen Reihe der Differenzen der zwoten Ordnung gefunden werden, nämlich aus der Reihe

$$\frac{\Delta^2 A}{r} + \frac{2.\,\Delta^2 \overset{1}{\overline{A}}}{r^2} + \frac{3.\,\Delta^2 \overset{2}{\overline{A}}}{r^3} ++$$

wenn

wenn schon vorher die Reihe

$\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{r^2} + \frac{\Delta \overset{2}{-} A}{r^3} + +$ die zu den unveränderlichen Leibrenten gehört, bekannt ist.

Denn es ist

$$\Delta A - \Delta \overset{1}{-} A = \Delta \Delta A$$

$$\Delta \overset{1}{-} A - \Delta \overset{2}{-} A = \Delta \Delta \overset{1}{-} A$$

$$\Delta \overset{x-1}{-} A - \Delta \overset{x}{-} A = \Delta \Delta \overset{x-1}{-} A.$$

Daher

$$\frac{\Delta A}{r} + \frac{2 \Delta \overset{1}{-} A}{r^2} + \frac{3 \Delta \overset{2}{-} A}{r^3} + + = \frac{\Delta \overset{1}{-} A + \Delta^2 A}{r}$$

$$+ \frac{2 \Delta \overset{2}{-} A + 2 . \Delta^2 \overset{1}{-} A}{r^2} + + \frac{x . \Delta \overset{x}{-} A}{r^x} + \frac{x \Delta \overset{x-1}{-} A}{r^x} . .$$

Nun sey auch die ähnliche Reihe der zwoten Differenz

$\frac{\Delta \Delta A}{r} + \frac{2 \Delta \Delta \overset{1}{-} A}{r^2} + + = \Delta M$ und die Reihe

$\frac{\Delta A}{r} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{r^2} + + = R' (= R. A. §. 3.)$,

so ist $M = \Delta M + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{r} + \frac{2 \Delta \overset{2}{-} A}{r^2} + \frac{3 \Delta \overset{3}{-} A}{r^3} + +$

weil aber $M = \frac{\Delta A}{r} + \frac{2 \Delta \overset{1}{-} A}{r^2} + \frac{3 \Delta \overset{2}{-} A}{r^3} + +$

so ist $r M = \Delta A + \frac{2 \Delta \overset{1}{-} A}{r} + \frac{3 \Delta \overset{2}{-} A}{r^2} + +$

Folglich

Folglich $r\,M = r\,R' + \frac{2\,\overset{1}{\Delta}A}{r} + \frac{2\,\overset{2}{\Delta}A}{r^2} + +$
$= r\,R' + M - \Delta\,M$. Daher dann ferner
$(r-1)\,M = r\,R' - \Delta\,M$.

Es ist $r\,R' = r.\,A.\,R$, das ist, *der Wehrt der Erbschaft*, aus dem man die gewöhnliche Leibrente berechnet, mit A multiplicirt, §. 3. Wird nun dazu die Reihe $\Delta\,M$ gesucht, die sich bey der *Süssmilchischen* Sterblichkeitsordnung leichter finden läst, weil sie weniger Glieder hat, so wird auch der Wehrt der veränderlichen Leibrente leicht berechnet.

Es ist nämlich

$$(r-1)\,L\overline{a} = 1 + \lambda\,\overline{a} - r\,S$$

und $S = \frac{M}{A}$, und $M = \frac{r\,R' - \Delta M}{r-1}$.

Also $(r-1)\,L\overline{a} = 1 + \lambda\,\overline{a} - \frac{r.\,(r\,R' - \Delta M)}{A\,(r-1)}$

$\left(\text{und weil } p = \frac{1}{r-1}\right) = 1 + \lambda\,\overline{a} - p\,r\left(\frac{r\,R' - \Delta M}{A}\right)$

folglich $L\overline{a} = p\left((1+\lambda\overline{a}) - p\,r\,\frac{(r\,R' - \Delta M)}{A}\right)$.

Zusatz 1. Und da $\frac{p\,r\,R'}{A} = p - \lambda\,\overline{a}$

also $r.\,\frac{p\,r\,R'}{A} = r\,p - r\,\lambda\,\overline{a}$

so wird $L\overline{a} = p\left((1+r)\,\lambda\overline{a} + 1 - r\,p + p.\,\frac{\Delta M}{A}\right)$.

22.

Zusatz 2. Nach der Voraussetzung vom *gleichförmigen Sterben* ist die Reihe

$$S = \frac{1}{A}\left(\frac{\Delta A}{r} + \frac{2\Delta\stackrel{1}{-}A}{r^2} + + \frac{x.\,\Delta\stackrel{x-1}{-}A}{r^x}\right)$$

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\stackrel{x-1}{-}A}{r} + \frac{\stackrel{x-2}{-}A}{r^2} + + \frac{\stackrel{1}{-}A}{r^{x-1}} + \frac{A}{r^x}\right).$$

Denn weil die Decremente ΔA alle einander gleich sind, und ΔA so viel als das letzte Glied in der Reihe der Lebenden, $\stackrel{x-1}{-}A$, so wird

$$\frac{x.\,\Delta\stackrel{x-1}{-}A}{r^x} = \frac{x\,\Delta A}{r^x} = \frac{A}{r^x}.$$ Eben so ist

$$\frac{2\Delta\stackrel{1}{-}A}{r^2} = \frac{\Delta\stackrel{1}{-}A + \Delta\stackrel{1}{-}A}{r^2} = \frac{\stackrel{x-1}{-}A}{r^2} + \frac{\Delta\stackrel{x-1}{-}A}{r^2} = \frac{\stackrel{x-2}{-}A}{r^2},$$

und so weiter.

Folglich wenn zu der Reihe S addirt wird die Reihe

$$\lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{\stackrel{1}{-}A}{r} + \frac{\stackrel{2}{-}A}{r^2} + + \frac{\stackrel{x}{-}A}{r^x}\right)$$ wo das letzte Glied $\frac{\stackrel{x}{-}A}{r^x} = 0$ ist, so wird

$$S + \lambda\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\left(\frac{\stackrel{1}{-}A + \Delta A}{r}\right) + \left(\frac{\stackrel{2}{-}A}{r^2} + \frac{2\Delta\stackrel{1}{-}A}{r^2}\right)\right.$$

$$\left. + + \left(\frac{\stackrel{x}{-}A}{r^x} + \frac{x\Delta\stackrel{x-1}{-}A}{r^x}\right)\right) = \frac{1}{A}\cdot\left(\frac{A}{r} + \frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^3} + + \frac{A}{r^x}\right)$$

$$= \int\frac{1}{r^x}.$$ Daher auch $S = \int\frac{1}{r^x} - \lambda\overline{a}$.

Wenn

Wenn dieser Wehrt von S in den Ausdruck für $L\,\overline{a}$ in §. 19. gesetzet wird, so bekommt man

$$L\,\overline{a} = p\left(1+\lambda\,\overline{a} - r\left(\int\frac{1}{r^x} - \lambda\,\overline{a}\right)\right)$$

$$= p\left((1+r)\,\lambda\,\overline{a} + 1 - r\int\frac{1}{r^x}\right) = (2p+1)\,\lambda\,\overline{a} + p - rp\int\frac{1}{r^x}.$$

Und weil ferner $r\int\frac{1}{r^x} = 1 + \int\frac{1}{r^{x-1}}$, so ist

$rp\int\frac{1}{r^x} = p + p\int\frac{1}{r^{x-1}}$. Daraus wird noch kürzer der Ausdruck: $L\,\overline{a} = (2p+1)\,\lambda\,\overline{a} - p\int\frac{1}{r^{x-1}}$

23.

Zusatz 2. Für *augenblickliche* Renten, dieselbe Hypothese beybehalten, ist $\lambda\,\overline{a} = \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x}$, wo α die Alterergänzung ist. §. 17.

Und $L\,\overline{a} = \int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$. Aber

$\int\frac{x^2\,dx}{r^x} = 2p'\int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{p'x^2}{r^x}$, und

$\int\frac{x\,dx}{r^x} = p'\int\frac{dx}{r^x} - \frac{p'x}{r^x}$, wo p' wiederum $= \frac{1}{\text{log. nat. } r}$, oder das Grundcapital zu augenblicklichen Renten ist.

Daher $L\,\overline{a} = p'\int\frac{dx}{r^x} - \frac{p'x}{r^x} - \frac{2p'}{\alpha}\int\frac{x\,dx}{r^x} + \frac{p'x^2}{\alpha r^x}.$

Nach der Integration ist $x = \alpha$.

Also $L\overline{a} = p'\lambda\overline{a} - \frac{1}{\alpha}p'\int\frac{x\,dx}{r^\alpha}$

$= p'\lambda\overline{a} + p'\lambda\overline{a} - p'\int\frac{dx}{r^\alpha} = 2p'\lambda\overline{a} - p'\int\frac{dx}{r^\alpha}$,

wo $\int\frac{dx}{r^\alpha}$ *die Zeitrente auf* α *Jahre bey augenblicklichen Terminen*, so wie hier $\lambda\overline{a}$ auch die Leibrente bey augenblicklichen Hebungen ist.

Es ist $2p' = 2p + 0,98$. §. 16. Also ist der Unterschied in diesem Zusatz und in dem vorhergehenden nicht sehr erheblich.

24.

Anmerkung. Leibrenten, die nach andern Gesetzen wachsen oder abnehmen, als die bisher betrachteten sind, übergehe ich, weil sie nicht leicht in der Praxis vorkommen. Wenn das ist, müssen sie auf eine ähnliche Art wie die vorigen gesucht werden. Es ist überhaupt klar, dass wenn ein allgemeines Gesetz für die Folge der *Decremente* angenommen wird, so lassen sich auch allgemeine Ausdrücke für *die Wehrte der Leibrenten* geben, die sich nach einer allgemeinen Regel verändern.

25.

Zu §. 81.

Soll eine Leibrente im ersten Jahr 1 seyn, im zweyten $1 + \frac{1}{n}$, und nun weiter jährlich um $\frac{1}{n}$tel steigen, so ist der Wehrt derselben

=

$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} ++ \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right.$$

$$\left. + \frac{1\,\overset{2}{-}A}{nr^2} + \frac{2.\overset{3}{-}A}{nr^3} ++ \frac{(x-1)\overset{x}{-}A}{n\,r^x}\right).$$

Dieser Wehrt sey $= V$, so ist

$$V = \lambda\bar{a} + \frac{1}{A}\left(\frac{1}{n}\,\frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{2\overset{3}{-}A}{n\,r^3} ++ \frac{(x-1)\overset{x}{-}A}{n\,r^x}\right).$$

Wenn $\frac{L\overline{(a+1)}}{n}$ der Wehrt einer Leibrente für das Alter $\overline{a+1}$ ist, welche mit $\frac{1}{n}$tel anfängt, und im zweyten Jahr $\frac{2}{n}$tel ist, und so ferner steiget, so ist

$$\frac{L\overline{a+1}}{n} = \frac{1}{\overset{1}{-}A}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\overset{2}{-}A}{r} + \frac{2}{n}\cdot\frac{\overset{3}{-}A}{r^2} ++ \frac{(x-1)\overset{x}{-}A}{n.\,r^{x-1}}\right)$$

Folglich ist $\frac{L\overline{a+1}}{n.\,r}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{\overset{2}{-}A}{r^2} +\right.$

$$\left.\frac{2}{n}\cdot\frac{\overset{3}{-}A}{r^3} ++ \frac{x-1}{n}\cdot\frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right).$$

Daher $V = \lambda\bar{a} + \frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{L\overline{a+1}}{n}$

$$= \lambda\bar{a} + \frac{L\overline{a+1}}{n.\,r}\left(1 - \frac{\Delta A}{A}\right).$$

26.

Zu §. 87.

Soll eine *arithmetisch* nach der natürlichen Ordnung der Zahlen *steigende Leibrente* 1 auf *n* Jahre *aufgeschoben* werden, so ist ihr baarer Wehrt bezeichnet durch $\overline{}^{n}L\overline{a} = \frac{1}{A}\left(\frac{(n+1)\,\overline{}^{n+1}A}{r^{n+1}} ++ \frac{x\,\overline{}^{x}A}{r^{x}}\right)$. Es wird nämlich der erste zahlbare Termin $n+1$, weil die Rente, wie vorher, so gleich zu wachsen anfängt, nur die ersten Jahre nicht gehoben wird.

$$\text{Aber } L\overline{a+n} = \frac{1}{\overline{}^{n}A}\cdot\left(\frac{\overline{}^{n+1}A}{r} ++ (x-n)\frac{\overline{}^{x}A}{r^{x-n}}\right)$$

$$\text{Also } \frac{L\overline{a+n}}{r^{n}} = \frac{1}{\overline{}^{n}A}\left(\frac{\overline{}^{n+1}A}{r^{n+1}} ++ \frac{(x-n)\,\overline{}^{x}A}{r^{x}}\right)$$

$$\text{Ferner } \frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}} = \frac{1}{\overline{}^{n}A}\left(\frac{\overline{}^{n+1}A}{r^{n+1}} + + \frac{\overline{}^{x}A}{r^{x}}\right)$$

$$\text{und } n.\ \frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}} = \frac{n}{\overline{}^{n}A}\cdot\left(\frac{\overline{}^{n+1}A}{r^{n+1}} + + \frac{\overline{}^{x}A}{r^{x}}\right)$$

$$\text{Folglich } n.\ \frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}} + \frac{L\overline{a+n}}{r^{n}} = \frac{1}{\overline{}^{n}A}\left((n+1)\frac{\overline{}^{n+1}A}{r^{n+1}} ++ x.\frac{\overline{}^{x}A}{r^{x}}\right)$$

$$\text{Also } \left(n.\ \frac{\lambda\overline{a+n}}{r^{n}} + \frac{L\overline{a+n}}{r^{n}}\right)\cdot\frac{\overline{}^{n}A}{A} = \overline{}^{n}L\overline{a}.$$

27.

Zu §. 101.

Der Wehrt einer in *augenblicklichen Terminen* zu hebenden Leibrente, wo nämlich in jedem $\frac{1}{n}$tel Theil des Jahrs auch $\frac{1}{n}$ gezahlet wird, ist nach §. 16.

$$= p' - \frac{p'\,p'}{p} \cdot R.$$

wo $R = \frac{1}{A}\left(\frac{dA}{r} + \frac{d\overset{1}{-}A}{r^2} + + \frac{d\overset{x}{-}A}{r^{x-1}}\right)$ ist, und p' das Grundcapital für augenblickliche Zinsen $\frac{1}{n}$, p aber dasjenige, wovon jährlich der Zins $= 1$ ist.

Nun ist aber $R\,\frac{p'}{p} = r\,R\,\frac{1}{n} \cdot \int \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$ (*Zusätze zu* Cap. I. §. 9.). Folglich die augenblickliche Leibrente $S = p' - p'\,r\,R\,\frac{1}{n} \int \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$. Aber $r\,R\,\frac{1}{n} \cdot \int \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$ ist der Wehrt von der Grösse $r\,R$, wenn anstatt den ganzen jährlichen Abgang der Lebenden auf den Anfang des Jahrs zu setzen, solcher durch alle Augenblicke vertheilet wird, das ist, wenn die beym Tode einer Person zahlbare Summe 1. in demselbigen Moment, in welchem jene stirbt, bezahlt werden soll. *Folglich ist wiederum der baare Wehrt des beym Tode zu zahlenden Capitals p, gleich diesem Capital, weniger einer den Zinsen desselben gleichen Leibrente von solchen augenblicklichen Hebungen.*

Drittes Capitel.

Erster Abschnitt.

Von der mittlern Dauer des Zusammenlebens zwoer Personen.

103.

Satz 24. *A sey eine Person vom Alter a und B von b. Lass diese beyden Ein zusammenlebendes Paar am Anfang des Jahrs seyn, und man nehme eine Anzahl N solcher Paare; so wird die am Ende eines jeden der folgenden Jahre noch übrige Zahl dieser Paare auf folgende Weise aus der Mortalitätstabelle gefunden.*

1) Die Zahl der *Lebenden* in der Tabelle für das Jahr *a*, (die *Anfangszahl*) sey A; für die folgenden Jahre sey die Zahl der Lebenden $\stackrel{1}{-}A$, $\stackrel{2}{-}A$ u. s. f. $\stackrel{x}{-}A = 0$ wie vorher. Die *Anfangszahl* für das Alter *b* sey B, und für die folgenden Jahre $\stackrel{1}{-}B$, $\stackrel{2}{-}B$ u. s. f. bis $\stackrel{y}{-}B = 0$ wird. Man mache die Producte $\stackrel{1}{-}A.\stackrel{1}{-}B + \stackrel{2}{-}A.\stackrel{2}{-}B + +$ bis Einer der Factoren entweder $\stackrel{x}{-}A$ oder $\stackrel{y}{-}B = 0$ wird.

2) Jedes dieser Producte multiplicirt mit der anfänglichen Zahl der Paare N, und dividirt durch das Product A. B, giebt die noch übrige Zahl der Paare für jedes folgende Jahr.

So

So iſt $\frac{\overset{1}{-}A . \overset{1}{-}B}{A . B} \cdot N$ die Zahl der noch zuſammen-lebenden Paare nach dem erſten Jahr; $\frac{\overset{2}{-}A \overset{2}{-}B}{A . B} \cdot N$, nach zwey Jahren, und ſo ferner.

Beweis. Da von A Perſonen vom Alter *a* nach *einem* Jahr nur $\overset{1}{-}A$ übrig ſind, ſo ſind von N deſſelben übrig $\frac{N . \overset{1}{-}A}{A}$. Wenn von den Perſonen B keiner in demſelben Jahr abgegangen wäre, ſo würden auch $\frac{N . \overset{1}{-}A}{A}$ *Paare* übrig ſeyn. Eben dieſs würde auch erfolget ſeyn, wenn aus den Perſonen B gerade dieſelbigen geſtorben wären, die zu den abgegangenen A gehörten, das iſt, die mit dieſen zuſammen die Paare ausmachten, was aber nicht geſchehen iſt. Es ſtellen die Linien



die anfänglichen Perſonen A und B vor. Von A ſind am Ende des erſten Jahrs noch A D am Leben, D N aber geſtorben. Nun nehme man an, die Perſonen B in der Linie B N′ ſollen ſo geſtellet ſeyn, daſs jede von dieſen zu der gehöre, welche in A N gerade über ihr ſtehet, wie D′ zu D. Die abgegangenen von A ſollen alle zwiſchen D und N geſetzet ſeyn. Es iſt klar, wenn aus den Theilen der Linie B N′ keine ausgefallen wären, ſo würden A D (= B D′) Paare

 übrig

übrig seyn. Allein aus dem Theile B D′ sind gleichfalls einige abgegangen. Daher so viel Paare mehr getrennet sind als D N. Die Zahl der letztern wird so gefunden. Es bleiben von B Personen vom Alter *b* am Ende des Jahrs, $\overset{1}{-}B$, folglich gehen ab $B - \overset{1}{-}B$. Also da von B abgehen $B - \overset{1}{-}B$, so gehen von denen zwischen B und D′ oder von so viel als zwischen A und D in der Linie A N stehen, ab $N\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{(B-\overset{1}{-}B)}{B}\cdot$ Diess von $N\frac{\overset{1}{-}A}{A}$ abgezogen, macht

$$N.\frac{\overset{1}{-}A}{A}\left(1 - 1 + \frac{\overset{1}{-}B}{B}\right) = N\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\;B}\cdot$$

Diess ist die Zahl der übrigen Paare.

Es ist klar, dass man dieselbigen Schlüsse machen müsse, für die nach zweyen Jahren noch übrigen Paare. Es sey A D die aus A nach zwey Jahren noch übrige Zahl $= \frac{\overset{2}{-}A}{A}\cdot N$, so findet man die aus den zwischen B und D′ in der Linie B N′ in derselben Zeit abgegangene, wenn man so schliesset. Von B gehen in 2 Jahren ab $B - \overset{2}{-}B$, folglich von $N.\frac{\overset{2}{-}A}{A}$, die Zahl

$$N\frac{\overset{2}{-}A}{A}\cdot\frac{(B-\overset{2}{-}B)}{B}\cdot$$ Alsdenn ist

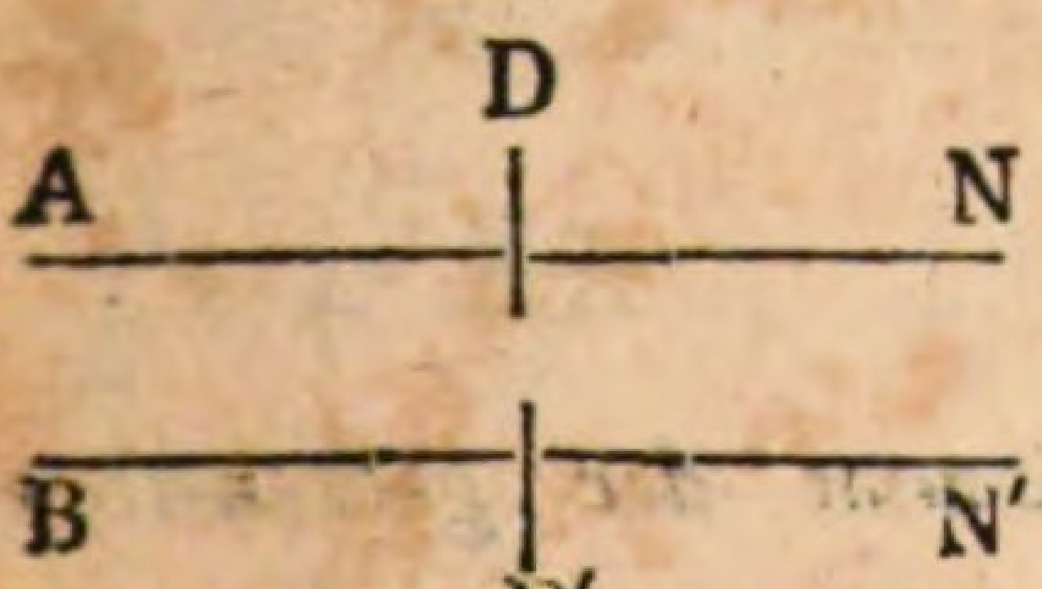
$$\frac{N\overset{2}{-}A}{A} - \frac{N\overset{2}{-}A}{A}\cdot\frac{(B-\overset{2}{-}B)}{B} = \frac{N.\overset{2}{-}A\,\overset{2}{-}B}{A.\;B}.$$

Eben

Eben ſo für die folgenden Jahre, für das n^{te} Jahr iſt ſie $\frac{N.\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A.\ B}$; bis man entweder auf $\overset{x}{-}A = o$, oder auf $\overset{y}{-}B = o$ kommt.

104.

Satz 25. Die Zahl der ganz ausgeſtorbenen Paare aus der anfänglichen Zahl derſelben N für jedes Jahr, das iſt, *die Zahl derer, wovon beyde Theile todt ſind, wird gefunden, wenn das Product der aus A und B geſtorbenen in einander, durch das Product A. B dividirt, und der Quotient mit der gegebenen Zahl N multiplicirt wird.* Das iſt, nach *n* Jahren iſt die Zahl der ganz ausgeſtorbenen Paare $= N. \frac{(A - \overset{n}{-}A)}{A} . \frac{(B - \overset{n}{-}B)}{B}$.



Beweis. Dieſs wird ſehr leicht auf dieſelbige Art eingeſehen. Denn wenn wiederum in der Linie A N die *Ausgeſtorbenen* A, alle zwiſchen D und N geſetzet ſind, und die mit ihnen anfangs verbundenen in B N′ unter jenen, zwiſchen D′ N′; ſo geben die von B geſtorbenen zwiſchen B und D′ keine ganz ausgeſtorbene Paare, weil die mit ihnen verbundenen A noch am Leben ſind. Auch ſind nicht alle zwiſchen D′ und N′ todt, daher auch nicht *alle* Paare in D N und D′ N′, ganz ausgeſtorben ſind.

sind. Solcher Paare, davon keine Person übrig ist, giebt es also nicht mehr, als Gestorbene von B in D′ N′ sich finden. Nun ist die Zahl in D N in der Linie A N, oder in D′ N′ in der Linie B N′, $= N \frac{(A - \overset{n}{-}A)}{A}$. Und weil von B nach *n* Jahren gestorben sind $B - \overset{n}{-}B$ aus der Zahl B, so sind aus $N \frac{(A - \overset{1}{-}A)}{A}$ gestorben

$N. \frac{(A - \overset{n}{-}A)}{A} . \frac{(B - \overset{n}{-}B)}{B}$. Diess sind die *ganz ausgestorbenen Paare.*

105.

Zusatz 1. Die Summe der getrennten Paare, wovon A noch am Leben ist, B aber gestorben, ist so gross als die Zahl der Gestorbenen in B N′ zwischen B und D′

$$= N. \frac{\overset{n}{-}A}{A} . \frac{(B - \overset{n}{-}B)}{B}.$$

Zusatz 2. Ingleichen *die Summe der getrennten Paare*, wovon A gestorben und B noch am Leben ist, ist gleich der Summe der Lebenden von B zwischen D′ und $N' = N. \frac{(A - \overset{n}{-}A)}{A} . \frac{\overset{n}{-}B}{B}$.

106.

Anmerkung. Diess sind die *Halleyischen Grundsätze*, wovon auch die Berechnung der *Ehepaare*, die aus

aus einer gewissen Anzahl Ehen nach gewissen Jahren noch *stehen geblieben* oder die *ganz* und *halb ausgestorben* sind, abhängt. *Halley* drückte es so aus. Es sey N eine *Anzahl Personen* von einem bestimmten aber gleichen Alter, *wovon jede mit einer Person von einem bestimmten*, unter sich gleichfalls gleichem *Alter verbunden ist*. Nun sollen von den ersten nach *n* Jahren noch *am Leben* seyn L; und *gestorben* seyn T; von den andern *am Leben seyn l*, und *gestorben seyn t;* so ist $\frac{Ll}{N}$ die Summe der *nochübrigen* Paare; $\frac{T.t}{N}$ der *ganz ausgestorbenen* Paare; $\frac{L.t}{N}$ die Summe der *getrennten Paare*, von denen noch einer der ersten lebet und einer der letztern todt ist; und $\frac{lT}{N}$ die Summe der *getrennten Paare*, aus denen einer der erstern todt ist, und einer der letztern noch lebet. Auch ist

$$\frac{Ll}{N} + \frac{Tt}{N.} + \frac{Lt}{N} + \frac{Tt}{N} = \frac{(L+T).(l+t)}{N}$$

$= N. \frac{N}{N} = N.$ In diesen Ausdrücken ist L was vorher AD war, oder

$$\frac{\overset{n}{-}A}{A} \cdot N; \; l = \frac{\overset{n}{-}B}{B} \cdot N; \; T = \frac{A - \overset{n}{-}A}{A} \cdot N;$$

$$t = \frac{B - \overset{n}{-}B}{B} \cdot \; N.$$

Zusatz

Zuſatz 3. Weil $N. \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A.\ B}$ die Summe der *übrigen* Paare iſt aus der anfänglichen Zahl N; ſo iſt von *Einem* Paar übrig $\frac{\overset{n}{-}A.\ \overset{n}{-}A}{A.\ B}$, das iſt, es iſt die *Wahrſcheinlichkeit, daſs ein ſolches Paar nach n Jahren noch übrig ſey*, $= \frac{\overset{n}{-}A.\ \overset{n}{-}B}{A.\ B}$.

Zuſatz 4. Eben ſo iſt die *Wahrſcheinlichkeit, daſs Ein gewiſſes Paar nach n Jahren ganz ausgeſtorben ſey*,

$$= \frac{(A - \overset{n}{-}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overset{n}{-}B)}{B}.$$

Zuſatz 5. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs von einem getrennten Paar die Perſon A noch lebe,

$= \frac{A.\ (B - \overset{n}{-}B)}{A.\ B}$; und die *Wahrſcheinlichkeit*, daſs B noch lebe und A todt ſey $= \frac{\overset{n}{-}B.\ (A - \overset{n}{-}A)}{A.\ B}$.

107.

Anmerkung. Halley trug dieſe Sätze auch geometriſch vor, mittelſt eines Parallelogramms. Es ſey (Fig. 3.) A B ein Quadrat A N = N = A M, gleich der *anfänglichen Zahl der Paare;* A D = L, *die Zahl der aus A N Lebenden nach n Jahren;* A D′ = *l die Zahl der Lebenden aus A M zu derſelben Zeit;* D N die Zahl der

der *Gestorbenen aus* AN, nach n Jahren $= G$, und $D'N' = g$, die Zahl der *Gestorbenen* aus AM zu derselben Zeit; ferner DE, und HC parallel mit den Seiten AM, AN.

Nun ist die *anfängliche Zahl* der Paare zu der nach n Jahren, wie $N : \frac{L.l}{N} = NN : Ll$, und die *Wahrscheinlichkeit, dass ein anfängliches Paar nach n Jahren noch übrig sey* $= \frac{Ll}{NN}$.

Wenn also die Fläche des ganzen *Quadrats* die *anfängliche Summe* der Paare vorstellt, so giebt das *Rectangulum A F die Zahl der nach n Jahren übrigen Paare.*

Auf gleiche Art erhellet, dass die *Fläche* $DC = G.l$; $HE = L.g$ und $FB = G.g$, die Summen der *halb* und *ganz ausgestorbenen* Paare vorstellen, wenn AB die Summe *aller* vorstellet, und $\frac{DC}{AB}$, $\frac{HE}{AB}$, $\frac{FB}{AB}$ die *Wahrscheinlichkeiten des Ausgestorbenseyns.*

Weil aber auch $N : \frac{N.\overset{n}{-}A\,\overset{n}{-}B}{A.\;B}$ wie die anfängliche Zahl der Paare zu den übrigen $= A.B : \overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B$, und $\frac{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A.\;B}$ die *Wahrscheinlichkeit des Zusammenlebens* eines Paars nach n Jahren ist (§. 106), so kann, anstatt des *Quadrats*, dessen Seite $= N$ ist, ein *Parallelogramm*, dessen eine Seite A, die andere B ist, gebraucht werden.

Man

Man mache $AN = A$, und $AD = \overset{n}{-}A$, so ist $DN = A - \overset{n}{-}A$; ingleichen $AM = B$, und $AH = \overset{n}{-}B$ so ist $HM = B - \overset{n}{-}B$. Wird das Parallelogramm alsdenn durch die Linien DE parallel mit A M, und durch HC parallel mit A N getheilt, so können diese Theile auf dieselbige Art gebraucht werden, wie vorher die Theile des Quadrats.

108.

Satz 26. Die mittlere Dauer des Zusammenlebens (die Dauer der Coexistenz, die Verbindungsdauer) wird gefunden, wenn die in jedem Jahre übrigen Paare summirt, und ihre Summe durch die anfängliche Zahl derselben dividirt wird.

Wird diese mittlere Dauer für ein Paar vom Alter *a*, und *b* bezeichnet durch $C.\overline{ab}$, und bedeutet $\overset{1}{-}A$, $\overset{2}{-}A \ldots$ dasselbe was vorher, so ist

$$C.\overline{ab} = \frac{1}{A.\,B}\left(\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B + \overset{3}{-}A.\ \overset{3}{-}B + +\right)$$

Beweis. Es ist für sich selbst klar. Denn das erste Jahr durch haben bestanden $\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B$; Paare, wenn die anfängliche Zahl derselben A.B ist (6103). Das zweyte Jahr durch $\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B$, dazu $\overset{3}{-}A.\overset{3}{-}B$ das dritte Jahr durch u. s. f. Jede Zahl von übrigen Paaren in 1 multiplicirt, und addirt, oder die Zahl der übrigen Paare selbst

selbst addirt, giebt die Dauer aller Paare zusammen. Diese Summe dividirt durch die Summe der anfänglichen Paare giebt die *mittlere Dauer.*

109.

Satz 27. *Wenn statt der übrigen Paare für jedes Jahr die Zahl der getrennten genommen wird, so erhält man die mittlere Dauer des Ueberlebens der einen Person über die andere verbundene.*

Beweis. Die Zahl der Paare, von denen A am Leben, B todt ist, ist für die folgenden Jahre

$$= \overset{1}{-}A. (B - \overset{1}{-}B) + \overset{2}{-}A (B - \overset{2}{-}B) + +$$

bis auf das höchste Lebensziel von A, oder bis $\overset{x}{-}A (B - \overset{x}{-}B)$. Alsdenn wird $\overset{x}{-}A = 0$, und noch mehr $\overset{x+1}{-}A = 0$, also die folgenden Glieder alle $= 0$.

Wenn A jünger ist, als B, so ist x die *Ergänzung des Alters von A* grösser als die Ergänzung des Alters B, y. Wo $\overset{y}{-}B = 0$, da ist $B - \overset{y}{-}B = B$ das ist, die Zahl der *Gestorbenen* der *anfänglichen Zahl gleich;* und für die folgenden Jahre ist der Factor $B - \overset{y+1}{-}B$ dann auch $= B$.

Jede Zahl der Paare, worin A überlebend ist über B, für jedes Jahr in 1 multiplicirt, oder die Summe dieser Zahlen selbst genommen, und durch die Zahl der

anfänglichen Paare dividirt, giebt *im Durchschnitt die Zeit für jedes einzelne Paar*, die A überlebet über B.

$$= \frac{\overset{1}{A}.\,(B - \overset{1}{B}) + \overset{2}{A}.\,(B - \overset{2}{B}) + + \overset{x}{A}(B - \overset{x}{B})}{A.\ B.}$$

$$= S.\frac{\overset{x}{A}.(B - \overset{x}{B})}{A.\ B}.$$

Eben so ist *die mittlere Dauer des Ueberlebens von B*

$$= \frac{\overset{1}{B}.(A - \overset{1}{A}) + \overset{2}{B}(A - \overset{2}{A}) +++ \overset{y}{B}(A - \overset{y}{A})}{A.\ B}$$

$$= \frac{S\,\overset{y}{B}.\,(A - \overset{y}{A})}{A.\ B}.$$ Hier ist y die Altersergänzung von B.

Diess ist die mittlere Dauer des *getrennten Lebens*, des *Lebens nach der Trennung*. Bey Eheleuten ist es die mittlere Dauer des *Wittwer*- und des *Wittwenstandes*.

110.

Satz 28. Die mittlere Zeit, die ein Paar ganz ausgestorben ist, nach x Jahren, wenn x die Altersergänzung der jüngern Person ist, das ist, die Zeit, die es alsdenn ausgestorben ist, wenn die anfänglichen Paare nothwendig alle ausgestorben seyn müssen, ist

$$= \frac{(A - \overset{1}{A})\ (B - \overset{1}{B})}{A\ \ B} + \frac{(A - \overset{2}{A})\ (\overset{1}{B} - \overset{2}{B})}{A\ \ \ B}$$

$$+ + \frac{(A - \overset{x}{A})\ (B - \overset{x}{B})}{A\ \ B} = S\,\frac{(A - \overset{x}{A}).\,(B - \overset{x}{B})}{A\ B}.$$

111.

Anmerkung. Es ist auch diese *Zeit des Ganzausgestorbenseyns der Ueberschuss der Altersergänzung der jüngsten Person, über die Dauer des längsten Lebens* von beyden, wie unten erwiesen werden soll.

Zusatz 1. Die vier mittlern Zeiten, nämlich, *die Dauer der Verbindung*, *die Dauer des Ueberlebens des einen* und *des andern*, *die Zeit des Ganzausgestorbenseyns*, sind zusammen so groß als die *Altersergänzung des jüngern Lebens*, denn für jedes Jahr ist

$$\frac{\overset{n}{-}A.\ \overset{n}{-}B}{A.\ B} + \frac{\overset{n}{-}A.\ (B - \overset{n}{-}B)}{A\ B} + \frac{\overset{n}{-}B\ (A - \overset{n}{-}A)}{A.\ B}$$

$$+ \frac{(A - \overset{n}{-}A).\ (B - \overset{n}{-}B)}{A\ B} = \frac{A\ B}{A\ B} = 1.$$

Solcher Glieder giebt es x in der ganzen Reihe, deren Summe also x ist.

112.

Zusatz 2. Von diesen *vier* erwähnten Grössen darf nur Eine gesuchet werden, so kann daraus, und aus *der mittlern Lebensdauer für einzelne Personen*, der Wehrt der übrigen dreyen gefunden werden.

Ist die *Verbindungsdauer* berechnet, so ist die *Dauer des Ueberlebens von A über B.*

$$= \frac{\overset{1}{-}A.\ (B - \overset{1}{-}B)}{A.\ B} + \frac{\overset{2}{-}A(B - \overset{2}{-}B)}{A.\ B} + +$$

$$= \frac{(\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + +)}{A} - \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B + +}{A\,B}$$

$$= E\,\overline{a} - C\,\overline{a\,b}.$$

Die *Dauer des Ueberlebens von B über A* ist

$$= \frac{\overset{1}{-}B\ (A - \overset{1}{-}A) + \overset{2}{-}B\ (A - \overset{2}{-}A)}{A\,B} + +$$

$$= E\,\overline{b} - C\,\overline{a\,b}.$$

Und *die mittlere Zeit des Ganz ausgestorbenseyns*

$$= \frac{(A - \overset{1}{-}A)\ (B - \overset{1}{-}B)}{A\,B} + \frac{(A - \overset{2}{-}A)\ (B - \overset{2}{-}B)}{A\,B} + +$$

$$= \frac{(AB + AB + +)}{AB} - \frac{(A.\,\overset{1}{-}B + A\,\overset{2}{-}B + +)}{A\,B}$$

$$- \frac{(B\,\overset{1}{-}A + B\,\overset{2}{-}A + +)}{AB} + \frac{(\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B + +)}{A\,B} =$$

$= x - (E\,\overline{b} + E\,\overline{a}) + C\,\overline{a\,b}$, wenn x die Altersergänzung des *jüngsten* Lebens ist.

Und wiederum alle vier Grössen zusammen geben

$$C\,\overline{a\,b} + E\,\overline{b} - C\,a\,b + E\,\overline{a} - C\,\overline{a\,b} + x - E\,\overline{b} - E\,\overline{a} + C\,\overline{a\,b} = x.$$

113.

Zusatz 3. Zu dem Ausdrucke für *die mittlere Dauer der Verbindung im §. 108.* wird noch $\frac{1}{2}$ als eine *Correction* zugesetzet. Jener Wehrt ist nur richtig, wenn bloss *ganze* Jahre gerechnet werden. Alsdenn wird auch hier wie oben vorausgesetzt, dass *alle Trennungen der Paare*

Paare im Anfang des Jahrs geschehen. Allein für die Praxis muss man annehmen, dass sie im Lauf des Jahrs gleichförmig entstehen. Das ist denn so viel als jede aufhörende Verbindung habe noch bis zur Hälfte des Jahrs bestanden. Es ist also zu dem *ersten* Jahr noch zuzulegen $\frac{\Delta(AB)}{2AB}$, wenn $\Delta(AB)$ die *Differenz ist zwischen* AB und $\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B$, das ist zwischen der anfänglichen Zahl der Verbindungen und derer, die im Anfang des nächsten Jahrs noch übrig sind, oder die Zahl der im ersten Jahr aufgehobenen Verbindungen. Zu dem zweyten Jahr ist zuzulegen $\frac{\Delta(\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B)}{2AB}$, und zum xten Jahr $\frac{\Delta(\overset{x-1}{-}A.\ \overset{x-1}{-}B)}{2AB}$. Da nun

$$\frac{\Delta(AB)+\Delta(\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B)++\Delta(\overset{x-1}{-}A.\overset{x-1}{-}B)}{AB}=\frac{AB}{AB}=1,$$

so macht diess für alle Jahre zusammen $\frac{1}{2}$ aus. Man sehe auch die *Zusätze zu diesem Capitel.* *)

114.

Die XXII^ste Tabelle enthält die *mittlere Dauer des Zusammenlebens* zwoer Personen nach der *Süssmilchischen* Mortalitätstafel, wenn der Unterschied am Alter nicht über 46 Jahre, und die jüngste Person nicht unter 15 Jahren alt ist. Es ist die Correction $\frac{1}{2}$ schon addirt. Diese Tabelle wird für die meisten Fälle hinreichen.

*) §. 1.

Die *Interpolation für die zwischenfallenden Jahre* wird gewöhnlich auf folgende Art vorgenommen. Ist *a* das Alter von A = 30 Jahren, und *b* das Alter von B, 40 Jahr, so ist $C\ \overline{30.\ 40} = 17,11$ und $C\ \overline{30.\ 45} = 15,51$; die Differenz = 1, 6 für die Differenz von 5 Jahren im Alter von B. Diess macht für 2 Jahre Unterschied 0, 64. Also ist $C.\ \overline{30.\ 42} = 16,47$.

Für a = 34, b = 42 Jahr rechnet man so. Es ist $C.\ \overline{30.\ 42}$ nach dem vorhergehenden 16, 47. Nun wird auf dieselbe Art C. 35. 42 berechnet, und gefunden 15, 65. Die Differenz $C.\ \overline{30.\ 42} - C.\ \overline{35.\ 42}$ ist = 16, 47 — 15, 65 = 0, 82, das ist für 5 Jahre im Alter von A. Also für 4 Jahre 0, 66. Folglich ist $C.\ \overline{34.\ 42} = 15,81$.

115.

Satz 29. Nach der Voraussetzung eines gleichförmigen Absterbens ist die mittlere Dauer des Zusammenlebens so zu finden. Es sey die Altersergänzung für das jüngere Alter *a*, α, und für das ältere *b*, β, so ist die *mittlere Dauer ihrer Coexistenz*, *) oder $C.\overline{ab} = \beta\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{6\alpha}\right)$ wozu $\frac{1}{2}$ als die Correction zuzulegen ist.

Zusatz. Wenn das Alter beyder gleich ist, also auch $\alpha = \beta$, so ist die Dauer der Coexistenz $= \frac{1}{3}\beta$.

116. *An-*

*) *Zusätze* zu diesem Capitel. §. 4.

116.

Anmerkung. Braucht man die Dauer nicht sehr genau, so kann sie auf diese Art nach der Hypothese gesucht werden, nur daſs alsdenn auch nach *Simpsons* Methode (Cap. II. §. 63.) die *doppelte mittlere Lebensdauer der einzelnen Personen*, genau berechnet, *für die Altersergänzung* genommen werde. Es weicht weiter ab, wenn man sie mit *Moivre* für den Abstand vom höchsten Alter nimmt, und dieſs letztere auf 86 Jahre setzet.

Ex. 1. Es sey a = 20, b = 40 Jahr, so ist nach der XVten Tabelle die zwiefache mittlere Lebensdauer für a = 2. 35, 03 = 70, 06 = α; und für b = 2. 22, 64 = 45, 28 = β.

Folglich $\frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{6\alpha} = 22,64 - 4,88 = 17,76.$ Der wahre Wehrt ist 18,51. Die Differenz 0, 75.

Ex. 2. Für $a = 20$, $b = 60$ ist $\alpha = 2.35,03 = 70, 06$, und $\beta = 2.\ 12,\ 07 = 24,\ 14$. Also $\frac{1}{2} - \frac{24,14}{420,36}$ $= 0,5 - 0,057 = 0,443$ und $24,14.\ 0,443 = 10,69$. Der genaue Wehrt ist 10, 70, die Differenz also fast nichts.

Ex. 3. Für $a = b = 15$ ist $\frac{1}{3}\beta = \frac{2.38,562}{3} = 25,7.$ der wahre Wehrt 27, 68. Der Unterschied = 1,98.

Ex. 4. Für a = b = 60 ist $\frac{1}{3}\beta = \frac{1}{3}$. 2. 12, 07 = 8, 046. Der wahre Wehrt 7, 48. Die Abweichung 0, 566.

Diese Abweichungen sind für sich noch etwas wichtig. Allein die davon abhangenden Abweichungen in dem Wehrte der Renten für das Zusammenleben sind schon geringer. Die meisten male mögte man in der Praxis mit der auf solche Art gefundenen Dauer sich begnügen. Allein im Ganzen ist das doch nicht genau genug. Und weil es, wie gleich gezeiget werden soll, auch so sehr mühsam nicht ist, jene völlig genau zu haben, so ist das Bedürfniss so gross nicht, zu Hypothesen seine Zuflucht zu nehmen. Uebrigens wird es doch zu andern Absichten nützlich, darnach zu rechnen.

117.

Methode die mittlere Dauer der Verbindungen zwoer Personen zu berechnen.

Hier will ich die Hülfstabelle einschalten, deren ich schon oben (Cap. I. §. 89.) erwähnt habe. Sie dient, die Wehrte einer nach der natürlichen Ordnung der Zahlen steigenden *Leibrente*, auch die *mittlere Dauer der Verbindungen*, und in dem nächstfolgenden Abschnitte die *Wehrte der Verbindungsrenten* leicht zu berechnen.

A. *Jahre.*	B. *Decremente.*	C. *Differenzen der Decremente.*	D. *Summen der Summen der Lebenden.*	E. *Summen der Summen der discontirten Zahlen der Lebenden.*
0	250	+ 161	857202	210074, 50
1	89	+ 46	827219	197643, 02
2	43	+ 18	799231	186211, 54
3	25	+ 11	771993	175501, 21
4	14	+ 2	745416	165402, 01
5	12	+ 1	719457	155852, 21
6	11	+ 2	694091	146809, 31
7	9	+ 1	669304	138242, 31
8	8	+ 1	645084	130123, 42
9	7	+ 2	621420	122427, 04
10	5	+ 1	598303	115130, 35
11	4	0	575725	108212, 35
12	4	0	553679	101653, 78
13	4	0	532160	95437, 48
14	4	0	511164	89547, 87
15	4	0	490687	83969, 96
16	4	0	470725	78689, 45
17	4	0	451274	73692, 68
18	4	0	432330	68966, 60
19	4	− 1	412889	64498, 75
20	5	0	395947	60277, 22
21	5	0	378500	56290, 64
22	5	0	361544	52228, 15
23	5	0	345074	48978, 93
24	5	0	329085	45632, 67
25	5	0	313572	42479, 54
26	5	0	298530	39510, 16
27	5	− 1	283954	36715, 58
28	6	0	269839	34087, 28
29	6	0	256180	31617, 13
30	6	0	242972	29297, 38

A.	B.	C.	D.	E.
31	6	0	230209	27120, 32
32	6	0	218885	25078, 61
33	6	0	206994	23165, 27
34	6	— 1	195530	21373, 65
35	7	0	184487	19697, 42
36	7	0	173859	18130, 56
37	7	0	163640	16667, 35
38	7	0	153823	15302, 09
39	7	0	144401	14029, 38
40	7	0	135367	12844, 08
41	7	0	126714	11741, 31
42	7	0	118435	10716, 44
43	7	0	110523	9765, 07
44	7	0	102971	8883, 03
45	7	— 1	95772	8066, 35
46	8	0	88919	7311, 27
47	8	0	82405	6614, 23
48	8	0	76228	5971, 84
49	8	— 1	70365	5380, 73
50	9	0	64828	4837, 71
51	9	0	59589	4339, 76
52	9	0	54655	3884, 02
53	9	0	50012	3467, 65
54	9	0	45651	3087, 97
55	9	0	41563	2742, 44
56	9	0	37739	2428, 66
57	9	0	34170	2144, 37
58	9	0	30847	1887, 44
59	9	0	27761	1655, 85
60	9	0	24903	1447, 70
61	9	— 1	22264	1261, 10
62	10	0	19835	1094, 56
63	10	0	17607	946, 39
64	10	0	15571	815, 69
65	10	0	13717	699, 17

A.	B.	C.	D.	E.
66	10	0	12035	597, 23
67	10	0	10515	507, 95
68	10	0	9147	430, 09
69	10	0	7921	362, 49
70	9	+ 1	6827	304, 06
71	9	0	5855	253, 78
72	9	+ 1	4995	210, 69
73	8	0	4238	173, 96
74	8	+ 1	3575	142, 81
75	7	0	2997	116, 51
76	7	+ 1	2496	94, 44
77	6	0	2064	76, 01
78	6	0	1694	60, 73
79	6	+ 1	1379	48, 13
80	5	+ 1	1113	37, 83
81	4	0	890	29, 47
82	4	0	704	22, 72
83	4	+ 1	550	17, 30
84	3	0	424	13, 00
85	3	+ 1	322	9, 63
86	2	0	240	7, 00
87	2	0	175	4, 98
88	2	0	124	3, 44
89	2	+ 1	85	2, 30
90	1	0	56	1, 48
91	1	0	35	0, 90
92	1	0	20	0, 50
93	1	0	10	0, 24
94	1	0	4	0, 09
95	1	+ 1	1	0, 02
96	0	0	0	

118.

Es ist diese Tabelle zwar nur allein nach der *Süssmilchischen* Mortalitätstafel gemacht, aber sie kann bey jeder andern Sterblichkeitsordnung leicht eingerichtet werden. Sie erfordert die oben (Cap. 2. §. 56.) gegebene Tabelle für einfache Leben. Aus der letztern kann jene in weniger als einer Stunde Zeit verfertigt werden. Es besteht alles in einem leichten Addiren von Zahlen. Die ganze Arbeit, die etwas mühsam heissen kann, ist die, dass man in der ersten Tabelle für einzelne Personen die *discontirten Zahlen der Lebenden*, (die Zahlen in der Columne E,) berechne. Alsdenn ist alles übrige so gut als eingerichtet.

Die vorstehende Tabelle enthält in der Columne C (denn von A und B sieht man durch den Anblick, was sie sind) die *Unterschiede der Decremente in B.* Der Unterschied eines Decrements von dem nächstfolgenden wird jenem zur Seite gesetzet, und dieser ist *positiv*, wenn das folgende Decrement kleiner ist, *negativ* im entgegengesetzten Fall.

Die Columne D enthält hier die *Summe* der Zahlen in der Columne D der obigen Tabelle. Die Summen der in jedem Jahr Lebenden sind von neuem von hinten an summirt, so dass *die Zahl, welche bey einem Jahre stehet, die Summe ist von allen Zahlen, welche in der obigen Tabelle bey demselben Jahre stehet, und auf sie bis ans Ende der Tabelle folgen.* Hier steht bey dem

Jahr

Jahr 15 die Zahl 490687. Diess ist die Summe von 19962, bey 15 Jahr in der obigen Tabelle, und aller folgenden Zahlen zusammen.

Die *Summen der Lebenden* in der obigen Tabelle für ein gewisses Alter *a* sind $\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + \overset{3}{-}A + + \overset{x}{-}A$. Wird diese Reihe durch $\int \overset{1}{-}A$ ausgedrückt, so kann die Zahl in der *gegenwärtigen Tabelle*, Columne D, bey demselben Jahr bezeichnet werden durch $S. \int \overset{1}{-}A$. Sie enthält nämlich $(\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + \overset{3}{-}A + + + +) + (\overset{2}{-}A + \overset{3}{-}A$ $+ +) + (\overset{3}{-}A + +) + +$

$$= \int \overset{1}{-}A + \int \overset{2}{-}A + \int \overset{3}{-}A + + = S. \int \overset{1}{-}A.$$

So weit geht die Tabelle zur Berechnung *der Verbindungsdauer*. Die letzte Columne E gehört zur Berechnung der *Renten*, die so lange zu zahlen sind, als die Verbindungen dauern, davon nachher. Es ist diese Columne E eben so durchs Summiren aus der Columne E der obigen Tabelle gemacht, wie die Zahlen dieser letztern aus den discontirten Zahlen der Lebenden. Wenn die *Reihe der discontirten Zahlen der Lebenden* für ein gewisses Alter

$$= \frac{1}{r^a} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x} \right)$$

bezeichnet wird durch $\int \frac{\overset{1}{-}A}{r^{a+1}}$, so ist diess die Zahl,

welche

welche in der obigen Tabelle bey dem Jahre *a* stehet. Diejenige aber, welche hier in der Columne E bey *a* stehet, ist

$$= \frac{1}{r^a}\left(\frac{\overset{1}{-}A}{r^1} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}\right.$$

$$+ \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x}$$

$$+ \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x} + +$$

$$= S. \int \frac{\overset{t}{-}A}{r^{a+1}}.$$

Bey dem Gebrauch der letzten Tabelle muss man die Columne B und C der ersten zugleich vor sich haben. Ich befürchtete, die Tabelle möchte zu breit werden für den Raum der Seite, sonst hätten diese Columnen hier wieder eingerückt werden können.

119.

Aus dieser Tabelle werden die *Wehrte der nach der natürlichen Ordnung der Zahlen wachsenden Leibrenten* $L\overline{a}$ (§. 76. Cap. II.) *durch eine Division gefunden.* Die Zahl *beym Alter* $a+1$ in der *Columne E*, wird durch die Zahl *der discontirten Lebenden* der Columne C der *ersten* Tabelle dividirt. Der Quotient ist der *gesuchte Wehrt der steigenden Leibrente* (Cap. I. §. 89.) Der Quotient nämlich ist

=

$$= \frac{1}{r^a} \cdot \frac{1}{A : r^a} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r^1} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x} \right.$$

$$\left. + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + + \frac{\overset{x}{-}A}{r^x} \right).$$

Z. B. Das gegebene Alter sey 20 Jahr $= a$. Die bey 21 Jahr stehende Zahl ist 56290, 64. Die discontirte Zahl der Lebenden in der obigen Tabelle ist 224, 69. Daher $\frac{56290,64}{224,69} = 251, 64$. Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben war der Wehrt 248, 805 (Cap. I. §. 79.)

120.

Ferner läßt sich die *Dauer der Verbindung* sehr leicht finden, wenn man mit einer *Näherung* zufrieden seyn will, fast eben so leicht, als wenn sie nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben berechnet wird, (§. 115.) und noch wohl genauer auf folgende Art. Es sey das gegebene Alter von A wiederum *a* und die *Altersergänzung*, oder hier die doppelte mittlere Lebensdauer α; von B das *Alter b*, so wie B selbst die *Anfangszahl der Lebenden*. Auch sey *b* das größte Alter.

1) Man dividire die Summe in der Columne D, bey dem Alter *b*, durch die *Anfangszahl* B.

2) Dividire diesen Quotienten von neuen durch die *Altersergänzung der jüngern Person*, durch α.

3) Dieser

Dieser Quotient abgezogen von der *mittlern Lebensdauer der ältern Person*, giebt die *mittlere Dauer der Verbindung* beyder.

Ex. a = 20 Jahren; b = 40 Jahren, so ist die zu 41 Jahr gehörige Summe der Columne D = 126714. Die Zahl der Lebenden für 40 Jahr ist 374 und $\frac{126714}{374}$ ist = 338,82. Diess mit der Alterergänzung α, (oder hier der doppelten mittlern Lebensdauer genau berechnet,) = 70,6 dividirt, 4,8. Die mittlere Lebensdauer von B ist aus Tab. XV. nach der *Süssmilchischen* Tafel, 22,64. Folglich 22,64 — 4,8 = 17,84 = der *mittlern Dauer der Coexistenz*. Der wahre Wehrt ist 18,51. (Tab. XXII.). Die Abweichung also 0,67.

Suchet man die Dauer nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben für die Altersergänzung (nämlich die genau berechnete mittlere Lebensdauer einzelner Personen doppelt genommen) (§. 116.), so erhält man zufolge des *29sten Satzes* §. 115, worin nun β = 45,28; α = 70, für die Verbindungsdauer $45,28\left(\frac{1}{2}-\frac{45,28}{6.70,6}\right)$ = 17,66, wo die Abweichung 0,85 ist.

Ex. 2. Beyde Personen sind 50 Jahr alt. Also α = 2. 16,95 = 33,9. Die Zahl, welche bey dem 51sten Jahre steht, ist 59589. Die Zahl der Lebenden für das Jahr 50 — 51 ist 300. Also $\frac{59589}{300}$ = 198,63.

Diess

Diess von neuem dividirt durch 33, 9 giebt den Quotienten 5, 86; und 16,95 — 5, 86 = 11, 09. Der genaue Wehrt ist 10, 97. Die Abweichung also 0, 12.

Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben ist die Verbindungsdauer $= \frac{1}{3}$. 2. 16, 95. (§. 115.) = 11, 19. Die Abweichung 0, 13.

Den Beweis für diess Verfahren sehe man in den *Zusätzen* zu diesem Capitel. *)

121.

Zu dem eigentlichen Zweck dieser Tabelle gehöret die folgende *Methode, die Dauer der Verbindung für zwo Personen genau zu finden.*

Das Alter der jüngern sey *a*, der ältern *b*.

1) Den Summen in der Columne D, von der an, welche bey dem Jahre $b + 2$ steht, schreibe man die *Differenzen in der Columne* C zur Seite, so dass bey der Summe des Jahrs $b + 2$, die Differenz für das Jahr *a* gesetzet werde, und so die folgenden Differenzen jede bey der folgenden Summe.

Man hats bequemer, wenn die Differenzencolumne beweglich ist. Dieser Streiffen darf dann nur den Summen zur Seite gelegt werden. Bey den Differenzen nach der Süssmilchischen Tafel ist das nicht nöthig, weil man ohne diess gleich sieht, welche Summen auszuheben sind.

*) §. 39.

sind. *Jede Summe wird in die zur Seite stehende Differenz multiplicirt*, und diese Producte bringt man in eine Summe.

Diess kann der beschwerlichste Theil der Arbeit seyn. Allein bey der *Süssmilchischen* Tafel ist es keine, weil alle Differenzen entweder o, oder 1 sind. Die Summen, wobey die letztern stehen, werden also nur ausgeschrieben und addirt. Weil aber die Differenzen bald *positiv*, bald *negativ* sind, so müssen die positiven und negativen Producte (hier die Summen selbst) besonders summirt, und am Ende von einander abgezogen werden. Es versteht sich alsdenn, dass wenn die positiven mehr ausmachen, so ist das ganze positiv, oder zu addiren; dagegen zu subtrahiren, wenn die negativen die grössten sind.

2) Man multiplicire die Summe der Columne D, welche bey $b+1$ steht, mit dem Decrement des ersten Jahrs der Anfangszahl A, nämlich mit Δ A.

3) Von diesem letztern Product ziehe man die vorher gefundene Summe der Producte ab, (oder *addire* sie, wenn sie *negativ* ist) und dividire den Rest durch das Product der Anfangszahlen A. B.

4) Den gefundenen Quotienten ziehe man ab von der *corrigirten mittlern Lebensdauer der ältern Person* aus der Tabelle, so bekommt man *die Dauer der Verbindung*.

Diese

Diese Vorschriften sind in folgendem Ausdruck enthalten

$$C\overline{ab} = E.\overline{b} - \frac{1}{AB}\cdot\left(\Delta A.\, S.\int^{\overline{1}} B - \Delta\Delta A.\, S.\int^{\overline{2}} B - \Delta\Delta^{\overline{1}} A\, S.\int^{\overline{3}} B - \right).$$

Zusätze zu diesem Cap. *)

Es ist $E\overline{b}$ die *mittlere Lebensdauer* für das Alter *b*; ΔA das *Decrement* der Zahl A, die zum Jahr *a* gehört; $\Delta\Delta A$ die *Differenz* für das Jahr *a*; $\Delta\Delta^{\overline{1}} A$ für das Jahr $a+1$, u. s. f. Auch $S.\int^{\overline{1}} B$ die Summe der Columne D, beym Jahr $b+1$; $S.\int^{\overline{2}} B$, beym Jahr $b+2$.

Folgendes Exempel wird zeigen, wie viel oder wenig die Weitläuftigkeit der Arbeit auf sich habe. Es sey $a = 15$ Jahr und $b = 20$ Jahr.

1) Setzet man die Differenz beym Jahr 15 gegen die Summe bey 22 in Columne D, das ist, bey $S.\int^{\overline{2}} B$, so übersieht man gleich, dass jede Differenz zu einer Summe gehöre, die um 7 Jahr weiter fällt. Man schreibet also nur

für die Differenzen bey den Jahren			*die Summen bey den Jahren.*		
19)	—	1	26)	—	298530
27)	—	1	34)	—	195530
34)	—	1	41)	—	126714
45)	—	1	52)	—	54655
49)	—	1	56)	—	37739
61)	—	1	68)	—	9147
				—	722315

 Ferner

*) §. 7.

Ferner					
70)	+	1	77)	+	2064
72)	+	1	79)	+	1379
74)	+	1	81)	+	890
76)	+	1	83)	+	550
79)	+	1	86)	+	240
80)	+	1	87)	+	175
83)	+	1	90)	+	56
85)	+	1	92)	+	20
89)	+	1	96)	+	00
				+	5374
				—	722315
				—	716941

2) Bey dem Jahr 21 steht die Summe 378500. Das Decrement für das Jahr 15 ist 4; also 4. 378500 = 1514000, wozu 716941 zu *addiren* ist, weil die letzte Zahl *negativ* ist. Beydes macht 2230941.

3) Dieſs dividirt durch das Product der Anfangszahlen der Lebenden im 15ten und 20sten Jahre, das ist, durch 511. 491 = 250901. giebt 8, 89. Und da nun die mittlere corrigirte Lebensdauer einer 20jährigen Person 35, 03 ist, so bekommt man 35, 03 — 8, 89 = 26, 14 die Dauer der Coexistenz genau.

Ex. 2. Beyde sind 50 Jahr alt, so gehören zu den jedesmaligen *Differenzen* die *Summen*, welche zwey Jahre weiter stehen. Man schreibt also aus der Tabelle die Summe

63)	—	17607,	72)	+	4995
			74)	+	3575
			76)	+	2496
			78)	+	1694
			81)	+	890
			82)	+	704
			85)	+	322
			87)	+	175
			91)	+	35

+ 14886
— 17607

— 2721 Hierzu wird
addirt 9. 59589 = + 536301

Summa 539022

dividirt durch 300.309 = 5, 99

Die mittlere Dauer für 50 Jahr ist 16,95. Also die Dauer der Coexistenz = 10, 96.

122.

Anmerkung. Nach der *Northamptoner* und der Schwedischen Tabelle sind die Differenzen zwar nicht, wie bey der *Süssmilchischen* nach dem 15ten Jahr, alle entweder 1 oder 0. Aber dennoch ist die Arbeit weder mühsam noch langweilig. Eine Mortalitätstafel als die ist, welche *du Pré de Saint Maur* von Paris und der umliegenden Gegend bekannt gemacht, würde mehr Multiplicationen nothwendig machen, und mit grössern Zahlen, weil die Differenzen grössere Zahlen sind. In solchen Fällen könnte man *statt der Differenzen von*

neuen ihre Unterschiede nehmen und damit arbeiten, nur müssten alsdenn auch in einer neuen Hülfstabelle die *Summen der Summen* in der hiesigen Tabelle abermals summirt werden. *) Wenn man eine solche Tabelle vor sich hat, wie die nach dem oben (Cap. I. §. 65.) geschehenen Vorschlag abzuändernde *Süssmilchische* seyn würde, wo nämlich die *Differenzen der Decremente* entweder ganz durch einerley bleiben, oder doch nur ein oder zweymal sich ändern; so ist die Arbeit noch viel kürzer, wenn man sich vorher nur die zuletzt erwähnte neue Hülfstabelle gemacht hat. Ein mittelmässig fertiger Calculator thut das in einer Stunde.

Uebrigens ist hierbey noch zu merken, dass es den Gebrauch dieser Methode nicht hindert, wenn man auch für die gegebenen Personen *eine verschiedene Sterbens-Ordnung* annehmen muss; wenn sie z. B. von verschiedenen Geschlechtern sind, und jedes Geschlecht seine eigene Mortalitätstafel haben soll. Nur versteht sichs dann, dass man zwo Hülfstabellen haben, und jedesmal die Zahlen aus der dazu gehörigen nehmen müsse.

123.

Satz. 30. Ist die mittlere Verbindungsdauer für zwo Personen vom Alter a, und b gegeben, $\overline{Cab}$, *so wird die Coexistenz für zwo andre, um gleich viele Jahre (n) älter, als jene, gefunden, wenn man von der ersten Dauer*

*) *Zusätze* zu diesem Capitel. §. 8.

Dauer die Summe der ersten (n) Glieder obiger Reihe (§. 108.), wodurch sie gegeben wird, abzieht, und den Rest durch das Product der zu den Jahren a und b gehörigen Anfangszahlen multiplicirt, und wiederum durch das Product der zu den Jahren a+n, und b+n gehörigen, dividirt.

Beweis. Es ist

$$C.\overline{ab} = \frac{1}{A.\,B}\left(\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B + + \overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B\right)$$

$$+ \frac{1}{A.B}\left(\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B + + \overset{y}{-}A.\overset{y}{-}B\right).$$ Man setze das erste Stück = Q, so ist

$$C\overline{ab} - Q = \frac{1}{A.B}\left(\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B + \overset{n+2}{-}A.\overset{n+2}{-}B + + \overset{y}{-}A.\overset{y}{-}B\right)$$

Das ist die mittlere Dauer der Verbindung nach dem *n*ten Jahre, oder über das *n*te Jahr hinaus gerechnet. Nun ist auch

$$\frac{1}{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}\left(\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B + + \overset{y}{-}A.\overset{y}{-}B\right) = C\overline{(a+n)(b+n)}.$$

Das ist die Coexistenz zweyer vom Alter $a+n$ und $b+n$.

Folglich $C\overline{(a+n).\,(b+n)} = \frac{A.\ B}{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}\cdot(C\overline{ab} - Q).$

124.

Zusatz 1. Wenn $n = 1$, so ist $Q = \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A.\ B}$.

Also $C_{\overline{(a+1)(b+1)}} = \frac{A.\ B}{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B}\left(C_{\overline{ab}} - \frac{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B}{A.\ B}\right)$

$= \frac{A.\ B}{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B} \cdot C_{\overline{ab}} - 1.$

Wenn $A.\ B - \overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B = \Delta\ (A.\ B)$, so ist

$C_{\overline{(a+1)(b+1)}} = C_{\overline{ab}}\left(1 + \Delta\ \frac{(A\ B)}{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}\right) - 1.$

Aber $\Delta\ (AB)$ ist $= A\,\Delta B + B\,\Delta A - \Delta A.\ \Delta B.$

Zusatz 2. Auch ist $C_{\overline{ab}} = \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A.\ B}\left(C_{\overline{(a+1)(b+1)}} + 1\right)$

$= C_{\overline{(a+1)(b+1)}} + 1 - C_{\overline{(a+b)(b+1)}} . \frac{\Delta\ A\ B}{A.\ B}$

das ist, aus der *Dauer der Verbindung zwoer Personen wird die Dauer für zwo andre um 1 Jahr jüngere, gefunden.*

Anmerkung 1. Wenn nur ein Jahr Unterschied des Alters bey beyden ist, so bekommt man nach diesen Formeln fast eben so leicht die Wehrte, als nach der oben (§. 114.) gezeigten Art zu interpoliren, und man erhält sie genauer.

Ex. Es sey $a = 15$, $b = 20$, so ist nach der Tabelle XXII. $C_{\overline{ab}} = 26,\ 12.$ Man suche die Dauer

Dauer der Verbindung für 16 und 21 Jahre. Es iſt $A = 511$, $B = 491$, $\Delta A = 4$; $\Delta B = 5$, und $\overset{1}{-}A = 507$; $\overset{1}{-}B = 486$. Alſo $511.\ 5 + 491.\ 4 - 4.5 = 4499$; $\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B = 246402$; und $\frac{4499}{246402} = 0,018$.

Nun nimmt man $26,12 - 1 = 25,12$, dazu addirt $26,12.\ 0,018 = 0,47$. Alſo iſt $C.\overline{16.21} = 25,12 + 0,47 = 25,59$. Die obige Interpolationsmethode giebt 25, 54, mit faſt eben ſo vieler Rechnung.

Anmerkung 2. Wenn man nach der Methode im §. 121. für ein Paar z. B. von 15 und 20 Jahren die Verbindungsdauer berechnet, ſo zeiget ſich zugleich, welche Zahlen aus der erſten Summe, die nach n. 1. zu ſuchen iſt, und die meiſte Mühe macht, ausfallen, im Fall *beyde* Perſonen 5, 10 und ſo mehrere Jahre älter ſind. Und da nun dieſer Unterſchied des Alters derſelbe bleibt, ſo kommen auch *dieſelben Differenzen* der Columne B *bey denſelben Summen* der Columne D zu ſtehen. Der erſten Vorſchrift kann alſo auf einmal für das Paar zu 15 und 20, und für alle ältere, die um gleich viele Jahre es ſind, ein Genüge geſchehen. Das übrige, was denn noch für jedes ältere Paar inſonderheit zu thun iſt, macht nicht viel aus. So erhält man durch die Rechnung für ein Paar, faſt zugleich die Reſultate für mehrere.

Zweyter Abſchnitt.

Von den Verbindungsrenten zwoer Perſonen.

125.

Erklärung.

Der *baare Wehrt der Verbindung* oder *des Zuſammenlebens* zwoer Perſonen (*der Wehrt der Coexiſtenz*) iſt der baare Wehrt einer jährlichen Rente 1, welche am Ende jedes Jahrs ſo lange ausgezahlt wird, als zwo Perſonen von gegebenen Alter zuſammen leben. *The Value of Annuity of joint Lives*, und kürzer *the Value of joint Lives*. Bey *Eheleuten* iſt es die *Ehezeitrente* oder die *Eherente*. Sie wird in dem folgenden bezeichnet durch $\lambda\overline{ab}$, wo *a* und *b* das Alter der Perſonen iſt.

126.

Satz 31. Der Wehrt der Verbindungsrente zwoer Perſonen von dem Alter a und b oder $\lambda\overline{ab}$, *iſt*

$$= \frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A \ \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A \ \overset{2}{-}B}{r^2} + + \right)$$

wenn *r* der Zinsfuſs, und A, $\overset{1}{-}A$, $\overset{2}{-}A$, B, $\overset{1}{-}B$, $\overset{2}{-}B$ wiederum die Zahlen aus der Mortalitätstabelle ſind. Alſo wenn β die *Altersergänzung* von dem gröſsern Alter *b* iſt, und die Reihe $\frac{\overset{1}{-}A \ \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A . \overset{2}{-}B}{r^2} + + \frac{\overset{\beta}{-}A \ \overset{\beta}{-}B}{r^\beta}$

durch

durch $\int \frac{\overset{\beta}{-}A.\ \overset{\beta}{-}B}{A.\,B\,r^{\beta}}$ bezeichnet wird, so ist $\lambda\overline{ab}$

$$= \int \frac{\overset{\beta}{-}A\ \overset{\beta}{-}B}{A.\,B\,r^{\beta}}.$$

Beweis. Die Theile der Reihe $\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B$, $\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B$, und so ferner, drucken für jedes Jahr die noch bestehenden Paare aus, die von A. B anfänglichen Paaren übrig sind, und an welche die Rente 1 zu zahlen ist. Davon ist also der baare Wehrt $\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r}$; $\frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{r^2}$ und so ferner. Folglich für *jedes einzelne Paar im Durchschnittt*, $\lambda\overline{ab}$

$$= \frac{1}{A.\,B} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{r^2} + + \right).$$

127.

Satz 32. Der baare Wehrt einer Rente, welche an eine der gegebenen Personen nach der Trennung lebenswierig bezahlet werden soll (der Wehrt des Ueberlebens, die Wittwer- oder die Wittwenrente bey Eheleuten) ist für eine Person, die zu A gehört

$$= \frac{1}{A.\,B.} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A\ (B - \overset{1}{-}B)}{r} + \frac{\overset{2}{-}A\ (B - \overset{2}{-}B)}{r^2} + + \right)$$

$$= \frac{1}{A\,B} \cdot\ B. \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + \right)$$

$$- \frac{1}{A.\,B} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{r^2} + + \right)$$

$$= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}.$$

Für

Für die vom Alter *b*, die zu B gehört, ist der Wehrt des Ueberlebens

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}B \cdot (A - \overset{1}{-}A)}{r} + \frac{\overset{2}{-}B\ (A - \overset{2}{-}A)}{r^2} ++ \right)$$

$$= \lambda\,\overline{b} - \lambda\,\overline{ab} = \int \frac{\overset{1}{-}B}{B\,r} - \int \frac{A.\,B}{A\,B\,r}.$$

Beydes erhellet aus §. 109.

128.

Zusatz 1. Sollte die Rente 1 bezahlet werden für jedes Jahr, das ein Paar zusammenlebender Personen *ganz ausgestorben* ist, also nach dem Tode aller beyder, und zwar so lange, bis beyde nach den Tabellen durchaus gestorben seyn müssen, das ist, so viele Jahre als die *Altersergänzung der jüngern Person* groß ist; wie denn so eine Art von *Waysenpensionen* vorkommen kann; so ist *der baare Wehrt des Ganzausgestorbenseyns*

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{(A - \overset{1}{-}A)\ (B - \overset{1}{-}B)}{r} + \frac{(A - \overset{2}{-}A)\ (B - \overset{2}{-}B)}{r^2} ++ \right) = \int \frac{(A - \overset{\alpha}{-}A).\ (B - \overset{\alpha}{-}B)}{r^{\alpha}}$$

wo α die Altersergänzung der jüngern ist. Oder wenn $\overset{1}{-}T$, $\overset{2}{-}T$, $\overset{3}{-}T$ ++ die Zahl der nach 1, 2, 3 ++ Jahren *Verstorbenen von A;* und $\overset{1}{-}t$, $\overset{2}{-}t$, $\overset{3}{-}t$ ++ die *Verstorbenen von B* bezeichnen.

=

$$= \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}T \; \overset{1}{-}t}{r} + \frac{\overset{2}{-}T . \overset{2}{-}t}{r^2} + + \right) \text{ §. 110.}$$

Dieſer Wehrt kann bezeichnet werden durch $\lambda\overline{-ab}$.

129.

Zuſatz 2. Iſt α die *Alterſergänzung der jüngern*, β *der ältern Perſon*, ſo bricht die Reihe

$$\lambda\,\overline{ab} = \frac{1}{AB} \left(\frac{\overset{1}{-}A \; \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A \; \overset{2}{-}B}{r^2} + + \right)$$

bey dem βten Jahre ab, ſo daſs $\frac{\overset{\beta}{-}A \; \overset{\beta}{-}B}{r^\beta}$ das letzte Glied iſt. Hier iſt $\overset{\beta}{-}B$ ſchon $= 0$; und ſo in allen folgenden.

Zuſatz 3. Alle vier Wehrte, der der *Coexiſtenz*, $\lambda\,\overline{ab}$, des *Ueberlebens* von A, $\lambda\,\overline{a} - \lambda\,\overline{ab}$, *des von B*, $\lambda\,\overline{b} - \lambda\,\overline{ab}$, und des *Ganzausgeſtorbenſeyns* $\lambda\,\overline{-ab}$ *zuſammen, machen den Wehrt einer Zeitrente auf* α *Jahre*, oder auf die Alterſergänzung des jüngern gegebenen Alters *a*, aus.

Es iſt nämlich dieſe Summe für jedes Jahr, z. B. für das *m*te,

$$\frac{\overset{m}{-}A . \overset{m}{-}B}{A B r^m} + \frac{\overset{m}{-}A . (B - \overset{m}{-}B)}{A B r^m} +$$

$$\frac{\overset{m}{-}B . (A - \overset{m}{-}A)}{A . B r^m} + \frac{(A - \overset{m}{-}A) . (B - \overset{m}{-}B)}{A B r^m} = \frac{1}{r^m}.$$

Alſo für alle α Jahre zuſammen, $= \int \frac{1}{r^\alpha}$.

130.

Zusatz 4. Die Reihe der Differenzen

$$\frac{A.\ B - \stackrel{1}{-}A\ \stackrel{1}{-}B}{A\,B\,r} + \frac{\stackrel{1}{-}A.\stackrel{1}{-}B - \stackrel{2}{-}A.\ \stackrel{2}{-}B}{A\,B\,r^2}$$

$$+ + \frac{\stackrel{n-1}{-}A.\ \stackrel{n-1}{-}B - \stackrel{n}{-}A.\ \stackrel{n}{-}B}{A.\ B\ r^n} \text{ sey} = R.$$

Addirt man diese zu $\lambda\,\overline{a\,b}$, so bekommt man

$$\left(\frac{AB}{ABr} + \frac{\stackrel{1}{-}A\ \stackrel{1}{-}B}{ABr^2} + \frac{\stackrel{2}{-}A\ \stackrel{2}{-}B}{AB.\,r^2} + + \frac{\stackrel{n-1}{-}A.\ \stackrel{n-1}{-}B}{ABr^n}\right)$$

das ist, weil das letzte Glied in $\lambda\,\overline{a\,b}$, nämlich

$$\frac{\stackrel{n}{-}A\ \stackrel{n}{-}B}{A\ B} = 0 \text{ ist} = \frac{A\ B}{ABr} + \frac{\lambda\,\overline{a\,b}}{r}.$$

Also $\lambda\,\overline{a\,b} + R = \frac{1}{r} + \frac{\lambda\,\overline{a\,\beta}}{r}$. Daraus wird

$$\lambda\,\overline{a\,b} = \frac{1 - r.\,R.}{r - 1} = p\,(1 - rR) \text{ weil } p = \frac{1}{r-1}.$$

Es thut also diese *Reihe der Differenzen* dieselben Dienste, wie oben bey dem Wehrt der Leibrente, §. 59. Es ist auch *r R der baare Wehrt einer Summe 1, welche bey aufhörender Verbindung zwoer Personen zahlbar ist.*

131.

Zusatz 5. Da aber $\stackrel{1}{-}A\ \stackrel{1}{-}B = (A - \Delta A)\ (B - \Delta B)$, $\stackrel{n}{-}A.\ \stackrel{n}{-}B = (\stackrel{n-1}{-}A - \Delta\ \stackrel{n-1}{-}A).\ (\stackrel{n-1}{-}B - \Delta\ \stackrel{n-1}{-}B)$, so ist auch

$$R = \frac{A.\Delta B}{ABr} + \frac{\overset{1}{-}A\ \Delta\ \overset{1}{-}B}{ABr^2} + +$$

$$+ \frac{B\,\Delta\,A}{ABr} + \frac{\overset{1}{-}B\ \Delta\ \overset{1}{-}A}{ABr^2} + +$$

$$- \left(\frac{\Delta A.\Delta B}{AB.r} + \frac{\Delta\,\overset{1}{-}A.\ \Delta\,\overset{1}{-}B}{AB.\,r^2} + + \right)$$

Allein ob hier gleich ΔA, ΔB kleine Zahlen ſind, ſo wird man doch nicht kürzer abkommen, wenn man dieſe drey Theile von R erſt einzeln, daraus R, und dann aus R wiederum $\lambda_{\overline{a\,b}}$ berechnen will.

Dieſe Theile von R aber können durch andere Theile, die einzeln leichter zu finden ſind, geſucht werden, zumal bey der Süſsmilchiſchen Tafel, wo die Differenzen der Decremente entweder = 1, oder = 0 ſind.

Dieſs Verfahren iſt in den *Zuſätzen* weiter erörtert. *) Hier will ich darum nicht weitläuftiger davon handeln, weil für die Praxis das nächſtfolgende um ein vieles kürzer und leichter iſt.

132.

Methode die Verbindungsrenten zwoer Perſonen leicht zu finden.

Die im nächſtvorhergehenden Abſchnitte beygebrachte Hülfstafel wird auf dieſelbige Art zur Berechnung

*) §. 10.

nung der *Verbindungsrenten* gebraucht, wie bey Berechnung der Dauer. Aller Unterschied besteht fast darin, dass hier die Zahlen der Columne E, die zwoten Summen der *discontirten Zahlen* der Lebenden genommen werden.

Die allgemeine Formel ist

$$\lambda_{\overline{a\,b}} = \int^{1}\frac{B}{Br} - \frac{1}{AB}\,\Delta\,A\;S.\int^{1}\frac{B}{r}$$

$$+ \frac{1}{AB}\cdot\Big(\Delta\,\Delta\,A.\;S.\int^{2}\frac{B}{r^{2}} +$$

$$\Delta\,\Delta\,\overset{1}{\overline{}}A.\;S.\int^{3}\frac{B}{r^{3}} + \Delta\,\Delta\,\overset{2}{\overline{}}A.\;S.\int^{4}\frac{B}{r^{4}} +$$

$$\Delta\,\Delta\,\overset{n-2}{\overline{}}A\;S.\int^{n}\frac{B}{r^{n}}\Big).$$

Dieser Ausdruck enthält folgendes Verfahren.

1) *Die Differenzen* aus der Columne C, von der an, welche zu dem jüngsten gegebenen Alter *a* gehört, schreibe oder lege man zur Seite der Zahlen der Columne E, so dass die erste Differenz ΔΔA bey der Summe, welche zu dem Jahre *b*+2 gehört, komme, wo *b* das älteste gegebene Leben ist; die folgenden bey den folgenden der Ordnung nach.

Nun wird jede Differenz in die beystehende Zahl multiplicirt, und aus diesen Producten wird eine Summe gemacht, die *verneinend* oder *bejahend* ist, je nachdem die Producte aus den *verneinenden* Differenzen, oder die entgegengesetzten das meiste ausmachen.

2) Auch

2) Auch wird das *Decrement* des Jahrs *a*, ΔA, multiplicirt in die Summe aus E, beym Alter *b*+*1*. Dieſs Product iſt $\Delta A\ S. \int \frac{^{1}-B}{r}$.

3) Die nach der erſten Regel gefundene Summe der Producte wird *abgezogen* von dieſem letztern, wenn jenes *poſitiv* (hinzugeleget, wenn es *negativ*) iſt, und dieſer *Reſt* (oder Summe) wird durch das Product der Anfangszahl A in die discontirte Anfangszahl B, das iſt, durch $\frac{A.\ B.}{r^{b}}$, *dividirt.*

4) Dieſen Quotienten ziehe man von der *Leibrente für das ältere gegebene Leben* ab, ſo bekommt man den Wehrt der Verbindung beyder Perſonen vom Alter *a* und *b.*

133.

Es iſt dieſe Methode hier eben ſo kurz, wie im vorigen Abſchnitt bey der mittlern Dauer der Verbindung. Uebrigens findet die dortige Anmerkung in §. 122. auch hier Statt.

Ex. *1.* *a* ſey 15 Jahr, *b* = 20 Jahr, ſo ziehe man

1) aus der Tabelle, und zwar aus der Columne E

Q Für

Für die Differenzen bey den Jahren.			*Die Summen bey den Jahren.*		
19)	—	1	26)	—	39510, 16
27)	—	1	34)	—	21373, 65
34)	—	1	41)	—	11741, 31
45)	—	1	52)	—	3884, 02
49)	—	1	56)	—	2428, 66
61)	—	1	68)	—	430, 09
				—	79367, 89
Ferner.					
70)	+	1	77)	+	76, 01
72)	+	1	79)	+	48, 13
74)	+	1	81)	+	29, 47
76)	+	1	83)	+	17, 30
79)	+	1	86)	+	7, 00
80)	+	1	87)	+	4, 98
83)	+	1	90)	+	1, 48
85)	+	1	92)	+	0, 50
89)	+	1	96)	+	0, 00
				+	184, 87
				—	79367, 89
				—	79183, 02

2) Bey dem Jahr 21 steht die Summe 56290, 64. Das Decrement für das Alter 15 Jahr, oder Δ A, ist 4. Also 4. 56290, 64 = 225162, 56. Dazu die vorige negative Summe, weil sie negativ ist, addirt, giebt 304345, 58.

3) Das Product AB: r^b ist 511. 224, 09 (aus der obigen Tafel §. 56.) = 114509, 99 und $\frac{304345, 58}{114509, 99}$ = 2, 6578. Diesen Quotienten von der Leibrente für

das

das Alter 20 Jahr, 16, 7905 abgezogen, hinterläſst 14, 1327, als den Wehrt der Verbindungsrente für 15 und 20 Jahre.

Ex. 2. Sind beyde *a* und *b* 50 Jahre, ſo ſind

1) die aus der Tabelle zu ziehenden Summen

63)	−	946, 39	72)	+	210, 69
			74)	+	142, 81
			76)	+	94, 44
			78)	+	60, 73
			81)	+	29, 47
			82)	+	22, 72
			85)	+	9, 63
			87)	+	4, 98
			91)	+	0, 90
				+	576, 37
				−	946, 39
				−	370, 02

2) Bey dem Jahr 51 ſteht in der Columne E die Zahl 4339, 76, und das Decrement für das Jahr 50 iſt 9; alſo 9. 4339, 76 = 39057, 84. Dazu addirt 370, 02, macht 39427, 86. Dieſes dividirt durch das Product aus der Zahl der Lebenden und der discontirten Zahl derſelben für das Jahr 50, das iſt durch 300. 42, 21 = 12663, ſo wird $\frac{39427,\ 86}{12663} = 3,\ 1136$.

3) Dieſen Quotienten abgezogen von der Leibrente für 50 Jahre, 10, 7961 hinterläſst 7, 6825, als den Wehrt der Verbindung.

Den Beweis für die allgemeine Richtigkeit dieſes Verfahrens ſehe man in den *Zuſätzen* zu dieſem Capitel. *)

134.

Satz 33. Nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben iſt der Wehrt der Verbindungsrente zwoer Perſonen, A und B, vom gegebenen Alter a und b ſo groſs, als die Differenz zwiſchen der beſtändigen Leibrente der erſtern und dem Quotienten, der herauskommt, wenn die nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſende Leibrente für dieſelbe ältere Perſon, durch die Alterergänzung (hier durch die doppelte mittlere Lebensdauer) der jüngern dividirt wird. Es iſt $\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{L\overline{b}}{\alpha}$, wo $L\overline{b}$, wie oben, eine nach der Ordnung der Zahlen ſteigende Rente für das Alter *b* ausdrucket; α aber die Alterſergänzung zu dem gegebenen Alter *a*, oder hier, die doppelte mittlere Lebensdauer derſelben iſt. Den Beweis ſiehe in den *Zuſätzen.* **)

135.

Anmerkung. 1. Folgt man gänzlich dieſer Hypotheſe, nimmt alſo auch die *Alterſergänzung* in ihrem eigentlichen Sinn, für den Unterſchied zwiſchen dem gegebenen Alter und dem höchſten Lebensziel, in welchem

Fall

*) §. 11.

**) §. 12. 13. 14.

Fall denn auch die mittlere Lebensdauer die hypothetiſche, nicht die wahre Hälfte davon iſt, ſo würde auch der Wehrt der einfachen Leibrente nach derſelben Vorausſetzung genommen werden müſſen; aber weil man weiſs, daſs die ſo gefundenen Wehrte zu weit von den wahren abgehen, ſo ſucht man ſie ſo, daſs die Hypotheſe nur zu Hülfe kommt. Auch der oben Cap. II. §. 79. berechnete Wehrt für eine ſteigende Leibrente auf das Alter 20 Jahr, iſt nicht durchaus der Hypotheſe gemäſs.

136.

Zuſatz. Nach der Süſsmilchiſchen Tafel, oder einer jeden andern, nach der das Abſterben nicht gleichförmig erfolgt, kann die Verbindungsrente auch nicht genau *) nach $\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha} L\overline{b}$ genommen werden. Will man aber nur *nähernde* Wehrte haben, ſo ſind dieſe hinreichend, die ſich mittelſt der obigen Hülfstabelle gar leicht finden laſſen.

Es ſey z. B. $a = 15$; $b = 20$, ſo wird $L\overline{b}$ durch eine Diviſion aus der Tabelle gefunden (nach §. 119.) 251,64. Die Altersergänzung zu 15 Jahren iſt 81; und die Leibrente $\lambda\overline{b}$ nach dem 4 Proc. Zinſenfuſs iſt 16,7905.

Nun hat man $16,7905 - \frac{251,64}{81} = 13,6838$.

Dieſs weicht vom wahren Wehrt 14, 1327 um 0,4489 ab.

 Nimmt

*) *Zuſätze* zu dieſem Capitel. §. 16.

Nimmt man *statt der Altersergänzung* die *doppelte mittlere Lebensdauer*, die für 15 Jahre 77, 12 ist, so erhält man 16, 7905 — $\frac{251,\ 64}{77,\ 12}$ = 13, 3274, welches um 0, 6053 abweicht.

Noch ein Beyspiel. Es sey $a = 50 = b$. Alsdenn ist aus der Tabelle (nach §. 119.) $\frac{4339,\ 76}{42,\ 21}$, (nämlich die beym Jahr 51 stehende Zahl der Columne E dividirt durch die Zahl der Lebenden bey 50 Jahr) = 102, 814 = $L\overline{b}$, und weil hier α die Altersergänzung 46 Jahre, und die einfache Leibrente für 50 Jahr = 10, 7961 ist, so erhält man 10, 7961 — $\frac{102,\ 814}{46}$ = 8, 5610, welches von dem wahren Wehrt 7, 6825 um 0, 8785 unterschieden ist. Will man aber statt der Altersergänzung die doppelte mittlere Lebensdauer gebrauchen, welche für 50 Jahre = 33, 9 ist, so bekommt man 10, 7961 — $\frac{102.\ 814}{33,\ 9}$ = 7, 7635, was nur um 0, 081 abweicht.

137.

Anmerkung. Der *Morganischen Methode* will ich hier doch auch erwähnen, da Herr D. *Price* in der neuesten Ausgabe seiner *Observations*, sie mit allem Recht als eine sichere Methode sehr rühmet, aber auch ohne Grund für so kurz und leicht ausgiebet, dass sie jede andere nun unnütz machen könne. Hieran fehlt noch

noch viel. Sie ist derjenigen ähnlich, die bey den einfachen Leibrenten von *Morgan* gebraucht wird. (Siehe oben Cap. I. §. 61.) Nämlich folgende.

1) Es werden alle Verbindungsrenten für *zwo* Personen, deren Alter so viele Jahre verschieden ist, als das Alter der gegebenen Personen *a* und *b* auf einmal gefunden, zuerst solcher zwo, wovon die ältere nur ein Jahr jünger ist, als das höchste Alter der Tabelle. Aus dieser die Rente für zwo Personen, deren jede ein Jahr jünger ist, als die vorigen, und so ferner aus der Rente eines Paars die nachfolgende für ein Paar, das um ein Jahr jünger ist. Diess geschieht nach einer Formel, die unten noch vorkommen wird. Diese Wehrte werden in die *zwote Columne* der Tabelle gesetzet, da in der *ersten* die Zahlen der Jahre stehen, in der Ordnung von den höhern zu den niedrigen.

2) In der *dritten Columne* setzet man die *baaren Wehrte einer Summe 1 zahlbar, wenn von zweyen zugleich Gebohrnen einer das höchste Lebensjahr, das nächsthöchste, das dritte vom höchsten, und so weiter erreicht, der andere auch dabey zu einem Alter kommt, was von des ersten seinem so viel Jahre verschieden ist, als der gegebene Unterschied des Alters a und b beträgt.* Ist dieser Unterschied *d*, so sind die Wehrte zu bezeichnen durch

$$\frac{{}^{\overline{x-1-d}}A \cdot {}^{\overline{x-1}}A}{A \cdot A} \cdot \frac{1}{r^{x-1}}, \quad \frac{{}^{\overline{x-2-d}}A \cdot {}^{\overline{x-2}}A}{A \cdot A} \cdot \frac{1}{r^{x-2}} \text{ u. s. f.}$$

3) Alsdenn diese Zahlen der *dritten* Columne summirt in der vierten, so daſs die Summe der vorhergehenden zu den ältern Jahren gehörigen Zahlen, dem nächstfolgenden niedrigern Altersjahr gegenüber steht.

Sind nun die Wehrte der zwoten Columne, das ist, die Wehrte der Verbindungsrenten richtig berechnet, so muſs das Product aus jeder derselben in die zur Seite stehende Zahl der *dritten* Columne, gleich seyn der Summe in der *vierten*. Dieſs ist eine doppelte Rechnung, die zugleich Probe von sich selbst ist.

Der Grundsatz, worauf dieſs Verfahren beruhet (auſser der Methode aus dem Wehrt der Verbindungsrente für zwey Leben, den Wehrt für zwey andere, jedes um ein Jahr jünger, zu finden) liegt darin. Es ist

$$\lambda\overline{ab} = \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A . \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A . \overset{2}{-}B}{r^2} ++ \right)$$

Hier sind A, B die Zahlen der Lebenden für die gegebene Altersjahre *a* und *b*. Man nehme A für die Zahl der *Gebohrnen* (oder der jüngsten Lebenden, so weit die Tabelle sie enthält) so kann was vorher A war durch $\overset{a}{-}A$, das ist A im Jahr *a*, und eben so B, durch $\overset{b}{-}A$, das ist, die Zahl A im Jahr *b* bezeichnet werden. Daher läſst sich $\lambda\overline{ab}$ durch

$$\frac{1}{\overset{a}{-}A \, \overset{b}{-}B} \left(\frac{\overset{a+1}{-}A . \overset{b+1}{-}A}{r} + \frac{\overset{a+2}{-}A . \overset{b+2}{-}A}{r^2} + + \right)$$

ausdrücken,

=

$$= \frac{r^b}{\overset{a}{-}A.\overset{b}{-}A}\left(\frac{\overset{a+1}{-}A.\overset{b+1}{-}A}{r^{b+1}} + \frac{\overset{a+2}{-}A.\overset{b+2}{-}A}{r^{b+2}} ++\right)$$

Dieſs werde multiplicirt mit $\frac{\overset{a}{-}A.\overset{b}{-}A}{A.\ A} \cdot \frac{1}{r^b}$. Das iſt, mit dem *baaren Wehrt einer nach b Jahren zahlbaren Summe 1, wenn einer* von zweyen das Alter *a*, *und auch* der andere das Alter *b* erreicht. Es iſt das Product

$$\frac{\overset{a}{-}A.\overset{b}{-}A}{A.\ A} \cdot \frac{1}{r^b}\,\lambda\,\overline{a\,b} = \frac{\overset{a+1}{-}A\ \overset{b+1}{-}A}{A.\ \ A.r^{b+1}} + \frac{\overset{a+2}{-}A.\overset{b+2}{-}A}{A.\ \ A.r^{b+2}} ++.$$

Das iſt gleich *der Summe aller folgenden Wehrte einer zahlbaren Summe 1*, wenn von zwey Gebohrnen (oder jüngſten in der Tabelle) einer das Alter *a*+*1*, der andere *b*+*1*; ferner einer *a*+*2*, der andere *b*+*2* erreichet hat. Dieſe Summen ſtehen in der *vierten* Columne. Der Factor $\frac{\overset{a}{-}A\ \overset{b}{-}A}{A.\ A}\,\frac{1}{r^b}$ ſteht in der *dritten* mit dem Wehrt $\lambda\,\overline{a\,b}$ in der zwoten in einer Linie.

Hieraus macht ſich jemand, wie ich meyne, leicht eine ſolche Tabelle, wenn er Luſt hat dieſer Methode nachzugehen. Es verſteht ſich nun auch, daſs Logarithmen gebraucht werden können, obgleich wohl nicht mit vielem Zeitgewinn für einen geübten Rechner.

138.

Satz 34. Wenn der Zinsenfuss niedrig ist, so ist der Wehrt der Verbindungsrente für zwo Personen nahe so gross als eine einfache Leibrente für ein Leben, dessen mittlere Dauer der Verbindung gleich ist. Wenn gar keine Zinsen gegeben würden, so würden beyde Wehrte völlig gleich seyn. Bey einem niedrigen Zinsenfuss ist die Abweichung geringe, wenn die Süssmilchische Tafel zum Grunde gelegt wird. Aber bey einem *höhern* Zinsfuss als 4 Proc. ist sie doch schon erheblich. Sie ist diess auch bey der Hypothese vom gleichförmigen Absterben, nur dass man alsdenn die Correction leicht findet. *)

Ex. 1. $a = 60$, $b = 60$, so ist die *Dauer* der Coexistenz, 7,48 Jahr. Diess ist die *Dauer eines Lebens* von 72, 28, dessen *Leibrente* = 5, 565 ist. Der *genaue Wehrt* der Coexistenz ist 5, 5575. Die Abweichung also nur 0, 0075.

Ex. 2. $a = 25$, $b = 60$. Die *Dauer der Coexistenz* ist 10, 70. Das ist *die Dauer zu* 63, 05 Jahr, wozu die *Leibrente* 7, 5574 gehört. Die *Rente der Verbindung* ist also 7, 5464. Die Abweichung vom wahren Wehrt 0, 011.

Aus mehreren Beyspielen hat sich gewiesen, dass man auf diese Art dem wahren Wehrt immer sehr nahe komme.

139.

*) *Zusätze* zu diesem Cap. §. 19. 20.

139.

Satz 35. Aufgabe. Die nach einem gewissen Zinsfuss berechneten Wehrte der Verbindungsrenten in solche für einen andern Zinsfuss zu verändern.

Erstes Verfahren.

Man suche die Wehrte nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben*, nach dem einen und nach dem andern Zinsfuss, nehme den *Unterschied zwischen diesen Wehrten auch für den Unterschied zwischen den genauen Wehrten an*, der dann von dem gegebenen Wehrte nach dem ersten Zinsfuss abgezogen oder hinzugelegt werden muss.

Zusatz. Man kömmt noch näher, wenn man annimmt, dass die *Differenz zwischen den hypothetischen Wehrten sich zu der Differenz zwischen den wahren Wehrten verhalte wie der hypothetische Wehrt zu dem richtigen*, nach demselben Zinsfuss.

Anmerkung. Diess ist das Verfahren, was schon bey den einfachen Leibrenten oben (Cap. II. §. 73.) gewiesen ist. D. *Price* versichert in vielen Exempeln gefunden zu haben, dass man bey den Verbindungsrenten auf diese Art den wahren Wehrt noch näher treffe, als bey den einfachen Leibrenten.

Ex. Die beyden Personen sind vom Alter 15 und 20 Jahre; der richtige Wehrt der Verbindungsrente auf 4 Proc. ist 14, 1329, der auf 5 Proc. wird gesucht.

Die

Die *arithmetiſche ſteigende Leibrente* für 20 Jahre, iſt nach der Hypotheſe, und bey dem 4 Proc. Fuſs, 248, 79. § 79. Auch iſt die *doppelte mittlere Lebensdauer* eines 15 jährigen, 2. 38, 56 = 77, 12, und einer 20jährigen = 70, 06. Daraus wird der *hypothetiſche Wehrt der Verbindungsrente* nach §. 134.

$$\lambda\,\overline{20} - \frac{L\,\overline{20}}{77,12} = 16,7905 - \frac{248,79}{77,12} = 13,5645.$$

Nun muſs auch der hypothetiſche Wehrt von L. $\overline{20}$ nach dem 5 Proc. Fuſs geſuchet werden; und zwar auf dieſelbe Art §. 79. aus der Zeitrente, und der ſimpeln Leibrente, und dem Grundcapital für dieſen Zinsfuſs. Wenn die Hülfstabelle im §. 117. auch nach dem 5 Proc. Fuſs zugleich eingerichtet iſt, ſo kann man dieſen zweyten hypothetiſchen Wehrt von L $\overline{20}$ auch daraus nehmen nach §. 119, aber alsdenn iſt man auch ohne dieſes Verfahren dem wahren geſuchten Wehrte der Verbindung ſchon nahe.

Nach dem 5 Proc. Fuſs iſt L $\overline{20}$ = 215, 116, und weil hier nach ebendemſelben $\lambda\,\overline{20}$. = 14, 6447, ſo wird

$$\lambda\,\overline{15.\,20} = 14,6447 - \frac{215,116}{77,12} = 11,8553.$$

Alſo die Differenz beyder Wehrte nach 4 und 5 Proc. iſt 13,5645 — 11,8553 = 1, 7092. Dieſes abgezogen von 14, 1329, hinterläſst 12, 4237. Und wenn man noch genauer vorher die Differenz in dem Verhältniſs des wahren und des hypothetiſchen Wehrts nach dem

4 Proc.

4 Proc. Fuſs, oder wie 14, 1329 : 13, 5645 vergrößert, so bekömmt man 12, 3870.

Zweytes Verfahren.

Man nehme die *einfache Leibrente nach dem ersten Zinsfuſs*, welche der gegebenen *Verbindungsrente nach demselben Zinsfuſs* am nächsten kommt. Dazu suche man aus der *Leibrententafel* die *Leibrente* für dasselbe Alter nach dem *neuen Zinsfuſs*, und sage: *wie sich eine einfache Leibrente nach dem ersten Zinsfuſs zu der nach dem zweyten für dasselbe Alter verhält, so verhält sich der gegebene Wehrt der Verbindungsrente zu dem gesuchten nach dem neuen Zinsfuſs.*

Ex. Die *Verbindungsrente* für 15 und 20 Jahre, nach dem 4 Proc. Fuſs, ist 14, 1329. Die dieser *nächste einfache Leibrente* nach dem 4 Proc. Fuſs ist die für 35 Jahre, 14, 1175. Nach dem *5 Proc.* Fuſs ist die *einfache Leibrente* für dasselbe Alter, 12, 5924. Also 14, 1175 : 12, 5924 = 14, 1329 : 12, 6298.

Unterschied von dem auf vorige Art gefundenen Wehrte 0, 2061.

Anmerkung. Beyde Auflösungen geben nur *nähernde Wehrte.* Die leztere ist kürzer, wenn sie auch etwas weniger genau seyn sollte. Beyde setzen auch voraus, daſs die einfachen Leibrenten schon nach dem Zinsfuſs berechnet sind, nach welchem man die Verbindungsrenten sucht.

Nach

Nach dem 34sten Satz im 138sten §. kann die einfache *Leibrente* bey dem neuen Zinsfuss, die zu demselben Alter gehört, wofür die nach dem ersten Zinsfuss gegebene *Verbindungsrente*, als einfache *Leibrente* betrachtet, zu nehmen ist, als die *Verbindungsrente* nach dem neuen Zinsfuss angesehen werden. Allein auf diese Art würde die Abweichung doch beträchtlicher werden in den Fällen, wo der neue Zinsfuss nicht mehr niedrig ist, und 4 Proc. übersteiget.

140.

Satz 36. Aus dem Wehrt der Verbindungsrente für zwey Leben a und b, wird der Wehrt derselben für zwey andere gefunden, die beyde um n Jahre älter sind, wenn man von dem Wehrt $\lambda\overline{ab}$, *die ersten n Glieder der Reihe abzieht, und den Rest multiplicirt* mit $r^n . \frac{A\ B}{{}^{n}\!A\ {}^{n}\!B}$. .

Oder es ist $\lambda\overline{(a+n)(b+n)} = \frac{r^n . A\,B}{{}^{n}\!A\ \ {}^{n}\!B}\ (\lambda\overline{ab} - Q)$,

wenn Q statt der ersten *n* Glieder jener Reihe gesetzet wird.

Beweis. Es ist $\lambda\overline{ab} = \frac{1}{A.\,B} . \left(\frac{{}^{1}\!A.\ {}^{1}\!B}{r} + + \frac{{}^{n}\!A.\ {}^{n}\!B}{r^n}\right) + \frac{1}{A.\,B} . \left(\frac{{}^{n+1}\!A.\ {}^{n+1}\!B}{r^{n+1}} + +\right)$ Das erste Stück = Q ist der *Wehrt einer Rente des Zusammenlebens, die nach n Jahren aufhöret*, und

$\lambda\overline{ab}$

$\lambda\,\overline{ab} - Q = \frac{1}{AB}\left(\frac{\overset{n+1}{-}A\ \overset{n+1}{-}B}{r^{n+1}} + +\right)$ ist der Wehrt einer auf *n* Jahre *aufgeschobenen Verbindungsrente;* und $\frac{A.\,B\,r^{n}}{\overset{n}{-}A.\,\overset{n}{-}B} \cdot (\lambda\,\overline{ab} - Q) = \frac{1}{\overset{n}{-}A.\,\overset{n}{-}B} \cdot$

$\left(\frac{\overset{n+1}{-}A.\ \overset{n+1}{-}B}{r} + +\right) = \lambda\,\overline{(a+n)\,(b+n)}.$

141.

Zusatz 1. Wenn $n = 1$, so ist $Q = \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\ B\,r}$

und $\lambda\,\overline{(a+1)(b+1)} = \frac{A.\ B}{\overset{1}{-}A.\,\overset{1}{-}B} \cdot r\left(\lambda\,\overline{ab} - \frac{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B}{A.\ B\,r}\right)$

$= \frac{A.\,B\,r}{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B} \cdot \ \lambda\,\overline{ab} - 1 = \frac{\left(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B + \Delta.(A\,B)\right) r\,\lambda\,\overline{ab}}{\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B} - 1.$

$= \lambda\,\overline{ab} + \left(r - 1 + \frac{r.\,\Delta\,(A\ B)}{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}\right)\lambda\,\overline{ab} - 1.$

Zusatz 2. Und weil $\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)} < \lambda\,\overline{ab}$, so ist auch $1 > \left(r - 1 + \frac{r.\,\Delta\,(AB)}{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}\right) \cdot \ \lambda\,\overline{ab}.$

142.

Zusatz 3. Ist die *Verbindungsrente* für $a+1$, und $b+1$ gegeben, so wird die für die um Ein Jahr jüngere *a*, *b*, oder $\lambda\,\overline{ab} = (\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)} + 1)\,\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r.\,AB}$

$= \left(\frac{\lambda\,\overline{(a+1)\,(b+1)} + 1}{r}\right).\ \left(1 - \frac{\Delta\ \overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\ B}\right).$

143.

143.

Zusatz 4. Eine auf *n* Jahre *aufgeschobene Verbindungsrente* $\overset{-n}{=}\lambda\,\overline{a\,b}$ ist $= \frac{\lambda\,\overline{(a+n)}\,\overline{(b+n)}}{r^n} \cdot \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A.\,B}$.

Denn sie ist $= \frac{1}{A.\,B} \cdot \left(\frac{\overset{n+1}{-}A.\ \overset{n+1}{-}B}{r^{n+1}} + + \right)$

$$= \frac{1}{AB} \cdot \frac{\overset{n}{-}A.\ \overset{n}{-}B}{\overset{n}{-}A.\ \overset{n}{-}B} \cdot \frac{1}{r^n} \left(\frac{\overset{n+1}{-}A.\ \overset{n+1}{-}B}{r} ++ \right), \text{und}$$

$$\frac{1}{\overset{n}{-}A.\ \overset{n}{-}B} \left(\frac{\overset{n+1}{-}A.\ \overset{n+1}{-}B}{r} + + \right) = \lambda\,\overline{(a+n).\ (b+n)}.$$

Also $\frac{1}{r^n} \cdot \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A\ B}\ \lambda\,\overline{(a+n)\ (b+n)} = \overset{-n}{=}\lambda\,a\,b.$

Ex. Ist $a = 20$, $b = 30$, und soll sie 15 Jahre aufgeschoben werden, so ist $\lambda.\ \overline{35.\ 45.} = 9,7091$, nämlich nach *Süssmilchs* Tabelle und dem 4 Proc. Fuss. $A = 491.\ B = 439$, $\overset{n}{-}A = 409$; $\overset{n}{-}B = 339$ und $r^n = 1,8009$. Daher die 15 Jahre aufgeschobene Rente $= \frac{409 \cdot 339}{491 \cdot 439} \cdot \frac{9,7091}{1,8009} = 4,2581.$

144.

Zusatz 5. Auch findet man aus $\lambda\,\overline{a\,b}$ den Wehrt $\lambda\,\overline{a\,(b+1)}$, das ist, den Wehrt der Verbindungsrente für zwo Personen, von denen *nur Eine* um Ein Jahr älter ist.

Allein

Allein man muſs den Wehrt einer beym Tode der Person A zahlbaren Summe, im Fall die andere B alsdenn noch lebet, dazu haben. Man ſehe die *Zuſätze.* *)

145.

Die *Tabellen* XXIV. XXV. XXVI. enthalten die *Verbindungsrenten* zwoer Perſonen, bis auf eine gewiſſe Grenze, wie es für die Praxis zureicht. Die zwiſchen den in den Tabellen fallenden werden gewöhnlich auf dieſelbige Art *interpolirt*, wie oben §. 114. bey der *Dauer* der Verbindung gezeiget iſt. Sind beyde Perſonen Ein Jahr jünger oder älter als in den Tabellen, ſo kann man auch nach der Formel in §. 142. die *genauen* Wehrte finden, was die interpolirten doch nicht ſind, und zwar ſehr leicht. Z. B. nach dem §. 142. findet man aus der Verbindungsrente für zwo Perſonen, jede von 50 Jahren 7,6865 (Tab. XXIV.) die Rente für zwo von 49 Jahren $\frac{(7,6865+1)}{1,04} \cdot \frac{(300)^2}{(308)^2} = 7,9239$, da man durch das gewöhnliche Interpoliren 7,9164 bekommt, das iſt, 0,075 weniger.

146.

Satz 37. Eine vorſchuſsweiſe zu zahlende Verbindungsrente, die jährlich bezahlet wird, iſt um eine Jahrshebung gröſser als eine gewöhnliche.

Dieſs

*) zu dieſem Capit. §. 17.

Dieſs iſt für ſich klar, weil alles übrige ſo bleibt, wie vorher §. 126; nur daſs gleich baar noch eine Jahrshebung, die pränumerirte, hinzukommt.

Anmerkung. Doch wird auch vorausgeſetzt, daſs nichts zurück bezahlet werde für die Theile des Jahrs, welche die Verbindung nicht durch gedauert hat, und wofür doch vorausgezahlet iſt.

147.

Satz 38. Soll die Verbindungsrente halbjährlich bezahlet werden, ſo muſs zu dem Wehrt derſelben auf ganze Jahre noch $\frac{1}{4}$*tel einer Jahrshebung, als Correction, zugelegt werden. Bey vierteljährlichen Zahlungen iſt die Correction* $\frac{3}{8}$, *und bey augenblicklichen* $\frac{1}{2}$ *einer Jahrshebung. In den Tabellen iſt ſchon* $\frac{1}{2}$ *hinzugeſetzet.*

Die Zinſen für die kleinen Theile des Jahrs werden aber der Zeit proportionell gerechnet. Mehr davon (denn es hängt von der genauen Auseinanderſetzung dieſes Puncts etwas ab) in den *Zuſätzen* zu dieſem Cap. *)

148.

Satz 39. Der Wehrt einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſenden Verbindungsrente $(L\overline{ab})$ *wird nach der Hypotheſe des gleichförmigen Abſterbens gefunden, durch die Wehrte der ſimpeln Verbindungsrenten, und durch die Zeitrenten und Leibrenten für einzelne Perſonen.*

Sind

*) §. 18. und folg.

Sind beyde Perſonen von gleichem Alter *a*, ſo iſt $L\overline{aa} = 3 \cdot p \cdot \lambda\overline{aa} - 2\, p\, \lambda\overline{a}$. Siehe *Zuſätze* zu dieſem Capitel. *)

149.

Zuſatz. Wenn die *Reihe der Differenzen* in §. 130. oder, *der auf ein Jahr zurück discontirte Wehrt einer bey der Trennung zahlbaren Summe 1*, nach der Vorausſetzung berechnet iſt, *daſs dieſe Summe im Verhältniſs mit der Dauer der Verbindung wachſe*, und alsdenn $= R'$ geſetzet wird, ſo iſt auch nach jeder Sterbensordnung $L\overline{ab} = \frac{\lambda\overline{ab} + 1 - rR'}{r - 1}$. Siehe *Zuſätze* zu dieſem Capitel. **)

Dritter Abſchnitt.

Vom Zuſammenleben dreyer und mehrerer Perſonen.

180.

Satz 40. Die mittlere Dauer des Zuſammenlebens dreyer vom Alter a, b, c oder $C\overline{abc}$ iſt

$$= \frac{1}{A.B.C} \cdot \left(\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C + \overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B.\overset{2}{-}C + +\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \int \frac{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B.\ \overset{1}{-}C}{A.\ \ B.\ \ C} + \frac{1}{2}$$ *und der Wehrt der Verbindungsrente oder des Zuſammenlebens* $\lambda\overline{abc}$ iſt

*) §. 21. **) §. 24.

$$= \frac{1}{A.B.C}\left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{r} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B.\overset{2}{-}C}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{A.B.C}\int\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{r}.$$ Dieſs iſt aus dem vorhergehenden für ſich klar.

151.

Anmerkung. Man legt noch $\frac{1}{2}$ hinzu als Correction bey der Dauer des Zuſammenlebens. Zu dem *Wehrt der Verbindung* wird auch $\frac{1}{2}$ addirt, wenn die Rente als in jedem *Augenblicke* zahlbar, oder doch für alle Augenblicke des Zuſammenlebens gerechnet werden ſoll. Aus demſelben Grunde wie oben bey der Verbindung von zwey Leben. (§. 113. und 147.)

152.

Die Art die Dauer des Zuſammenlebens dreyer Perſonen und die Wehrte der Verbindungsrenten kürzer zu finden.

Die obige Hülfstabelle dient hier wiederum zur Berechnung für drey Perſonen. Sie wird weitläuftiger als vorher für zwo Perſonen. Aber doch nur etwas mehr, als wenn *zwo Verbindungen* von zwoen auf die obige Art zu berechnen ſind. Die Vorſchrift liegt in der nächſtſtehenden Formel, dazu der Beweis in den *Zuſätzen* ſtehet. *)

Es

*) §. 26.

Es ist

$$\lambda\,\overline{a\,b\,c} = \lambda\,\overline{c} - \left(\frac{A.\Delta B + B.\Delta A - \Delta A.\Delta B}{A.\ B.\ C}\right) S.\int \frac{\overset{1}{-}C}{r^1}$$

$$+ \frac{1}{A.\ B.\ C} \cdot \Big((A.\Delta\Delta B + B.\Delta\Delta A - \Delta\Delta A.\Delta\Delta B)\ S.\int \frac{\overset{2}{-}C}{r^2}$$

$$+ (\overset{1}{-}A.\Delta\Delta\overset{1}{-}B + \overset{1}{-}B.\Delta\Delta\overset{1}{-}A - \Delta\Delta\overset{1}{-}A.\Delta\Delta\overset{1}{-}B)\ S.\int \frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + + + \Big)$$

Das ist:

1) Man nehme eins von den gegebenen Leben, es sey das *älteste*, oder ein jedes andere. Man kann auch das *jüngste* nehmen, zuweilen wird das eine, zuweilen das andere, die meistenmale, falls nicht zwo sehr alte Personen da sind, das erstere das kürzeste seyn. Es sey das, was hier mit *c* bezeichnet ist, wozu die Anfangszahl C gehört.

2) Den Zahlen der Columne E in der obigen Tabelle von dem Jahre $c+2$ an, schreibe man erstlich die *Differenzen* zur Seite, die zu *a* gehören. Die erste Differenz bey dem Jahr *a* oder $\Delta\Delta A$, kommt bey der zum Jahr $c+2$ gehörigen Summe in E zu stehen.

3) Ferner schreibe man die Zahlen der *Lebenden*, die mit dem Jahr *b* anfangen, B, $\overset{1}{-}B$, und so ferner, gleichfalls jenen Zahlen zur Seite. Wenn man diese Columne aus der Sterblichkeitstafel beweglich macht, so kann man sie zur Seite legen.

 4) Wo

4) Wo die Differenz nicht $=$ o wird, muſs die Summe der Columne E mit der Differenz und mit der damit zuſammentreffenden Zahl der Lebenden multiplicirt werden.

Auf dieſe Weiſe erhält man die Summe von

$$B.\Delta\Delta A\, S.\int \frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + \overset{1}{-}B\,\Delta\Delta\overset{1}{-}A\, S.\int \frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + +$$

5) Auf dieſelbige Art ſucht man die Summe von

$$A.\Delta\Delta B\, S.\int \frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + A.\Delta\Delta\overset{1}{-}B\, S.\int \frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + +$$

6) Und auf gleiche Weiſe die Producte

$$\Delta\Delta A.\Delta\Delta B.\, S.\int \frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + \Delta\Delta\overset{1}{-}A.\Delta\Delta\overset{1}{-}B.\, S.\int \frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + +$$

Dieſs ſind die Zahlen der Columne E ſelbſt, wo nicht eine der Differenzen $=$ o iſt, weil ſie bey der Süſsmilchiſchen Tafel entweder $= 1$, oder $=$ o ſind.

7) Die zuletzt nach n. 6. erhaltene Summe wird von den beyden vorhergefundenen abgezogen.

8) Der Reſt, falls er *poſitiv* iſt, wird abgezogen (ſonſt *zugelegt*) von dem Product der Summe in der Columne E; welche bey dem Jahr $c+1$ ſteht, multiplicirt durch $A\Delta B + B.\Delta A - \Delta A.\Delta B$, und dann was übrig iſt, dividirt durch das Product aus den Anfangszahlen A, und B, und dem discontirten C, (oder $C:r^c$.)

9) End-

9) Endlich wenn dieser Quotient abgezogen wird von dem Wehrt der Leibrente für die dritte Person C, so bekommt man den genauen Wehrt der Verbindungsrente der gegebenen dreyen, $\lambda\overline{abc}$, wozu denn noch die Correction $\frac{1}{2}$ hier zuzulegen ist. §. 151.

Anmerkung 1. Wenn *die Dauer der Verbindung* gesucht wird, so gebraucht man statt der Summen in der Columne E, die in D, und anstatt der *discontirten Zahl* $C:r^c$ nimmt man zum Factor des Divisors die Zahl C selbst. Alles übrige ist dasselbe.

Uebrigens sieht man, dass es hier solcher nach der 4ten und 5ten Vorschrift auszuziehender Summen nicht mehrere gebe, als es giebt, wenn für die Verbindung zwoer Personen *b* und *c*, und auch für die beyden *a* und *c* zu rechnen ist. Nur dass jene Summen hier einzeln mit den Zahlen der Lebenden zu multipliciren sind. Die Arbeit ist also sehr erträglich. Auch versteht sich von selbst, dass bey einer andern Sterblichkeitstafel, und bey einem andern Zinsfuss auch eine andere Hülfstafel erfordert werde. Das Verfahren aber ist dasselbe.

153.

Anmerkung 2. Es kann auch auf eine ähnliche Art, wie oben §. 137. bey der Verbindung von zwo Personen, die *Morgansche* Methode angebracht, und aus einer gegebenen *Dauer der Verbindung* von *dreyen*, oder *aus einer gegebenen Verbindungsrente*, eine andere für drey

Personen, *die um gleich viele Jahre am Alter verschieden sind*, berechnet werden. Da das nähere von selbst sich zeiget, so will ich bloss daran erinnern.

154.

Anmerkung 3. Für drey Personen von *gleichem Alter* kann man sich leicht eine Hülfstabelle machen, wenn man für jedes Jahr das Quadrat der Lebenden multiplicirt mit der discontirten Zahl der Lebenden zur Berechnung der Rente, und die Cubiczahlen der Lebenden nimmt zu der *Dauer* der Verbindung, und dann diese Zahlen wie vorher in Summen bringt. Die Summe, welche bey dem Jahr $a+1$ steht, wird durch die Zahl bey dem Jahr a dividirt, und der Quotient giebt das Gesuchte, wozu noch $\frac{1}{2}$ als Correction zugesetzet wird, wenn es die Dauer ist, was man suchet.

Wenn das Alter verschieden ist, aber nicht über *acht* Jahre zwischen dem jüngsten und ältesten, und dazu das jüngste zwischen 10 und 50 Jahr ist, so kann man das *arithmetische Mittel aus ihrem Alter*, für das *gemeinschaftliche Alter* annehmen, und nach der letztgedachten Tabelle die Dauer und den Wehrt der Verbindung suchen. Man wird sie dem wahren Wehrt nahe finden. D. *Price*, der diese practische Anmerkung hat, bestätigt sie durch mehrere Beyspiele aus der Northamptonschen Tafel.

155.

Satz 41. Wenn die Verbindungsrente für drey Personen von bestimmtem Alter gegeben ist, so wird daraus der Wehrt für drey andere, die jeder um 1 Jahr älter sind, leicht gefunden. Es ist

$$\lambda_{\overline{(a+1)(b+1)(c+1)}} = r \frac{A.\ B.\ C}{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C} \cdot \lambda_{\overline{abc}} - r.$$

Beweis. Denn $\lambda_{\overline{(a+1)(b+1)(c+1)}}$

$$= \frac{1}{A.\ B.\ C} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{r} + \frac{\overset{2}{-}A + \overset{2}{-}B.\overset{2}{-}C}{r^2} + + \cdots \right.$$

$$\left. - \frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{r} \right) r. \frac{A.\ B.\ C}{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C} = \frac{A.\ B.\ C}{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C} . r. \lambda_{\overline{abc}} - r.$$

156.

Zusatz 1. Ist von der *Dauer der Coexistenz* die Frage, so ist $C_{\overline{(a+1)(b+1)(c+1)}}$

$$= \frac{A.\ B.\ C}{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C} \cdot C_{\overline{abc}} - 1, \text{ und}$$

$$C_{\overline{abc}} - C_{\overline{(a+1)(b+1)(c+1)}} = 1 - \frac{\Delta(ABC)}{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C} \cdot C_{\overline{abc}},$$

oder wenn $\Delta\, C_{\overline{abc}}$ die Differenz der Verbindungsdauer ist, für Ein Jahr ältere Personen, so ist

$$\Delta . C_{\overline{abc}} = 1 - \frac{\Delta(A\,B\,C)}{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C} \cdot C_{\overline{abc}}.$$

Zusatz 2. Und weil so wohl die *Dauer* selbst, als der Wehrt der Rente kleiner ist, wenn die Personen älter sind, so muss $1 > \left(r - 1 + \frac{r.\Delta ABC}{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C}\right)\lambda\overline{abc}$ seyn.

Denn

$$\lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} = \left(\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C + \Delta(ABC)(1+r-1)\lambda\overline{abc}}{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C}\right)$$

$$-1 = \lambda\overline{abc} + \left(r - 1 + \frac{r.\Delta(ABC)}{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C}\right)\lambda\overline{abc} - 1.$$

Folglich $\lambda\overline{abc} - \lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} = \Delta\lambda\overline{abc}$

$$= 1 - \left((r-1) + r.\frac{\Delta ABC}{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C}\right).\ \lambda\overline{abc}.$$

Zusatz 3. Geht man von den Wehrten für ältere Personen zurück auf die für jüngere, den Unterschied des Alters beybehalten, so findet man

$$C\overline{abc} = \left(C\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} + 1\right)\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C}{A.\,B.\,C};$$

$$\lambda\overline{abc} = \left(\frac{\lambda\overline{(a+1)(b+1)(c+1)} + 1}{r}\right)\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C}{A.\,B.\,C}.$$

Anmerkung. Bedient man sich in dem Factor $\frac{{}^{1}A.\,{}^{1}B.\,{}^{1}C}{A.\,B.\,C}$ statt der Zahlen der Lebenden ${}^{1}C$ und C, der *discontirten* Zahlen $\frac{{}^{1}C}{r^{c+1}}$, $\frac{C}{r^{c}}$, so braucht nicht noch einmal durch *r* dividirt zu werden.

Dafs hierbey auch wiederum *Morgans* doppelte Rechnung könne angebracht werden, wie oben §. 137. fällt von selbst auf. Nach ihr ist die XXIX[te] Tafel berechnet. Beym *Price* in der neusten Ausgabe seiner *Observations* kommen noch einige Tabellen von Verbindungsrenten für drey Personen vor, die ich nicht nöthig finde, hier anzufügen.

157.

Anmerkung. Wenn *die veränderte Süſsmilchische Tafel mit gleichförmig sich ändernden Decrementen* zum Grunde gelegt wird, so giebt es eine allgemeine Formel, wornach die *Dauer der Verbindung* sowohl, als die *Verbindungsrenten* auf *drey* Personen berechnet werden können.*) Aber sie ist, nicht sowohl, weil sie für sich zu sehr zusammengesetzt ist, als weil sie auf mehrere unterschiedene Theile der ganzen Reihe besonders angewendet werden muſs, zum Gebrauch ein wenig beschwerlich, obgleich immer noch leichter als die gewöhnlichen Rechnungen.

Die Formel, die nach *der Hypothese vom gleichförmigen Absterben* herauskommt, ist einfach genug. Auch lassen sich bey ihr einige Abkürzungen anbringen. Diefs steht in den *Zusätzen* zu diesem Capitel. **)

158.

*) *Zus.* §. 27.

**) §. 31.

158.

Satz 42. Hat man die Verbindungsrenten für zwo Perſonen und auch die Wehrte der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſenden Verbindungsrenten, ſo erhält man, die Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben zum Grunde gelegt, daraus, und aus der gegebenen mittlern Lebensdauer der dritten Perſon den Wehrt der Verbindungsrente für drey Perſonen auf dieſe leichte Art:

Man dividirt *die wachſende Verbindungsrente der zwo älteſten, durch die doppelte Lebensdauer der dritten jüngſten, und zieht den Quotienten von der Verbindungsrente für jene beyden ältern ab.* Oder $\lambda\,\overline{a\,b\,c} = \lambda\,\overline{b\,c} - \frac{1}{\alpha}\,L\,\overline{b\,c}$, wenn α die Altersergänzung, oder hier die *doppelte mittlere Lebensdauer der jüngern*, vom Alter *a* iſt. Den Beweis ſiehe in den *Zuſätzen.* *)

159.

Zuſatz. Daſſelbe läſst ſich auf *mehrere zuſammenlebende Perſonen* fortſetzen. Hat man $\lambda\,\overline{b\,c\,d}$ und auch $L\,\overline{b\,c\,d}$, ſo iſt für 4 Perſonen $\lambda\,\overline{a\,b\,c\,d} = \lambda\,\overline{b\,c\,d} - \frac{1}{\alpha}\cdot L\,\overline{b\,c\,d}$.

160.

Satz 43. Die Dauer der Verbindung für drey Perſonen kann auf folgende Weiſe nahe gefunden werden:

Die

*) §. 30.

Die Dauer der Verbindung für B und C, die beyden ältesten, sey gleich der mittlern Lebensdauer von D; nun nehme man die Dauer der Verbindung von A und D, für die Verbindungsdauer der dreyen.

Ex. Das Alter a von A sey = 30
— — b — B — = 30
— — c — C — = 40.

So ist $C\overline{30.\ 40} = 17,11 = E\overline{49,7}$. (Tab. XXII.)
und $C\overline{30.\ 49,7} = 13,72$
der *genaue Wehrt* ist = 13,82

Unterschied = 0,10

Ex. 2. Für $a = 30$, $b = 40$, $c = 40$, ist
$C\overline{40.\ 40} = 15,27 = E\ \overline{53,42}$, und
$C\overline{30.\ 53,42} = 12,72$
Der genaue Wehrt für
$C\overline{34.\ 40.\ 40}$ ist = 12,66

Unterschied = 0,06

Anmerkung. Um noch in mehreren Beyspielen diese ihrer Leichtigkeit wegen brauchbare Methode prüfen zu können, will ich folgende vom *Herr von Drateln* nach der Süſsmilchischen Tafel genau berechnete Verbindungsdauer dreyer Personen hersetzen.

1)	C. $\overline{35.35.45}$	= 11, 91	11)	C. $\overline{35.45.45}$	= 10, 85
2)	C. $\overline{40.40.50}$	= 10, 23	12)	C. $\overline{40.50.50}$	= 9, 11
3)	C. $\overline{45.45.55}$	= 8, 61	13)	C. $\overline{45.55.55}$	= 7, 65
4)	C. $\overline{50.50.60}$	= 7, 03	14)	C. $\overline{50.60.60}$	= 6, 17
5)	C. $\overline{55.55.65}$	= 5, 72	15)	C. $\overline{55.65.65}$	= 4, 88
6)	C. $\overline{60.60.70}$	= 4, 58	16)	C. $\overline{60.70.70}$	= 3, 90
7)	C. $\overline{65.65.75}$	= 3, 60	17)	C. $\overline{65.75.75}$	= 3, 12
8)	C. $\overline{70.70.80}$	= 2, 89	18)	C. $\overline{70.80.80}$	= 2, 52
9)	C. $\overline{75.75.85}$	= 2, 36	19)	C. $\overline{75.85.85}$	= 2, 05
10)	C. $\overline{80.80.90}$	= 1, 89	20)	C. $\overline{80.90.90}$	= 1, 69

161.

Zuſatz 1. Man kömmt am nächſten, wenn man die *beyden älteſten* Leben zuerſt verbindet, und daraus das *mittlere einfache Leben* von gleicher Dauer ſuchet. Iſt aber überhaupt der Unterſchied des Alters nicht groſs, ſo iſt es auch faſt gleichgültig, welche man zuerſt nimmt.

Zuſatz. 2. Bey der Hypotheſe *vom gleichförmigen Abſterben*, kann der Unterſchied der ſo gefundenen Dauer von der *genauen* nicht ganz ein Nichts, aber doch auch ſo groſs nicht ſeyn. Man ſehe die *Zuſätze* zu dieſem Capitel. *)

Zuſatz 3. Daſs man bey *vier* und *mehreren* Perſonen daſſelbe Verfahren anbringen könne, alſo mit der Tabelle von den Verbindungen zweyer Perſonen ziemlich ausreiche, iſt eine Folge davon.

162.

*) §. 38 ſeq.

162.

Satz 44. Der Wehrt einer Leibrente auf ein Leben, dessen mittlere Dauer so groſs ist, als die mittlere Verbindungsdauer dreyer Personen kann für den Wehrt dieser Verbindungsrente beynahe angenommen werden.

Wenn keine Zinsen bezahlet werden, so ist es genau so; und wenn der Zinsfuſs nicht hoch ist, *muſs* es *beynahe* so seyn. Bey der Verbindung von zweyen trifft es (nach Satz 34. §. 138.) sehr nahe, daſs wenn ihre *Verbindungsdauer der Dauer eines einfachen Lebens* gleich ist, auch der *baare Wehrt der Rente für jene, der Leibrente für diese gleich sey.* Bey der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* können sie für *drey* Personen auch nicht viel verschieden seyn.

Ex. 1. Für 30. 40 und 40 ist die *Dauer der Coexistenz* 12, 66. Dieſs ist die *mittlere Lebensdauer einer Person* von 58, 78 Jahr, deren *Leibrente* 8, 6899 ist. Der *genau berechnete Verbindungswehrt* jener dreyen ist 8, 5867, nach Süſsmilchs Tafel und 4 Proc. berechnet. Der Unterschied 0, 1032.

Ex. 2. Die *mittlere Dauer der Verbindung* von 30. 30. 40 ist 13, 72. Dieſs ist die *mittlere Lebensdauer einer Person* von 56, 06 Jahren, wozu die Leibrente 9, 2398 gehört. Der *genaue Wehrt* jener Verbindungsrente für drey ist 9, 1662, der Unterschied 0, 0736.

163.

Satz 45. Der Wehrt einer Verbindungsrente für drey Perſonen iſt nahe ſo groſs als der Wehrt der Verbindungsrente für zwo, davon eine die jüngſte der drey gegebenen iſt, die zwote aber von dem Alter iſt, wofür die einfache Leibrente gleich groſs iſt mit der Verbindungsrente der beyden ältern.

Sind A, B, C die drey Leben und A *das jüngſte*, ſo ſuche man die Verbindungsrente für B und C, und es ſey D das Mittelleben, deſſen Leibrente eben ſo groſs iſt als jene. Alsdenn wird *der Wehrt der Verbindungsrente* von A und D nahe ſo groſs ſeyn als die Verbindungsrente für die gegebene drey Perſonen.

Ex. 1. Das Alter der drey Perſonen ſey 30, 40 und 40 Jahr. So iſt nach der Süſsmilchiſchen Tabelle und nach 4 Proc. $\lambda\,\overline{40.\ 40} = 9.\,9484 = \lambda\,\overline{53,\ 72}$. Und nun $\lambda\,\overline{30.\ 53,\ 72} = 8,\,6041$.

Der genau berechnete Wehrt von

$\lambda\,\overline{30.\ 40.\ 40}$ iſt $= 8,\,5767$

Unterſchied $= 0,\,0274$

Ex. 2. Für 30. 30. und 40 Jahre iſt

$\lambda\,\overline{30.\ 40} = 10,\,7816 = \lambda\,\overline{50,\ 07}$, und

$\lambda\,\overline{30.\ 50.\ 07} = 9,\,2065$. Genau iſt

$\lambda\,\overline{30.\ 30.\ 40} = 9,\,1662$

Unterſchied $= 0,\,0403$.

Anmer-

Anmerkung. Diese Unterschiede sind geringe. Doch muss die *älteste Person zuerst*, die *jüngste zuletzt* in Verbindung gebracht werden. Aendert man diese Ordnung, so trifft es weniger zu. *Simpson* versichert, bis auf $\frac{1}{8}$tel einer *Jahrsrente* die wahren Wehrte auf diese Art erhalten zu haben. Die letztere hat er vermuthlich nach seiner gewöhnlichen Methode berechnet, nämlich die mittlere Lebensdauer aus der Londoner Tafel, doppelt, für die Altersergänzung genommen, und dann das Sterben gleichförmig vorausgesetzt. Allein wenn er diess gethan, so würden sich doch grössere Abweichungen gezeiget haben, wenn er noch mehr Fälle berechnet hätte. Wenn übrigens der vortreffliche Mann glaubt, die Richtigkeit des Verfahrens erhelle auch unmittelbar aus der Natur der Sache ohne Rechnung, so gestehe ich, dass mir diess nicht einleuchte.

Ist es nur zu thun, um die Rechnung nach der Hypothese zu haben, so lässt sich die Abweichung des durch diese Approximation gefundenen Wehrts von dem wahren, leicht und genau angeben. (*Zusätze* zu diesem Capitel*).) Wenns auch der Mühe in Praxis nicht verlohnt, sie in einzelnen Fällen zu suchen, so kann man doch wissen, wie gross der Fehler seyn könne. Ueberhaupt ist nicht viel Zuverlässigkeit bey practischen Vorschriften, von denen man weiss, dass man in einzelnen Fällen nicht viel fehle, und doch zugleich weiss, dass man

*) §. 36 und folg.

man fehle, ſo lange man nicht die Gränze kennt, bis wohin der Irrthum gehen kann.

Bey der gedachten Hypotheſe findet ſich, daſs je jünger das *dritte* mit den beyden ältern verbundene Leben iſt, deſto näher komme man dem wahren Wehrt. Die *Abweichung iſt in umgekehrtem Verhältniſs mit der Altersergänzung*, oder mit der *Zahl der Lebenden in dem Alter der jüngſten Perſon.* Auch kommt es auf den *Unterſchied des Alters der beyden ältern* verbundenen an. Je mehr Jahre die ältere für ſich hat, und je gröſser der Unterſchied zwiſchen ihrem Alter und dem Alter der mit ihr verbundenen nächſt jüngeren iſt, deſto geringer, obgleich nicht in demſelben Verhältniſs, wird wiederum die Abweichung.

Dieſs bleibt auch ſo in jedem andern Syſtem. (*Zuſätze* zu dieſem Capitel *).) Allein hier hängt die Gröſse der Abweichung von der Natur des Syſtems, oder von den Verhältniſſen der Zahlen in der Mortalitätstafel ab. Dennoch zeiget ſich ſo viel im allgemeinen, daſs ſie in den verſchiedenen Syſtemen ziemlich nahe ſich verhalte wie *die gefundenen Gröſsen für die einfachen Mittelleben*, die man für zwo verbundene ſetzet. Berechnet man alſo die Abweichung nach der leichteſten Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben, und verändert dann dieſe in dem Verhältniſs der Dauer des nach der Hypotheſe gefundenen *Mittellebens* zu der Dauer des Mittellebens nach

*) §. 42.

nach den Tabellen, so kann diess für die *eigentliche Abweichung* nach den Tabellen genommen und dadurch der durch die Approximation gefundene Wehrt berichtiget werden. Das ist wiederum nicht ganz genau. Es kann sich treffen, dass man ohne Correction dem wahren Wehrte durch die Approximation näher kommt, wie es bey einigen, nach der Süssmilchischen Tabelle berechneten Exempeln sich wirklich findet. Allein sicherer ist es in jedem Fall auf die Correction Rücksicht zu nehmen. Auf diese Anmerkung ist die Methode gegründet, die ich hier noch anfügen will.

164.

Leichte Methode die mittlere Verbindungsdauer drey und mehrerer Personen zu finden.

Das *Alter* der gegebenen Personen sey in der Ordnung von der jüngern an, *a*, *b*, *c*, *d* — — wie vorhero, und ihre Altersergänzung α, β, γ, δ — — —

1) Man suche die *Dauer der Verbindung der beyden ältesten*, aus der XXII^sten^ Tabelle, also $C\,\overline{b\,c}$, wenn man nur für drey Leben, a, b, c, die Dauer sucht; sehe solche an als die *Dauer eines einfachen mittlern Lebens*, das man aus der XV^ten^ Tafel sucht, es sey *m*, und nehme dann von neuen die *Verbindungsdauer* dieses letztern *mittlern Lebens mit dem dritten jüngern*, das ist, suche $C\,\overline{a\,m}$.

Diese Dauer corrigirt soll die Dauer von *dreyen* $\overline{C_{abc}}$ seyn.

2) Um die *Abweichung* von dem wahren Wehrt zu finden, suche man aus den Altersergänzungen β, γ, *die hypothetische Verbindungsdauer der beyden ältesten* nach Satz 29. §. 115. $= \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$. Sie sey m', und die dazu gehörige *hypothetische Altersergänzung*, wenn jene als die Dauer eines einfachen Lebens angesehen wird, $= \mu = 2\,m'$.

3) Die *Differenz* zwischen der Dauer der ältern Person, und des gefundenen Mittellebens, $\frac{\gamma - \mu}{2}$, werde *multiplicirt mit der Differenz* zwischen der Dauer des Mittellebens und der eben gefundenen Differenz, das ist, mit $\frac{\mu}{2} - \frac{\gamma - \mu}{2}$; und diess Product dividirt durch die dreyfache Altersergänzung des jüngsten gegebenen Lebens, durch $3\,\alpha$.

Das heisst man suche $\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{\gamma - \mu}{2}\right) \cdot \left(\frac{\mu - (\gamma - \mu)}{2}\right)$. Diess ist die Abweichung nach der Hypothese. (*Zusätze**).)

Ist b = c, also auch $\beta = \gamma$, so kann man noch kürzer abkommen. Die Abweichung bey der Hypothese ist alsdenn $= \frac{\gamma^2}{108 \cdot \alpha}$.

4) Ist

*) §. 39.

4) Ist die Dauer des hypothetischen Mittellebens *m'*, nicht merklich von *m* (aus n. 1.) unterschieden, so kann die gefundene Correction beybehalten werden, sonst wird sie in dem Verhältniss m' : m verändert.

5) Die berichtigte Correction wird von der obigen (n. 1.) gefundenen Dauer $C\,\overline{a\ m}$ *subtrahirt*, (oder *addirt*, wenn sie *negativ* ist). So entstehet die *Dauer* $C\,\overline{a\ b\ c}$, die man als die *wahre* annehmen kann.

6) Ist die Verbindungsdauer für *drey* Personen, $C\,\overline{a\ b\ c}$ berichtiget, so sehe man ferner diese Dauer an als die *eines einfachen Lebens* vom Alter *n*, und suche $C\,\overline{a\ n}$. Dann suche man die Correction für vier Personen nach der Hypothese, und aus dieser die andere in dem Verhältniss der Dauer des für die Verbindung von dreyen substituirten einfachen Lebens. Diese ist dann wie vorhero zu gebrauchen.

Ex. Es sey $a = 40$, $b = 50 = c$,
so ist $\alpha = 2 \,.\, 22,64 = 45,28$
$\beta = \gamma = 2 . 16,95 = 33,90$.

Nun ist $C\,\overline{50.\ 50}$ nach der XXII^ten Tabelle, $= 16,01$ und diess ist die Dauer eines *einfachen Lebens* vom Alter 64, 68 ($= m$) nach Tab. XV. Daraus bekommt man wiederum $C\,\overline{30.64,68}$ (nach Tab. XXII.) $= 9,33$.

Auch ist $m' = \frac{1}{3} \cdot 33,90 = 11,30$. Weil in diesem Fall $\mu = \frac{2}{3}\beta$, und $\gamma = \beta$. Also die Correction

$$\frac{\beta^2}{108\,\alpha}, = \frac{(33,90)^2}{108 \cdot 45,28} = 0,235.$$

 Diese

Dieſe Correction um $\frac{10,01}{11,30}$ vermindert, giebt 0,196. Alſo iſt C $\overline{30.04.68}$ — 0,196 = 9,33 — 0,196 = 9,13. Der genaue Wehrt iſt 9,11. Die Abweichung alſo unerheblich.

165.

Methode, die Wehrte der Verbindungsrenten dreyer und mehrerer Perſonen leicht zu finden.

Das Verfahren iſt dem vorigen ähnlich.

1) Man ſuche die *Verbindungsrente* der *beyden älteſten* $\lambda\,\overline{b\,c}$, und dann dafür ein *einfaches Leben*, deſſen Rente eben ſo groſs iſt; es ſey *m*.

Dann von neuem $\lambda\,\overline{a\,m}$, nämlich die *Verbindungsrente* des jüngern Lebens *a* mit *m*.

2) Auch wird der *hypothetiſche Wehrt* der Verbindungsrente $\lambda\,\overline{b\,c}$ geſucht und ſolche $= \lambda\,\overline{m}'$ geſetzt, wozu die Altersergänzung μ gehört.

3) Daraus wird die Correction des *hypothetiſchen Wehrts* $\lambda\,\overline{a\,m}'$ gefunden, nach der Formel

$$\lambda\,\overline{a\,m}' - \lambda\,\overline{a\,b\,c} = \frac{p}{\alpha}\left(\lambda\,\overline{m}' + \int\frac{dx}{r^{\mu}} - \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right)\lambda\,\overline{\gamma} - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}}\right) \text{*)}$$

Wenn die beyden ältern Perſonen gleichen Alters ſind, ſo wird dieſe Differenz

$$= \frac{1}{\alpha}\left((p - \mu)\,\lambda\,\overline{c\,c} + p\,\mu - 2\,p\,\lambda\,\overline{c}\right) \text{**)}$$

Zu

*) *Zuſätze* §. 43. **) Ebendaſ. §. 44.

Zu bemerken ist aber hierbey, daſs die in dieser Formel für die Correction angegebenen Renten nicht nur lauter *hypothetische* sondern auch für *augenblickliche Hebungen* sind. Die XXX^ste Tabelle enthält die Leibrenten für *jährliche* Hebungen. Zu jeder derselben muſs noch die *Zeitrente auf die Altersergänzung*, dividirt durch diese letztere, hinzugerechnet werden, wenn sie in augenblickliche Renten zu verändern sind. *) Auch ist *p* hier das *Grundcapital* zu *augenblicklichen Zinsen*, und also bey dem 4 Procentfuſs = 25, 49. **) Diesem gemäſs muſs auch die hypothetische Verbindungsrente $\lambda\,\overline{b\ c}$ oder $\lambda\,\overline{m}'$, und $\lambda\,\overline{c\ c}$, wenn b = c, genommen werden. ***) Es läſst sich die Correction auch in *jährlichen* Renten geben, aber alsdann wird ihr Ausdruck so viel zusammengesetzter, daſs man eben so leicht die Reduction der Renten auf augenblickliche vornehmen kann.

4) Die so gefundene Correction in dem Verhältniſs $\frac{\lambda\ m}{\lambda\ m'}$ verändert, und dann von dem vorher gefundenen Wehrt $\lambda\,\overline{a\ m}$ *subtrahirt* (oder *addirt* dazu, wenn sie *verneinend* ist) kann für $\lambda\,\overline{a\ b\ c}$ als *nahe richtig* angenommen werden.

5) Man geht auf die nämliche Art weiter zu *vier* Personen, nur muſs alsdenn die Correction der hypo-

*) *Zusätze* zum zweyten Cap. §. 17.

**) Ebendas. §. 16.

***) Cap. II. §. 134. *Zusätze* zu Cap. II. §. 23.

thetischen Wehrte nach einer andern Formel gesucht werden. *)

Ex. Es sey $a = 30$, $b = 40 = c$, so ist $\alpha = 2.28,57 = 57,14$; $\beta = \gamma = 2.\ 22,64 = 45,28$.

Nach Tab. XXIV. ist $\lambda\,\overline{40.\ 40} = 9,9484 = \lambda\,\overline{53,72}$ (Tab. XVI.) Wiederum ist (Tab. XXIV.) $\lambda\,\overline{30.\ 53,72} = 8,6041$.

Um die Correction zu finden bey dem 4 Procentfuss, nehme man die jährliche Leibrente nach der Hypothese für das Alter 40 Jahr aus der Tab. XXX. 13,0760. Diese in eine andere für *augenblickliche* Hebungen verändert, giebt $13,0760 + \frac{20,7661}{45,28} = 13,5346$ für $\lambda\,\overline{40}$, wie es hier zu gebrauchen ist. Ferner wird

$$\lambda\,\overline{40.\ 40} = p\left(1 - \frac{2}{45,28}.\ 13,0760\right)\ **)$$

$= 25,49.\ 0,4022 = 10,2520$. Diess ist gleichfalls ein *hypothetischer* Wehrt der Verbindungsrente ($\lambda\,\overline{c\ c}$) bey *augenblicklichen* Hebungen. Der ist aber gleich einer *einfachen Leibrente* derselben Art, für das Alter 55,46 Jahr, wozu die Altersergänzung $\mu = 28,54$ ist. Denn die augenblickliche Leibrente für 55 Jahr ist $9,773 + \frac{16,0837}{29} = 10,3589$. Die nächst niedere für 56 Jahr ist $9,5322 + \frac{16,6695}{28,02} = 10,1271$.

Zwi-

*) *Zusätze* §. 44.

**) Ebendas. §. 37.

Zwischen diesen beyden fällt jene gegebene 10, 2520. Nun nimmt man den Unterschied der beyden ersten, 0,2318 zu dem Unterschied der ersten und der gegebenen, das ist $\lambda\,\overline{55} - \lambda\,\overline{56} : \lambda\,\overline{55} - \lambda\,\overline{m}$, wie die Differenz des Alters, 1 Jahr, zur Differenz 0, 46, so viel ist also *m* grösser als 55 Jahr. Die Altersergänzung zu 55, 46 Jahr wird auf eine ähnliche Art gesucht, und ist 28, 55.

Hieraus ergiebt sich die Correction

$$= \frac{(25 - 28,55)\ 10,2520}{57,14} + \frac{25.49(28,55 - 2.13,5346)}{57,14} =$$

$$- \frac{31,37112 + 37,7457}{57,14} = 0,094.$$

Diese sollte nun noch in dem Verhältniss $\frac{9,9}{10,3}$ vermindert werden, allein diese Veränderung ist an sich unerheblich, und ohne diess sind nach der Natur der Rechnung die dritten Decimalziffern nicht mehr völlig genau. Man nehme also 0, 094 selbst, und ziehe diess von dem gefundenen Wehrt für $\lambda\,\overline{30.55,72}$ oder 8, 6041 ab, so erhält man 8, 5101, welches von dem genauen Wehrt 8, 5867 nur um 0,0766 abweicht.

Zusätze
zum dritten Capitel.

Zum ersten Abschnitt.

Von der Dauer des Zusammenlebens zwoer Personen.

I.

Zu §. 113.

Die zu der auf *ganze Jahre* berechneten *Verbindungsdauer* hinzukommende Correction ist zwar nicht völlig bey allen Voraussetzungen gleich, aber es kann durchgehends $\frac{1}{2}$ dafür angenommen werden.

Setzet man voraus, der *jährliche Abgang* eräugne sich *mitten im* Jahr, so leben von A, in dem *ersten halben* Jahre noch $\stackrel{1}{-}A + \Delta A$; in dem *zweyten* nur $\stackrel{1}{-}A$. In der ersten Hälfte des zweyten Jahrs leben $\stackrel{2}{-}A + \Delta \stackrel{1}{-}A$; in der zwoten Hälfte nur $\stackrel{2}{-}A$. So auch bey B. Folglich sind im ersten Jahr in der ersten Hälfte noch $(\stackrel{1}{-}A + \Delta A)(\stackrel{1}{-}B + \Delta B)$ Paare gewesen; in der zwoten Hälfte aber $\stackrel{1}{-}A \stackrel{1}{-}B$. Daher hat man für die Coexistenz des ersten Jahrs,

$$\frac{\stackrel{1}{-}A \stackrel{1}{-}B}{2} + \frac{1}{2}(\stackrel{1}{-}A + \Delta A)(\stackrel{1}{-}B + \Delta B) =$$

=

$$= {}^{1}A\ {}^{1}B + \tfrac{1}{2}\left({}^{1}A \Delta B + {}^{1}B.\ \Delta A + \Delta A.\ \Delta B\right)$$

$$= {}^{1}A\ {}^{1}B + \tfrac{1}{2}\left(({}^{1}A + \Delta A).({}^{1}B + \Delta B) - {}^{1}A\,{}^{1}B\right)$$

$$= {}^{1}A\,{}^{1}B + \tfrac{1}{2}\left(A\,B - {}^{1}A\,{}^{1}B\right) = {}^{1}A\,{}^{1}B + \tfrac{1}{2}\,\Delta.(A\,B).$$

Die Summe von $\frac{1}{2}\Delta\ (A\ B)$ für alle Jahre ist $= \frac{A\ B}{2}$.

Daraus folget, daſs in dieſem Fall die Correction, oder was zu der auf ganze Jahre berechneten Verbindungsdauer hinzuzuſetzen iſt $= \frac{1}{2}$ ſey.

2.

Setzet man hingegen voraus, die *Hälfte der im Jahr Sterbenden lebe das ganze Jahr durch,* ſo hat man für die Coexiſtenz des erſten Jahrs

$$\left({}^{1}A + \frac{\Delta A}{2}\right)\left({}^{1}B + \frac{\Delta B}{2}\right)$$

$$= {}^{1}A\ {}^{1}B + \frac{{}^{1}A\ \Delta B}{2} + \frac{{}^{1}B\ \Delta A}{2} + \frac{\Delta A.\ \Delta B}{4}$$

$$= {}^{1}A\ {}^{1}B + \tfrac{1}{2}\,\Delta\,(A.\,B) - \tfrac{1}{4}\,\Delta A.\ \Delta B.$$

Dieſs für alle Jahre zuſammen macht, wie vorher die Coexiſtenz auf ganze Jahre berechnet, und noch $\frac{1}{2}$ hinzu, weniger $\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta A.\,\Delta B + \Delta\,{}^{1}A\ \Delta\,{}^{1}B + +}{A\ B}\right)$

Nach

Nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* ist

$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{A} = \frac{1}{\alpha}$, wenn α die Altersergänzung für A ist, und $\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta \overset{1}{-} B}{B} = \frac{1}{\beta}$, wenn β dasselbe bey B ist. Folglich ist das letzte von der Correction $\frac{1}{2}$ wiederum abzuziehende Stück $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha\beta} (1 + 1 + +)$. Dieses geht bis β wenn β zu der ältesten Person gehört. Also wird die Correction für diesen Fall $\frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha}$, was unbeträchtlich wenig von $\frac{1}{2}$ unterschieden ist, ausgenommen jedoch, dass selbst α, wie bey dem höhern Alter, sehr klein ist.

3.

Bleibt man immer bey der Voraussetzung, dass die *Abgehende im Anfang der Termine sterben*, so wird auch die Correction für *augenblickliche* Termine $= \frac{1}{2}$ seyn. Denn man theile das Jahr in n Theile, und nehme während des Jahrs den Abgang gleichförmig an, so wird für das erste $\frac{1}{n}$ tel des Jahrs seyn

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{AB} \left(\overset{1}{-}A + \frac{n-1}{n} \Delta A\right)\left(\overset{1}{-}B + \frac{(n-1)}{n} \Delta B\right);$$

für das zweyte $\frac{1}{n}$ tel

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{AB}\left(\overset{1}{-}A + \frac{(n-2)}{n} \cdot \Delta A\right)\left(\overset{1}{-}B + \frac{(n-2)}{n} \cdot \Delta B\right)$$

und für das letzte $\frac{1}{n}$ tel $\frac{\overset{1}{-}A \; \overset{1}{-}B}{n. A. B.}$.

Also

Also wird für das erste Jahr, anstatt $\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\,B}$ gefunden

$$\frac{n.\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A.\,B\,n} + \frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{n\,A\,B}\cdot\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+++\frac{1}{n}\right)$$

$$+\frac{\overset{1}{-}B\,\Delta A}{n.\,A\,B}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{2}++\frac{1}{n}\right)+\frac{\Delta A.\,\Delta B}{n.\,A\,B}$$

$$\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{(n-2)^2}{n^2}++\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)=\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\,B}+$$

$$\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{A\,B}+\frac{n-1}{2n}\cdot\frac{\overset{1}{-}B\,\Delta A}{A.\,B}+\frac{\Delta A.\,\Delta B}{n\,A\,B}\cdot$$

$\left(\frac{(n-1)^2+(n-2)^2++1}{n^2}\right)$ das ist, wenn *n* unendlich wird,

$$=\frac{1}{A.\,B}\left(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B+\tfrac{1}{2}\overset{1}{-}A\,\Delta B+\tfrac{1}{2}\overset{1}{-}B\,\Delta A+\tfrac{1}{3}\Delta A.\,\Delta B\right)$$

$$=\frac{1}{A.B}\cdot\left(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B+\tfrac{1}{2}\overset{1}{-}A\,\Delta B+\tfrac{1}{2}\overset{1}{-}B\,\Delta B+\tfrac{1}{2}\Delta A\,\Delta B\right)$$

$$-\frac{1}{6}\,\frac{\Delta A.\Delta B}{AB}=\frac{\overset{1}{-}A.\,\overset{1}{-}B}{A\,B}+\frac{1}{A\,B}\cdot\left(\frac{AB-\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B}{2}\right)$$

$-\frac{1}{6}\,\frac{\Delta A.\,\Delta B}{A\,B}$. Nimmt man nun solche Theile aus allen Jahren zusammen, so ist das zu

$\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\,B}+\frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{A\,B}++$ das ist zu $C\,\overline{a\,b}$ für ganze Jahre hinzuzusetzende Stück $\frac{1}{2}\,\frac{AB-\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\,B}$ für

alle

alle Jahre, welches $= \frac{1}{2}$ ist, wovon wiederum das Stück $\frac{1}{6} \frac{\Delta A . \Delta B}{A\,B}$ aus allen Jahren abzuziehen seyn würde, was aber als unbeträchtlich wegfallen kann. Für die Correction ist also $\frac{1}{2}$ zu nehmen.

4.

Zu §. 115.

Nimmt man an, nach eben der Hypothese vom *gleichförmigen Absterben*, der Abgang erfolge nach dem Gesetz der *Continuität*, so ist (die Lebensergänzung für die jüngste A, α, und für die älteste B, β gesetzt) für jedes unbestimmte Jahr x, und für das Element dx, die Dauer in die Zahl der Paare multiplicirt $= \overset{x}{-}A\ \overset{x}{-}B.\ dx$, wenn die Zahl der anfänglichen Paare A B ist; also die Summe jener Producte dividirt durch die Zahl der anfänglichen Paare, $= \frac{S\overset{x}{-}A\ \overset{x}{-}B.\ dx}{A.B}$. Aber nach der Voraussetzung ist $\overset{x}{-}A = A - \frac{x}{\alpha} \cdot A$, und $\overset{x}{-}B = B - \frac{x}{\beta} \cdot B$. Folglich

$$\frac{S\overset{x}{-}A.\ \overset{x}{-}B.\ dx}{A\,B} = S\left(A.B - A.B.\frac{x}{\beta} - AB.\frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha\beta}AB\right)\frac{dx}{AB}$$

$$= x - \frac{x^2}{2\beta} - \frac{x^2}{2\alpha} + \frac{x^3}{3\alpha\beta}.$$

Nun ist nach der Integration $x = \beta$, als der Lebensergänzung der ältern Person B. Folglich

$$\frac{S\overset{x}{-}A\ \overset{x}{-}B.\ dx}{A\,B} = \frac{1}{2}\beta - \frac{\beta^2}{6\alpha}.$$

Diess

Dieſs iſt nach **Moivres** Auflöſung. Iſt $\alpha = \beta$, ſo iſt $C\,\overline{a\,b} = \frac{1}{3}\alpha$.

5.

Nach derſelben Hypotheſe, aber nur auf *ganze* Jahre, iſt die Reihe $= \frac{\overset{1}{-}A\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A\overset{2}{-}B + + \overset{n}{-}A\overset{n}{-}B}{A\;B}$,

$$= \frac{(A-\Delta A)(B-\Delta B)+(A-2\Delta A)(B-2\Delta B)++(A-n\Delta A)(B-n\Delta B)}{A\;B}$$

$$= \frac{n\,A\,B - A\,(\Delta B + 2\,\Delta B ++ n\,\Delta B) - B\,(\Delta A + 2\,\Delta A ++ n\,\Delta A)}{A\;B}$$

$$+ \frac{\Delta A.\Delta B + 2^2.\,\Delta A.\,\Delta B ++ n\,n\,\Delta A.\,\Delta B}{A\;B}$$

$$= n - \frac{1}{n}\cdot S\overline{n} - \frac{1}{m}\cdot S\overline{n} + \frac{1}{n.\,m}\cdot S\,n^2,$$

wenn $\frac{\Delta B}{B} = \frac{1}{n}$ und $\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{m}$ geſetzet wird.

$= \frac{n}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{n^2}{m} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n}\right)$ oder da $n = \beta$ wird bey der Summirung

$$= \frac{\beta}{2} - \frac{1}{6}\,\frac{\beta^2}{\alpha} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\beta}\right).$$

Die Differenz zwiſchen dieſem und dem vorhergehenden iſt $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\beta}$, das iſt die eigentliche Correction.

Oben im §. 2. bey der Vorausſetzung, daſs die Abgehende im Jahr die Hälfte deſſelben noch leben, war die Correction $\frac{1}{2} - \frac{1}{4\alpha}$. Hier iſt ſie $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\beta}$. Das macht einen Unterſchied, den man vernachläſsigen kann.

kann. Ueberhaupt sieht man, es könne jedesmal für die Correction der Dauer $\frac{1}{2}$ angenommen werden.

6.

Wenn die Süsmilchische Tafel (nach §. 65. Cap. I.) dahin verändert wird, daſs die Decremente vom 15ten Jahr an, gleichförmig wachsen und nachher wieder abnehmen, so kann die mittlere *Verbindungsdauer* auf dieselbe Art, wie die Lebensdauer einer einzelnen Person, (*Zusätze* zum Cap. I. §. 9.) in einer allgemeinen Formel gefaſst werden. Nur entsteht einige Weitläuftigkeit bey der Anwendung.

Für die Person vom Alter *a* ist nämlich der *Terminus generalis* für die mittlere Lebensdauer

$$= \frac{A}{A} - \frac{D - \frac{d}{2}}{A} x - \frac{d.x^2}{2A},$$ wenn das Decrement des ersten Jahrs durch D, und die sich immer gleiche Differenz der Decremente durch *d* bezeichnet wird. Ferner ist für das Alter *b* der *Terminus generalis*, $\left(B - \left(D' - \frac{d'}{2}\right)x - \frac{d'x^2}{2}\right) : B.$ Der Kürze wegen setze man $\frac{D - \frac{d}{2}}{A} = p$, $\frac{d}{2A} = q$, $\frac{D' - \frac{d'}{2}}{B} = p'$, $\frac{d'}{2B} = q'$, so wird der *Terminus generalis* der Reihe für die Coexistenz

$$\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B}{A\ B} + + ; = (1 - px - qx^2)(1 - p'x - q'x^2)$$

und

nnd alſo die Summe dieſer Glieder

$= S.1. - (p+p') S.\overline{x} - ((q+q') - pp') S.\overline{x^2}$
$+ (p'q+pq') S.\overline{x^3} + qq' S.\overline{x^4}.$

Kommen anſtatt $\frac{A}{A}$ und $\frac{B}{B} = 1$, Brüche mit andern Zählern, und ſetzet man überhaupt die Wehrte dieſer Brüche α, α', ſo iſt die Summe

$= S\overline{\alpha, \alpha'} - (\alpha p' + \alpha' p) S.\overline{x} - (\alpha q' + \alpha' q - pp') S\overline{x^2}$
$+ (pq' + p'q) S.\overline{x^3} + qq' S.\overline{x^4}.$

und $S.\overline{\alpha \alpha'}$ bis x ſummirt, wird $= \alpha \alpha' x$.

Dieſs iſt die allgemeine Summe für jede Periode, oder jeden beſondern Theil der Verbindungsdauer, ſo weit man auf einmal ſie ſummiren kann. Aber dieſs auf einmal zu nehmende Stück kann nicht gröſser ſeyn, als ſo weit die Decremente D, D′ und die Differenzen d, d′ dieſelben Wehrte behalten. Daher iſt auch eine Vorrichtung nöthig, die am deutlichſten in einem Beyſpiel ſich zeigen läſst.

Es ſey $a = 20$ Jahr und $b = 30$. Weil nun das 36ſte Glied in der Reihe der Lebensdauer für B ſchon auf das 66ſte Jahr fällt, wo die erſte und zwote Differenz ſich ändert, ſo erhält man folgende Stücke, die jedes für ſich nach der allgemeinen Formel zu berechnen ſind.

$a = 20$; $b = 30$.

Erstes Stück.

30—31 . . 65—66

20—21 . . 55—56

$x = 36$

$A = 4398$. . $D = 43$

$\alpha = 1 = \alpha'$.

$B = 3923$. $D' = 53$

$d = d' = 1$.

Zweytes Stück.

66 75—76

56 65—66

$x = 10$

$\alpha = \frac{2220}{4398}$; $D = 79$, $d = 1$

$\alpha' = \frac{1385}{3923}$; $D' = 85\frac{1}{2}$, $d' = 2\frac{1}{2}$

Drittes Stück.

76 95—96

66 85—86

$x = 20$

$\alpha = \frac{1385}{4398}$

$\alpha' = \frac{642\frac{1}{2}}{3923}$

$D = 85\frac{1}{2}$, $d = 2\frac{1}{2}$

$D' = 60\frac{1}{2}$, $d' = 2\frac{1}{2}$

Letztes Stück.

96 97

86 87

$x = 1$

$\alpha = \frac{3\frac{1}{2}}{4398}$

$\alpha' = \frac{7\frac{1}{2}}{3923}$

Für jedes dieser Stücke muss nach der Formel gerechnet werden. Mehr als drey solcher Stücke, das letzte, worin $x = 1$ ist, abgerechnet, bekommt man nicht, wenn nur von zwey Leben die Rede ist. Man sieht also, dass diese Rechnung in Hinsicht der Kürze vieles vor der gewöhnlichen, nach *Süssmilchs* unveränderten Tafel, voraus habe, sollte man nämlich nach der letztern ohne Hülfstabelle rechnen.

7. Zu

7.

Zu §. 121.

Die hier gegebene Formel, welche auf einmal alle Vorschriften enthält, wird auf folgende Art gefunden.

Es ist $C\overline{ab} = \frac{1}{A.\,B}(\overset{1}{-}A\;\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A\,\overset{2}{-}B + \overset{3}{-}A\;\overset{3}{-}B ++)$

$$= \frac{1}{A.\,B}\Big((A - \Delta A)\overset{1}{-}B + (A - \Delta A - \Delta\overset{1}{-}A)\overset{2}{-}B$$

$$+ (A - \Delta A - \Delta\overset{1}{-}A - \Delta\overset{2}{-}A).\overset{3}{-}B ++\Big)$$

$$= \frac{1}{B}(\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}B + \overset{3}{-}B ++) - \frac{\Delta A}{AB}(\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}B + \overset{3}{-}B ++)$$

$$- \Delta\overset{1}{-}A\,(\overset{2}{-}B + \overset{3}{-}B ++) - \frac{\Delta\overset{2}{-}A}{A\,B}(\overset{3}{-}B + \overset{4}{-}B ++)$$

$$= E\overline{b} - \frac{\Delta A}{AB}\,S\overset{1}{-}B - \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{AB}.\,S\overset{2}{-}B - \frac{\Delta\overset{2}{-}A}{AB}\,S\overset{3}{-}B$$

Nun ist auch weiter

$$\Delta\overset{1}{-}A = \Delta A - \Delta\Delta A$$

$$\Delta\overset{2}{-}A = \Delta\overset{1}{-}A - \Delta\Delta\overset{1}{-}A = \Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta\overset{1}{-}A$$

$\Delta\overset{3}{-}A = \Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta\overset{1}{-}A - \Delta\Delta\overset{2}{-}A$, wo $\Delta\Delta A$, $\Delta\Delta\overset{1}{-}A$ die *Differenzen der Decremente*, $\Delta A, \Delta\overset{1}{-}A$ und so ferner, sind. Folglich wird

$$C\overline{ab} = \frac{S.\overset{1}{-}B}{B} - \frac{1}{AB}\Big(\Delta\, A.\, S.\overset{1}{-}B$$
$$+ (\Delta A - \Delta\Delta A)\; S.\overset{2}{-}B$$
$$+ (\Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta\overset{1}{-}A)\; S.\overset{3}{-}B$$
$$+ \; + \; + \Big)$$

$$= \frac{S\overset{1}{-}B}{B} - \frac{1}{AB}\,\Delta\, A. \quad S.\, S.\overset{1}{-}B$$
$$+ \frac{1}{AB}\;\Delta\,\Delta\, A\; S.\, S.\overset{2}{-}B$$
$$+ \frac{1}{AB}\,\Delta\Delta\overset{1}{-}A\;\; S.\, S.\overset{3}{-}B$$
$$+ \; + \; +$$

8.

Zu §. *122.*

Da ferner $\Delta\,\Delta\overset{1}{-}A = \Delta\,\Delta\, A - \Delta^3 A$, wo $\Delta^3 A$ oder $\Delta\,\Delta\,\Delta\, A$ die *zwote Differenz der Decremente* ist, nämlich $\Delta\,\Delta\, A - \Delta\,\Delta\overset{1}{-}A$; und eben so $\Delta^3\overset{1}{-}A$ so viel als $\Delta\,\Delta\overset{1}{-}A - \Delta\,\Delta\overset{2}{-}A$, auch nun $\Delta^2\overset{2}{-}A = \Delta^2\overset{1}{-}A - \Delta^3\overset{1}{-}A$
$= \Delta^2 A - \Delta^3 A - \Delta^3\overset{1}{-}A$;

$\Delta^2\overset{3}{-}A = \Delta^2 A - \Delta^3 A - \Delta^3\overset{1}{-}A - \Delta^3\overset{2}{-}A$;

$\Delta^2\overset{n}{-}A = \Delta^2 A - \Delta^3 A - \Delta^3\overset{1}{-}A - \Delta^3\overset{1}{-}A - \Delta^3\overset{n-1}{-}A$

so setze man $S^3\overset{1}{-}B$, $S^3\overset{2}{-}B$, für die Summe der Summen $S.\, S.\overset{1}{-}B$ u. s. f. und man bekommt durch die Substitution der Differenzen $\Delta^3\, A$, $\Delta^3\overset{1}{-}A$, u. s. f.

$$C\overline{a\,b} = S.\frac{\overset{1}{-}B}{B} - \frac{1}{A}\cdot\ \Delta A.\ S.\frac{\overline{\overset{1}{-}B}}{B}$$

$$+ \frac{1}{A}\Delta^2 A\ S.S.\overset{2}{-}B$$

$$+ \frac{1}{A}(\Delta^2 A - \Delta^3 A)\ S.S.\overset{3}{-}B$$

$$+ \frac{1}{A}(\Delta^2 A - \Delta^3 A - \Delta^3 \overset{1}{-}A)\ S.S.\overset{4}{-}B$$

$$+++ \frac{1}{A}(\Delta^2 A - \Delta^3 A - \Delta^3 \overset{1}{-}A - - \Delta^3 \overset{n-3}{-}A)\ S.S.\overset{n}{-}B$$

$$= S.\frac{\overset{1}{-}B}{B} - \frac{1}{AB}\cdot\ \Delta A.\ S.S\overset{1}{-}B$$

$$+ \frac{1}{AB}\cdot\ \Delta\Delta A.\ S^3.\overset{2}{-}B$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot\ \Delta^3 A.\ S^3\overset{3}{-}B$$

$$- \frac{1}{AB}\ \Delta^3\overset{1}{-}A.\ S^3\overset{4}{-}B$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot\ \Delta^3\overset{n-3}{-}A.\ S^3\overset{n}{-}B$$

Setzet man ſolche gleichförmig ſich verändernde Decremente voraus, wie bey der nach §. 63. Cap. I. veränderten Süſsmilchiſchen Tafel, ſo ſind die zwoten Differenzen bis auf ein Paar, alle = o. Da würde dieſe Rechnung durch die *dritten* Summen auſserordentlich kurz ſeyn. Macht man alſo ein für allemal die Vorrichtung, daſs die Summen der Columne D in der Hülfstafel von neuen ſummirt, und dieſe letzten Summen, welche denn

 die

die *dritten* sind, in eine eigene Columne zur Seite gesetzet werden, so ist die Berechnung für die Dauer der Coexistenz sehr leicht gemacht.

Die Summirungen sind leichte Arbeiten. *Sonst kann auch jede Summe einer höhern Ordnung unmittelbar aus den zu summirenden Zahlen, ohne vorher die dazwischen stehenden von den niedern Ordnungen zu haben, gefunden werden.* So ist die zwote Summe

$$S.S.\overset{1}{-}B = \overset{1}{-}B + 2.\overset{2}{-}B + 3.\overset{3}{-}B + + n.\overset{n}{-}B$$

weil $S.S.\overset{1}{-}B = S.\overset{1}{-}B + S.\overset{2}{-}B + S.\overset{3}{-}B + + S.\overset{n}{-}B$

$$\begin{aligned} \text{das ist} = \overset{1}{-}B &+ \overset{2}{-}B + \overset{3}{-}B + + \overset{n}{-}B \\ &+ \overset{2}{-}B + \overset{3}{-}B + + \overset{n}{-}B \\ &+ \overset{3}{-}B + + \overset{n}{-}B \\ &+ \quad + \quad + \\ &+ + \overset{n-1}{-}B + \overset{n}{-}B \end{aligned}$$

Und die Summe der *dritten Ordnung*, oder

$$\begin{aligned} S^3\overset{1}{-}B &= S.S.\overset{1}{-}B + S.S.\overset{2}{-}B + + S.S.\overset{n}{-}B \\ &= \overset{1}{-}B + 2\overset{2}{-}B + 3\overset{3}{-}B + + n.\overset{n}{-}B \\ &\quad + 1\overset{2}{-}B + 2\overset{3}{-}B + + \overline{n-1}.\overset{n}{-}B \\ &\quad + 1\overset{3}{-}B + + \overline{n-2}\overset{n}{-}B \\ &\quad + \quad + \quad + \\ &\quad + 1.\overset{n}{-}B \end{aligned}$$

=

$$= 1.\overset{1}{-}B + \frac{2.3}{2} \cdot \overset{2}{-}B + \frac{3.4}{2} \overset{3}{-}B ++ \frac{n.\overline{n+1}}{2} \cdot \overset{n}{-}B,$$

wo die Coefficienten die *Trigonalzahlen* ſind. Man wird aber am kürzeſten abkommen, wenn man durch bloſses Summiren die ganze Hülfstabelle auf einmal macht.

9.

Zu §. 124.

Es verdienet hier auch noch die Art bemerkt zu werden, wie aus der gegebenen Verbindungsdauer für zwo Perſonen vom Alter *a* und *b*, ſelbige für zwo andere vom Alter *a* und *b* + *1* gefunden werde.

Es ſey $\frac{1}{AB} \cdot \left(\Delta\ A \overset{1}{-}B + \Delta \overset{1}{-}A \overset{2}{-}B ++\right)$

welche Reihe die *Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens von B über A* iſt, davon unten mehr, = V, ſo wird

$$V = \frac{1}{A.B} \cdot \left((\Delta A \overset{1}{-}B) + (\Delta A - \Delta\Delta A) \overset{2}{-}B + (\Delta A - \Delta\Delta A - \Delta\Delta \overset{1}{-}A) \overset{3}{-}B ++ \right)$$

$$= \frac{1}{AB} \Delta A . \int \overset{1}{-}B - \frac{\Delta\Delta A}{AB} \cdot \int \overset{2}{-}B - \frac{\Delta\Delta \overset{1}{-}A}{AB} \int \overset{3}{-}B ++$$

Alſo iſt dieſer Wehrt mittelſt der Differenzen und der erſten Summen der Lebenden zu finden, durch *kleinere* Zahlen, obgleich nicht durch weniger, als die Rechnung der Verbindungsdauer erfordert.

Setzet man V als gefunden voraus, so ist weiter

$$C_{\overline{a\,b}} = \frac{1}{A.\,B} \cdot \left(\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A.\ \overset{2}{-}B + + \right)$$

$$= \frac{1}{A.\,B} \cdot \left((A - \Delta A)\overset{1}{-}B + (\overset{1}{-}A - \Delta \overset{1}{-}A)\overset{2}{-}B + + \right)$$

$$= \frac{1}{A.\,B} \cdot \left(A.\ \overset{1}{-}B + \overset{1}{-}A.\ \overset{2}{-}B + + \right) - V$$

Demnach

$$C_{\overline{a\,b}} - \frac{A.\ \overset{1}{-}B}{A.\,B} = \frac{1}{A.\,B}\left(\overset{1}{-}A.\ \overset{2}{-}B + \overset{2}{-}A.\ \overset{3}{-}B + + \right) - V$$

und

$$\frac{B}{\overset{1}{-}B.} \cdot C_{\overline{ab}} - 1 = \frac{1}{A.\ \overset{1}{-}B}\left(\overset{1}{-}A.\ \overset{2}{-}B + \overset{2}{-}A.\ \overset{3}{-}B ++\right) - \frac{B}{\overset{1}{-}B}.\ V$$

$$= C_{\overline{a.\,(b+1)}} - \frac{B}{\overset{1}{-}B} \cdot V$$

Folglich

$$C_{\overline{a.\,(b+1)}} = \frac{B}{\overset{1}{-}B} \cdot \left(C_{\overline{a\,b}} + V\right) - 1.$$

Zusätze
zum
zweyten Abschnitt des dritten Capitels.

10.

Zu §. 131.

$$\text{Es ist } R = \frac{1}{A.B} \cdot \left(\frac{\Delta.(AB)}{r} + \frac{\Delta(\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.)}{r^2} ++ \right)$$

$$= \frac{AB - \overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{AB.r} + \frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B - \overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B}{AB.r^2} ++$$

$$= \frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{A.\Delta B}{r} + \frac{\overset{1}{-}A\ \Delta \overset{1}{-}B}{r^2} ++ \right)$$

$$+ \frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{B\,\Delta A}{r} + \frac{\overset{1}{-}B.\ \Delta \overset{1}{-}A}{r^2} ++ \right)$$

$$- \frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\Delta A \Delta B}{r} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A.\ \Delta \overset{1}{-}B}{r^2} ++ \right)$$

$$= \frac{1}{AB} \cdot \left(\int \frac{A.\Delta B}{r} + \int \frac{B.\Delta A}{r} - \int \frac{\Delta A \Delta B}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{AB} \cdot \left(\int \frac{\overset{1}{-}A.\Delta B}{r} + \int \frac{\overset{1}{-}B.\Delta A}{r} + \int \frac{\Delta A.\Delta B}{r} \right)$$

Berechnet man diese drey Theile von R besonders, so sieht man leicht, dass dadurch nicht viel Abkürzung in der Arbeit, wenn man $\lambda\,\overline{ab}$ sucht, erhalten werde. Allein jeder dieser Theile von R ist ausser diess noch für sich zu bemerken, und wird unten in der Lehre von

Anwartschaften vorkommen. Es ist $\frac{1}{AB} \cdot \int \overset{1}{-}A. \frac{\Delta B}{r}$ der *auf ein Jahr zurück discontirte Wehrt einer bey dem Tode von B zahlbaren Summe 1, im Fall A alsdenn noch lebet.*

Auch $\frac{1}{AB} \cdot \int \frac{\overset{1}{-}B. \Delta A}{r}$, ein *solcher Wehrt bey dem Tode von A, wenn B alsdenn noch lebet*, und $\frac{1}{AB} \int \frac{\Delta B. \Delta A}{r}$, ein *solcher Wehrt für den Fall, wenn A und B zugleich in dem Lauf desselben Jahrs abgehen.*

Diese drey Theile können auf zwey gebracht werden, nämlich

$$R = \frac{1}{AB} \cdot \int \frac{\overset{1}{-}A. \Delta B}{r} + \int \frac{B \Delta A}{r},$$

$$\text{auch} = \frac{1}{AB} \cdot \int \frac{A. \Delta B}{r} + \int \frac{\overset{1}{-}B. \Delta A}{r}.$$

Weil nun aber $\Delta \overset{1}{-}B = \Delta B - \Delta \Delta B$

$$\Delta \overset{2}{-}B = \Delta B - \Delta \Delta B - \Delta \Delta \overset{1}{-}B$$

und so ferner, so ist auch

$$\int \frac{\overset{1}{-}A. \Delta B}{r} = \frac{\overset{1}{-}A. \Delta B}{r} + \frac{\overset{1}{-}A\ (\Delta B - \Delta \Delta B)}{r^2}$$

$$+ \overset{3}{-}A \frac{(\Delta B - \Delta \Delta B - \Delta \Delta \overset{1}{-}B)}{r^3} + +$$

$$= \Delta B. \left(\frac{\overset{1}{-}A}{r} + \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + + \right) -$$

$$-\Delta\Delta B\left(\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}+\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\right)-\Delta\Delta\overset{1}{-}B\left(\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\right)--$$

$$=\Delta B.\int\frac{\overset{1}{-}A}{r}-\Delta\Delta B\int\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}$$

$$-\Delta\Delta\overset{1}{-}B\int\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}---$$

Eben so wird $\int\frac{B\Delta A}{r}=\frac{B.\Delta A}{r}+\frac{\overset{1}{-}B.\Delta\overset{1}{-}A}{r^2}++$

$$=\frac{B\Delta A}{r}+\frac{\overset{1}{-}B(\Delta A-\Delta\Delta A)}{r^2}+\frac{\overset{2}{-}B(\Delta A-\Delta\Delta A-\Delta\Delta\overset{1}{-}A)}{r^3}++$$

$$=\Delta A\left(\frac{B}{r}+\frac{\overset{1}{-}B}{r^2}+\frac{\overset{2}{-}B}{r^3}++\right)$$

$$-\Delta\Delta A\left(\frac{\overset{1}{-}B}{r^2}+\frac{\overset{2}{-}B}{r^2}++\right)-\Delta\Delta\overset{1}{-}A\left(\frac{\overset{2}{-}B}{r^2}++\right)--$$

Folglich erhält man

$$R=\frac{1}{AB}\left(\Delta B.\int\frac{\overset{1}{-}A}{r}-\Delta\Delta B.\int\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}-\Delta\Delta\overset{1}{-}B\int\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\right)$$

$$+\frac{1}{AB}\left(\Delta A.\int\frac{B}{r}-\Delta\Delta A.\int\frac{\overset{1}{-}B}{r^2}-\Delta\Delta\overset{1}{-}A.\int\frac{\overset{2}{-}B}{r^3}-\right)$$

Nun sind die Summen der discontirten Zahlen der Lebenden in der ersten Hülfstafel (§. 56.) in der Columne E,

die bey dem Jahr $a+1=\frac{1}{r^a}.\int\frac{\overset{1}{-}A}{r}$

— — — $a+2=\frac{1}{r^a}.\int\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}$ u. s. f.

Inglei-

Ingleichen

die bey dem Jahr *b*; $= \frac{1}{r^{b-1}} \int \frac{B}{r}$

— — — *b*+1 $= \frac{1}{r^{b-1}} \int \frac{\overset{1}{-}B}{r^2}$ und so ferner.

Leget man also die Columne der Differenzen B der zwoten Hülfstafel (§. 117.) an die Zahlen der Columne E der ersten, so dass die Differenz zum Jahr *b*, oder $\Delta\Delta B$, bey dem Jahr *a*+2 zu stehen kommt, und multiplicirt alsdenn jede Differenz in die beystehende Zahl, so erhält man auf diese Weise

$$\frac{\Delta\Delta B}{r^a} \cdot \int \frac{\overset{2}{-}A}{r^2} + \frac{\Delta\Delta \overset{1}{-}B}{r^a} \cdot \int \frac{\overset{3}{-}A}{r^3} + + +$$

welche Summe *negativ* oder *positiv* wird, je nachdem die Producte aus den negativen oder positiven Differenzen die grösten sind.

Man lege nochmals die Differenzen so an die Summen, dass die zum Jahr *a* gehörige $\Delta\Delta A$, bey der Summe fürs Jahr *b*+1 zu stehen kommt; verfahre aber wie vorher, so erhält man

$$\frac{\Delta\Delta A}{r^{b-1}} \cdot \int \frac{\overset{1}{-}B}{r^2} + \frac{\Delta\Delta \overset{1}{-}A}{r^{b-1}} \int \frac{\overset{2}{-}B}{r^3} + +$$

Wird die erste dieser beyden Summen dividirt durch das Product aus der Zahl der Lebenden im Jahr *b*, nämlich B, in die discontirte Zahl der Lebenden im Jahr *a*, das ist, durch B. A : r^a; und die Letztere durch das Product aus A, in die discontirte Zahl fürs Jahr b, das ist durch

A.

A. B : r^b, so wird

$$\frac{1}{BA:r^a}\left(\frac{\Delta\Delta B}{r^a}\int\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}+\frac{\Delta\Delta\overset{1}{-}B}{r^a}\int\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\right)$$

$$=\frac{1}{AB}\cdot\left(\Delta\Delta B\int\frac{A}{r^2}+\Delta\Delta\overset{1}{-}B\int\frac{\overset{3}{-}A}{r^3}++\right)$$

Dafür schreibe man *M*.

Ferner wird

$$\frac{1}{AB:r^b}\cdot\left(\frac{\Delta\Delta A}{r^{b-1}}\int\frac{\overset{1}{-}B}{r^2}+\frac{\Delta\Delta\overset{1}{-}A}{r^{b-1}}\int\frac{\overset{2}{-}B}{r^3}++\right)$$

$$=\frac{r}{AB}\cdot\left(\Delta\Delta A.\int\frac{\overset{1}{-}B}{r^2}+\Delta\Delta\overset{1}{-}A\int\frac{\overset{2}{-}B}{r^3}++\right)$$

wofür man *N* setzen kann.

Sind also M und N gefunden, so ist nun

$$R=\frac{1}{AB}\cdot\ \Delta B.\int\frac{\overset{1}{-}A}{r}-M+\frac{1}{AB}\cdot\Delta A\int\frac{B}{r}-\frac{N}{r}.$$

Und weil $\frac{1}{A}\cdot\int\frac{\overset{1}{-}A}{r}=\lambda\overline{a}$, auch $\frac{1}{B}\int\frac{B}{r}$

$$=\frac{B}{Br}+\frac{1}{B}\int\frac{\overset{1}{-}B}{r^2}=\frac{1+\lambda\overline{b}}{r},$$ so wird

$$R=\frac{\Delta B}{B}\lambda\overline{a}-M+\frac{\Delta A}{A}\cdot\frac{(1+\lambda\overline{b})}{r}-\frac{N}{r}$$

$$=\frac{\Delta B}{B}\lambda\overline{a}-M+\frac{\Delta A}{A}\frac{(1-N+\lambda\overline{b})}{r}.$$

11. *Zu*

II.

Zu §. 133.

Der hier gegebene Ausdruck für die *Verbindungsrenten* ist dem obigen für die *Verbindungsdauer* völlig ähnlich, und wird auch auf dieselbige Art bewiesen.

Es ist nämlich

$$\lambda\overline{ab} = \frac{1}{A.B}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left((A - \Delta A)\frac{\overset{1}{-}B}{r} + (A - \Delta A - \Delta\overset{1}{-}A)\frac{\overset{2}{-}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left(A.\frac{\overset{1}{-}B}{r} + A.\frac{\overset{2}{-}B}{r} + +\right) -$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot \Delta A.\left(\frac{\overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}B}{r^2} + +\right) -$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot \Delta\overset{1}{-}A.\left(\frac{\overset{2}{-}B}{r} + \frac{\overset{3}{-}B}{r^3} + +\right)$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{AB}\cdot \Delta A.\int\frac{\overset{1}{-}B}{r} - \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{AB}\int\frac{\overset{2}{-}B}{r^2} + +$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{AB}\cdot\left(\Delta A\int\frac{\overset{1}{-}B}{r} + \overline{(\Delta A - \Delta\Delta A)}\int\frac{\overset{2}{-}B}{r^2} + +\right)$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{\Delta A}{AB}.\ S.\int\frac{\overset{1}{-}B}{r} + \frac{1}{A.B}\left(\Delta\Delta A.\ S.\int\frac{\overset{2}{-}B}{r^2}\right.$$

$$\left. + \Delta\Delta\overset{1}{-}A.\ S.\int\frac{\overset{3}{-}B}{r^3} + +\right)$$

Wenn

Wenn die Summen aus der Columne E der Tabelle §. 117. genommen werden, so ist die bey dem Jahr *b* stehende Zahl $= S.\int \frac{{}^{1}\!-\!B}{r}$. Wird also auch, anstatt durch A B, dividirt durch A B : r^b, das ist, durch das Product aus der Anfangszahl A in die discontirte Zahl der Lebenden für das Jahr *b*, so ist der Ausdruck von derselben Grösse.

12.

Zu §. 134.

Nach der Hypothese vom *gleichförmigen Absterben* wird der *Wehrt der Verbindungsrente* für zwo Personen auf jährliche Zahlungen leicht gefunden. Es ist nämlich

$$\lambda\overline{ab} = \frac{(A-\Delta A).(B-\Delta B)}{A.\ B.\ r} + \frac{(A-2\Delta A).(B-2\Delta B)}{A.\ B.\ r^2}$$

$$+ \ldots + \frac{(A-\beta\Delta A).\ (B-\beta\Delta B)}{A.\ B.\ r^\beta},$$ wo wiederum β die Altersergänzung der ältern Person B ist. Folglich

$$\lambda\overline{ab} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^\beta}$$

$$-\frac{\Delta A}{A}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \ldots + \frac{\beta}{r^\beta}\right.$$

$$-\frac{\Delta B}{B}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + \ldots + \frac{\beta}{r^\beta}\right.$$

$$+\frac{\Delta A.\ \Delta B}{A.\ B}\cdot\left(\frac{1}{r} + \frac{2^2}{r^2} + \frac{3^2}{r^3} + \ldots + \frac{\beta^2}{r^\beta}\right)$$

Nun

Nun ist $\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{\alpha}$, wenn α die Altersergänzung von *a*, dem Alter der Person A, ist, und $\frac{\Delta B}{B} = \frac{1}{\beta}$

Daher ist

$$\lambda\overline{ab} = \int\frac{1}{r^\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\int\frac{\beta}{r^\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\int\frac{\beta^2}{r^\beta}$$

Aber $\lambda\overline{b} = \int\frac{1}{r^\beta} - \frac{1}{\beta}\int\frac{\beta}{r^\beta}$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 8.)

Folglich $\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\left(\int\frac{\beta}{r^\beta} - \frac{1}{\beta}\int\frac{\beta^2}{r^\beta}\right)$

13.

Es ist $\int\frac{\beta}{r^\beta} - \frac{1}{\beta}\int\frac{\beta^2}{r^\beta}$ so viel als *eine im arithmetischen Verhältniss*, nach der Ordnung der natürlichen Zahlen, *wachsende Leibrente* zum Alter *b*, wenn dieselbe Hypothese vom gleichförmigen Absterben vorausgesetzet wird, oder $L\overline{b}$. Folglich $\lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha}L\overline{b} = \lambda\overline{ab}$.

14.

Bey *augenblicklichen* Renten ist

$$\lambda\overline{ab} = \int\frac{\overset{x}{A}\cdot\overset{x}{B}}{A.B.r^x}\cdot dx. = \int\frac{(A - x.\Delta A).(B - x.\Delta B)dx}{A.\ B.\ r^x}$$

$$= \int\frac{dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2.dx}{r^x},$$

$$= \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha}\left(\int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x^2dx}{r^x}\right)$$

Aber bey eben der Vorausſetzung iſt alsdenn

$$\lambda\, b = \int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\beta} \int \frac{x\,dx}{r^x}, \text{ und}$$

$$\int \frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta} \int \frac{x^2\,dx}{r^x} = L\,\overline{b}.$$

Folglich auch $\lambda\,\overline{b} - \frac{L\,\overline{b}}{\alpha} = \lambda\,\overline{a\,b}$.

15.

Das Abſterben *gleichförmig* geſetzt, wird der *Wehrt* der *Verbindungsrente* von zwey Leben auch durch die *einfachen Leibrenten* und die *Zeitrenten* beſtimmt.

Für *augenblickliche* Renten iſt

$$\lambda\,\overline{a\,b} = \int \frac{dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \int \frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{r^x}$$

wo nämlich α zu a, und β zu b die *Alterſergänzungen* ſind. Weil nun $\int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\beta} \cdot \int \frac{x\,dx}{r^x} = \lambda\,\overline{b}$, ſo iſt

$$\lambda\,\overline{a\,b} = \lambda\,\overline{b} - \frac{1}{\alpha} \cdot \int \frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \int \frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$$= \lambda\,\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\, p. \int \frac{dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha}\, p\, \frac{x}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot 2\, p. \int \frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta} \frac{p x^2}{r^x}$$ (*Zuſätze* zu Cap. I. §. 24.)

Nun iſt nach der Integration $x = \beta$, weil β zu dem älteſten Leben gehört.

Daher $+ \frac{1}{\alpha} \frac{p x}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta} \frac{p x^2}{r^x} = 0$, alſo

$$\lambda\,\overline{ab} = \lambda\,\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\, p. \int \frac{dx}{r^x} + \frac{2}{\alpha\beta}\, p. \int \frac{x\,dx}{r^x}$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha} \cdot p\lambda\overline{b} + \frac{1}{\alpha\beta} p \int \frac{x\,dx}{r^x} = \left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)\lambda\overline{b}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} p \left(\int \frac{dx}{r^x} - \lambda\overline{b}\right) = \left(1 - \frac{2p}{\alpha}\right)\lambda\overline{b} + \frac{p}{\alpha} \cdot \int \frac{dx}{r^x}$$

Wenn bloss *jährliche* Renten gerechnet werden, so ist

$$\lambda\overline{ab} = \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha} \cdot \int \frac{\beta}{r^\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \int \frac{\beta^2}{r^\beta}$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha} p \int \frac{1}{r^\beta} + \frac{p\beta}{\alpha r^\beta}$$

$$+ \frac{1}{\alpha\beta} p \int \frac{\beta}{r^\beta} + \frac{rp}{\alpha\beta} \int \frac{\beta}{r^\beta} - \frac{p(\beta+1)\beta}{\alpha\beta . r^\beta}$$

$$= \lambda\overline{b} - \frac{p}{\alpha} \cdot \lambda\overline{b} + \frac{rp}{\alpha\beta} \cdot \int \frac{\beta}{r^\beta} - \frac{p}{\alpha r^\beta}$$

$$= \left(1 - \frac{p}{\alpha}\right)\lambda\overline{b} + \frac{pr}{\alpha}\left(\int \frac{1}{r^\beta} - \lambda\overline{b}\right) - \frac{p}{\alpha r^\beta}$$

$$= \left(1 - \frac{p}{\alpha}(1+r)\right)\lambda\overline{b} + \frac{1}{\alpha}\left(\int \frac{1}{r^\beta} + p \int \frac{1}{r^{\beta-1}}\right).$$

16.

Zu §. 136.

Es ist nach jeder Ordnung des Sterbens

$$\lambda\overline{ab} = \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A . Br} + \frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{A . Br^2} + +$$

$$= \frac{(A - \Delta A)\overset{1}{-}B}{AB . r} + \frac{(A - \Delta A - \Delta \overset{1}{-}A)\overset{2}{-}B}{AB . r^2} + +$$

=

$$= \lambda\overline{b} - \frac{\Delta A}{AB} \cdot \left(\frac{\overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{2}{-}B}{r^2} ++ \right)$$

$$- \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{AB} \cdot \left(\frac{\overset{2}{-}B}{r} + \frac{\overset{3}{-}B}{r^2} ++ \right)$$

— — —

$$= \lambda\overline{b} - \frac{\Delta A}{A}\lambda\overline{b} - \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{Br}\lambda\overline{b+1}$$

$$- \frac{\Delta\overset{2}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}B}{Br^2}\lambda\overline{b+2}.$$

Nun ist $\frac{\overset{1}{-}B}{Br}\lambda\overline{b+1} = \overset{1}{=}\lambda.\overline{b}$, einer *auf Ein Jahr aufgeschobenen Leibrente für b*, und $\frac{\overset{2}{-}B}{Br^2}\lambda\overline{b+2} = \overset{2}{=}\lambda.\overline{b}$, einer *auf zwey Jahr aufgeschobenen Leibrente* von *b* (Cap. II. §. 83.) Auch ist $\lambda\overline{b} + \overset{1}{=}\lambda.\overline{b} + \overset{2}{=}\lambda.\overline{b} ++ = L.\overline{b}$. (§. 88.) Nimmt man also statt der verschiedenen Factoren $\frac{\Delta A}{A}$, $\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{A}$, u. s. f. deren in allen α sind, weil α die Altersergänzung ist, (obgleich in der Formel nicht mehr, als die ersten β gebraucht werden) und davon die Summe gleich ist $\frac{A}{A} = 1$, das Mittel $\frac{1}{\alpha}$, so wird

$$\lambda\overline{ab} = \lambda\,b - \frac{1}{\alpha}\left(\lambda\overline{b} + \overset{1}{=}\lambda\,\overline{b} + \overset{2}{=}\lambda\,\overline{b} + \right)$$

$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{\alpha} \cdot L\overline{b}$, welches von dem wahren Wehrt so viel nicht abweichen, obgleich auch nicht völlig zutreffen kann.

17.

Zu §. 144.

Es ist

$$\lambda\overline{ab} = \frac{1}{AB}\cdot\left(\frac{(A-\Delta A)\overset{1}{-}B}{r} + \frac{(\overset{1}{-}A-\Delta\overset{1}{-}A)\overset{2}{-}B}{r^2} ++\right)$$

$$= \frac{1}{AB}\cdot\left(\frac{A\,\overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{1}{-}A\,\overset{2}{-}B}{r^2} ++\right)$$

$$- \frac{1}{AB}\cdot\left(\frac{\Delta A.\overset{1}{-}B}{r} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A.\overset{2}{-}B}{r^2} ++\right)$$

Dieser letzte Theil ist *der baare Wehrt einer beym Tode von A zahlbaren Summe 1, im Fall B alsdenn noch lebet*, auf ein Jahr zurück discontirt; man setze dafür $\frac{V}{r}$, so ist

$$\lambda\overline{ab} = \frac{1}{AB}\cdot\left(\frac{A\,\overset{1}{-}B}{r} + \frac{\overset{1}{-}A\,\overset{2}{-}B}{r^2} ++\right) - \frac{V}{r}$$

$$\text{Folglich } \lambda\overline{ab} - \frac{A\overset{1}{-}B}{A.Br} = \frac{1}{AB}\left(\frac{\overset{1}{-}A\,\overset{2}{-}B}{r^2}++\right) - \frac{V}{r},$$

$$\frac{B}{\overset{1}{-}B}\,r.\lambda\overline{ab} - 1 = \frac{1}{A\,\overset{1}{-}B}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A\,\overset{2}{-}B}{r} ++\right) - \frac{B}{\overset{1}{-}B}\,V.$$

$$\text{Also } \frac{B}{\overset{1}{-}B}\,(r.\lambda\overline{ab}+V) - 1 = \lambda\overline{a(b+1)}.$$

18.

Zu §. 147.

Die Correction für die Verbindungswehrte, wenn man sie auf *augenblickliche* Renten haben will, wird folgen-

folgendermaſsen gefunden. Die Schlüſſe ſind hier denen ähnlich, welche oben (*Zuſätze* zu Cap. II. §. 16. 17) geführet ſind.

In einem unendlich kleinen Theil des Jahrs ſey der Abgang von der Anfangszahl der Lebenden A; $\frac{\Delta A}{n}$, und von B, $\frac{\Delta B}{n}$. Innerhalb des Jahrs wird das Abſterben gleichförmig angenommen, und alſo auf jedes $\frac{1}{n}$tel des Jahrs auch $\frac{1}{n}$tel der jährlichen Decremente ΔA, und ΔB gerechnet. Was abſtirbt, ſtirbt aber ab im *Anfang der Termine* nach der gewöhnlichen Vorausſetzung. Der jährliche Zinsfuſs *r* wird beybehalten. Es iſt alſo das Disconto für den erſten Augenblick $r^{\frac{1}{n}}$, für den zweyten $r^{\frac{2}{n}}$, und ſo ferner. Folglich kommen für das erſte Jahr anſtatt $\frac{\frac{1}{n}A.\frac{1}{n}B.}{A.Br}$ folgende Theile der Rechnung.

$$\frac{1}{AB}\frac{1}{n}\left(A-\frac{\Delta A}{n}\right)\left(B-\frac{\Delta B}{n}\right)\cdot\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}$$

$$+\frac{1}{AB}\cdot\frac{1}{n}\left(A-\frac{2\Delta A}{n}\right)\cdot\left(B-\frac{2\Delta B}{n}\right)\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}$$

$$++=\frac{1}{AB}\cdot\frac{AB}{n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}++\right)$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\frac{A\Delta B}{n.n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3}{r^{\frac{3}{n}}}++\right)$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\frac{B.\Delta A}{n.n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3}{r^{\frac{3}{n}}}++\right)$$

$$+\frac{1}{AB}\cdot\frac{\Delta A.\Delta B}{n\,n.n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2^2}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3^3}{r^{\frac{3}{n}}}++\right)$$

$$=\frac{1}{A.B}\cdot\frac{ABp'}{pr}-\frac{1}{AB}\cdot\frac{A\Delta B}{pr}\cdot p'(p'-p)$$

$$-\frac{1}{AB}\cdot\frac{B\Delta A}{pr}\cdot p'(p'-p)+$$

$$\frac{1}{AB}\cdot\frac{\Delta A.\Delta B}{pr}\,p'(2p'(p'-p)-p)$$ (*Zusätze* zu Cap. I. §. 23. 24.)

Hier ist wiederum $p'=\frac{1}{\log.\text{nat}.r.}$, und $p=\frac{1}{r-1}$.

Nun ist $\frac{p'}{pr}=0{,}98$ für den Zinsfuss $=1{,}04$, und $p'-p$ kann $=0{,}5$ genommen werden. (*Zusätze* zu Cap. II. §. 16.) Also wird der obige Wehrt

$$=0{,}98\left(\frac{AB}{AB}-\frac{1}{2}\frac{A\Delta B}{AB}-\frac{1}{2}\frac{B\Delta A}{AB}+\frac{\Delta A\Delta B}{2AB}\right)$$

Auf gleiche Weise bekommt man für das *zweyte* Jahr ähnliche Stücke nur mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt. Folglich erhält man für alle Jahre zusammen den Wehrt der Verbindungsrente auf Augenblicke

$$S=\frac{1}{AB}\cdot 0{,}98\left(A.B+\frac{\overset{1}{-}A\overset{1}{-}B}{r}+\frac{\overset{2}{-}A\overset{2}{-}B}{r^2}++\right)$$

$$-\frac{0.49}{AB}\left(A\Delta B+\frac{\overset{1}{-}A\Delta\overset{1}{-}B}{r}++\right)$$

—

$$-\frac{0,49}{AB}\left(B.\Delta A+\frac{\overset{1}{-}B\Delta\overset{1}{-}A}{r}++\right)$$

$$+\frac{0,49}{AB}\cdot\left(\Delta A.\Delta B+\frac{\Delta\overset{1}{-}A.\ \Delta\overset{1}{-}B}{r}++\right)$$

$= 0,98.\ \lambda\overline{ab} + 0,98 - 0,49.\ r\,R.$ §. 10. und weil

$rR = 1 - \frac{\lambda\overline{ab}}{p}$, so wird $S = 0,98.\ \lambda\overline{ab}$

$+ 0,98 - 0,49 + 0,49\,\frac{\lambda\overline{ab}}{p} =$

$= \left(0,98 + \frac{0,49}{25}\right)\lambda\overline{ab} + 0,49 =$

$= (0,98 + 0,02)\,\lambda\overline{ab} + 0,5 = \lambda\overline{ab} + \frac{1}{2}$ ganz nahe. Es ist nämlich $p = 25$. Die Correction ist also $\frac{1}{2}$ ganz nahe, denn der gefundene Wehrt von S ist nur beynahe richtig, weil $p' - p$, nicht völlig 0, 5 ist.

19.

Zu §. 138.

Aufgabe. Das Absterben *gleichförmig* gesetzt, so lässt sich die *Altersergänzung* für ein Alter finden, dessen *Leibrente* so gross ist, als die gegebene *Verbindungsrente* für zwo Personen.

Dieser letzte Wehrt sey N. Die gesuchte Altersergänzung x, so ist $N = \int\frac{dx}{r^x} - \frac{1}{x}\int\frac{x\,dx}{r^x}$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 17.) $= p\left(1 - \frac{1}{r^x}\right) - \frac{1}{x}\left(p.\int\frac{dx}{r^x} - \frac{px}{r^x}\right)$, wo nämlich $p = \frac{1}{\text{log. nat. r.}}$, weil man die Wehrte

für augenblickliche Renten gebraucht.

Also $N = p - \frac{1}{x} \cdot p^2 \left(1 - \frac{1}{r^x}\right)$ (*Zusätze* zu Cap. I. §. 23.) Daher

$$\frac{x \cdot (p - N)}{p^2} = 1 - \frac{1}{r^x}.$$

Wird $\frac{1}{r} = V$ gesetzet, so bekömmt man

$$V^x + \frac{p - N}{p\,p} \cdot x = 1.$$

Diess ist eine *Exponentialgleichung*, welche nach der von Hr. *Morville* *) gewiesenen Methode aufgelöset werden kann. Ich zeige diess aber nur im Vorbeygehen an, weil in Praxis davon zur Zeit wenig Gebrauch zu machen ist.

20.

Zu §. 138. Satz 34.

Nimmt man die Altersergänzung *x* so gross, als sie für ein *einfaches* Leben *m* seyn muss, dessen Dauer der Verbindungsdauer $C\,\overline{a\,b}$ gleich ist, so trifft der 34ste Satz zwar nicht genau ein, allein man kann die Correction bestimmen, die in diesem Fall zu der Leibrente $\lambda\,\overline{m}$ hinzugesetzet werden muss, um die Verbindungsrente $\lambda\,\overline{a\,b}$ zu bekommen, die Hypothese vom gleichförmigen Sterben nämlich vorausgesetzet.

Es

*) Siehe dessen *Versuch, Exponentialgleichungen im allgemeinen aufzulösen, in der neuen Sammlung der Societätsschriften zu Copenhagen.* p. 606, §. 45.

Es ist $\lambda\,\overline{a\,b} = \lambda\,\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\,L\,\overline{b}$, (wiederum sind α und β die Altersergänzungen zu a und b, und p ist der natürliche Logarithme von dem Zinsfuss, der oben p' geschrieben war. Weil nun $\lambda\,\overline{b} = p - \frac{p}{\beta}\int\frac{dx}{r^{\beta}}$, und

$L\,\overline{b} = p'\left(2\,\lambda\,\overline{b} - \int\frac{dx}{r^{\beta}}\right)$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 16.

23.) so wird $\lambda\,\overline{a\,b} = p - \frac{p}{\beta}\int\frac{dx}{r^{\beta}}$

$$- \frac{p}{\alpha}\cdot\left(2p - \frac{2p}{\beta}\cdot\int\frac{dx}{r^{\beta}}\right) + \frac{p}{\alpha}\cdot\int\frac{dx}{r^{\beta}}$$

$$= p - \frac{2p^2}{\alpha} + \left(\frac{p}{\alpha} - \frac{p}{\beta} + \frac{2p^2}{\alpha\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\beta}}.$$

Setzet man $\alpha = \beta$, um nur den leichtesten Fall zu haben, so ist $\lambda\,\overline{a\,a} = p - \frac{2p^2}{\alpha} + \frac{2p^2}{\alpha^2}\int\frac{dx}{r^{\alpha}}$.

Das einfache Leben, dessen Dauer so gross ist als $C\,\overline{a\,a} = \frac{1}{3}\,\alpha$ (§. 4.) und dessen Altersergänzung μ, also $= \frac{2}{3}\,\alpha$, sey m, so ist $\lambda\,\overline{m} = p - \frac{p}{\mu}\cdot\int\frac{dx}{r^{\mu}}$.

Folglich der Unterschied

$$\lambda\,\overline{ab} - \lambda\,\overline{m} = \frac{2p^2}{\alpha^2}\cdot\int\frac{dx}{r^{\alpha}} - \frac{2p^2}{\alpha} + \frac{3}{2}\frac{p}{\alpha}\int\frac{dx}{r^{\mu}}$$

$$= \frac{p}{\alpha}\left(\frac{2p}{\alpha}\int\frac{dx}{r^{\alpha}} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{r^{\mu}} - 2p\right)$$

$$= \frac{p}{\alpha}\left(\frac{2p}{\alpha}\int\frac{dx}{r^{\alpha}} - \frac{1}{2}p - \frac{3}{2}\frac{p}{r^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{p^2}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\int\frac{dx}{r^{\alpha}} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{r^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{p^2}{2\alpha}\left(\frac{4}{\alpha}\int\frac{dx}{r^{\alpha}} - \frac{3}{r^{\frac{2}{3}\alpha}} - 1.\right)$$

Dieſs iſt die Correction, welche zu der Leibrente $\lambda\,\overline{m}$ zuzulegen iſt. Sie iſt wegen des Factors $\frac{p^2}{2\alpha}$ in den meiſten Fällen erheblich.

Wenn gar keine Zinſen bezahlt werden, iſt dieſer Unterſchied nichts. Alsdenn iſt $C\,\overline{a\,b} = \lambda\,\overline{a\,b}$, und $\lambda\,\overline{m} = E\,\overline{m} = C\,\overline{a\,b}$. Dieſs giebt auch die Formel, obgleich nicht unmittelbar. Wenn $r = 1$, ſo iſt $\int\frac{dx}{r^{\alpha}} = \alpha$, folglich der Factor

$$\frac{4}{\alpha}\int\frac{dx}{r^{\alpha}} - \frac{3}{r^{\frac{2}{3}\alpha}} - 1 = 4 - 3 - 1 = 0.$$

Aber zugleich wird auch $p = \frac{1}{r-1} = \infty$, und alſo $\frac{p^2}{2\alpha} = \frac{\infty^2}{2\alpha}$, und der ganze Ausdruck $\frac{\infty^2}{2\alpha}\cdot 0$. Dieſs giebt keinen beſtimmten Wehrt. Allein wenn die Formel analytiſch behandelt wird, wie es in ſolchen Fällen geſchehen muſs, (*Zuſätze* zum erſten Cap. §. 23.) alles auf eine Berechnung gebracht, und ein Bruch $\frac{M}{N}$ daraus gemacht und dann Zähler und Nenner jeder für

ſich

ſich differentiirt wird, ſo lange bis nicht mehr $\frac{M}{N} = \frac{o}{o}$ wird für $r = 1$; ſo bekommt man $\frac{dM}{dN} = \frac{o}{o}$, auch noch $\frac{ddM}{ddN} = \frac{o}{o}$; aber $\frac{d^3M}{d^3N} = \frac{o}{F.dr}$. Dieſs iſt die Anzeige, daſs der Wehrt der Formel für $r = 1$ verſchwinden müſſe.

Auch iſt dieſe Differenz $= o$, wo *r unendlich groſs* iſt. Was die Zwiſchenfälle betrifft, zwiſchen dieſen beyden, ſo kann es verſchiedene Wehrte des Zinsfuſses geben, bey denen die Differenz ein *Gröſstes*, oder ein *Kleinſtes* iſt; aber die Gleichung, woraus ſolche Wehrte zu beſtimmen ſind, iſt vom Grade α.

Auch bey dem Zinsfuſs 1, 04 iſt doch die obige Correction ſchon erheblich. Z. B. wenn $a = 45$ Jahr und alſo $\alpha = 51$ iſt, nämlich nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben, und 96, wie in *Süſsmilchs* Tafel, für das höchſte Lebensziel gerechnet, ſo iſt, weil hier $p = \frac{1}{\text{log. nat. } r} = 25, 5$. die Differenz für dieſen Fall, $= - 0, 39$.

21.

Zu §. 148.

Nach der Hypotheſe des *gleichförmigen Abſterbens* kömmt der *Wehrt der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſenden Verbindungsrente* zwoer Perſonen ſehr leicht heraus.

Die

Die Renten *augenblicklich* gerechnet, sey das Alter der Personen *a* und *b*, wovon *b* das höhere ist, und α und β die dazu gehörigen Altersergänzungen.

Nun ist

$$\lambda\overline{ab} = \int\frac{dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{r^x}.$$

und

$$L\,\overline{ab} = \int\frac{x\,dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int\frac{x^2\,dx}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^3\,dx}{r^x}$$

$$= p\int\frac{dx}{r^x} - \frac{px}{r^x} - 2p\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\int\frac{x\,dx}{r^x} + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\frac{px^2}{r^x}$$

$$+ \frac{3}{\alpha\beta}\,p\int\frac{x^2\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{p.\,x^3}{r^x}.$$

Nach der Integration wird $x = \beta$, daher

$$-\frac{px}{r^x} + \frac{px^2}{\alpha\,r^x} + \frac{px}{r^x} - \frac{px^2}{\alpha\,r^x} = 0.$$

Folglich

$$L\,\overline{ab} = p\int\frac{dx}{r^x} - 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)p\int\frac{x\,dx}{r^x}.$$

$$+ \frac{3p}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$$= p\,\lambda\,\overline{ab} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)p\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

$$+ \frac{2p}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$$= p\,\lambda\,\overline{ab} + p\,\lambda\,\overline{ab} - p\int\frac{dx}{r^x} + \frac{p}{\alpha\beta}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$$= 2\,p\,\lambda\,\overline{ab} - p\int\frac{dx}{r^x} + p\,\lambda\,\overline{ab} - p\int\frac{dx}{r^x}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)p.\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

und

und weil $\lambda\overline{b} = \int\frac{dx}{r^{\beta}} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x\,dx}{r^{\beta}}$

so ist $L\overline{ab} = 3\,p\cdot\lambda\overline{ab} - p\,\lambda\overline{b}$

$- p\int\frac{dx}{r^{\beta}} + \frac{1}{\alpha}\cdot\ p\int\frac{x\,dx}{r^{\beta}}.$

Und ferner $\frac{1}{\alpha}\ p\int\frac{x\,dx}{r^{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}\ p.\left(\int\frac{dx}{r^{\beta}} - \lambda\overline{b}\right)$

Also erhält man

$$L\overline{ab} = 3\,p\,\lambda\overline{ab} - p\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\lambda\overline{b} - p\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\int\frac{dx}{r^{\beta}}$$

Hier ist $\int\frac{dx}{r^{\beta}}$ die Zeitrente für β Jahre.

Wenn $a = b$, $\alpha = \beta$, so wird

$L\overline{aa} = 3\,p\cdot\lambda\overline{ab} - 2\,p\,\lambda\overline{b}.$

22.

Es ist auch $\int\frac{x\,dx}{r^{x}} - \frac{1}{\beta}\int\frac{x^{2}dx}{r^{x}} = L\overline{b}$ das ist einer so wachsenden Leibrente für *b*, und da

$$L\overline{ab} = \int\frac{x\,dx}{r^{x}} - \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int\frac{x^{2}dx}{r^{x}} + \frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^{3}dx}{r^{x}}$$

so wird auch

$$L\overline{ab} = L\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\cdot\ 2\,p.\int\frac{x\,dx}{r^{x}} + \frac{p\,x^{2}}{\alpha\,r^{x}}$$

$$+ \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\left(3\,p\int\frac{x^{2}dx}{r^{x}} - \frac{p\,x^{3}}{r^{x}}\right)$$

Nach der Integration wird $x = \beta$,

folglich $+ \frac{p\,x^{2}}{\alpha\,r^{x}} - \frac{p\,x^{3}}{\alpha\beta\,r^{x}} = 0.$

Also

$$\text{Also } L\overline{ab} = L\overline{b} - \frac{2p}{\alpha} L\overline{b} + \frac{1}{\alpha\beta}\, p \int \frac{x^2 dx}{r^x},$$

$$= L\overline{b} - \frac{2p}{\alpha} \cdot L\overline{b} + \frac{p}{\alpha}\left(\int \frac{x\,dx}{r^x} - L\overline{b}\right),$$

$$= \left(1 - \frac{2p}{\alpha}\right) L\overline{b} + \frac{p}{\alpha}\,\beta\left(\int \frac{d\,x}{r^x} - \lambda\overline{b}\right).$$

Die Art, wie die *wachsende* Rente für *zwey* Leben von der für eine solche auf *Ein* Leben abhängt, ist derjenigen ähnlich, welche bey der *unveränderlichen* statt findet. (§. 15.)

23.

Die Formel für die *jährliche* Rente ist

$$\lambda\overline{ab} = \int \frac{\beta}{r^\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \int \frac{\beta^2}{r^\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} \int \frac{\beta^3}{r^\beta}.$$

$$= \int \frac{\beta}{r^\beta} - \frac{1}{\beta} \int \frac{\beta^2}{r^\beta} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{\beta^2}{r^\beta} - \frac{1}{\alpha\beta} \int \frac{\beta^3}{r^\beta}$$

Aber $\int \frac{\beta}{r^\beta} - \frac{1}{\beta} \int \frac{\beta^2}{r^\beta}$ ist der Wehrt einer solchen wachsenden Rente für $\beta = L\overline{b}$.

$$\text{Also } L\overline{ab} = L\overline{b} - \frac{1}{\alpha}\left(\int \frac{\beta^2}{r^\beta} - \frac{1}{\beta} \int \frac{\beta^3}{r^\beta}\right).$$

und $\int \frac{\beta^2}{r^\beta} - \frac{1}{\beta} \int \frac{\beta^3}{r^\beta}$ ist eine nach den *Quadraten der natürlichen Zahlen wachsende Leibrente für b.* Man kann aber $L\overline{ab}$ hier gleichfalls durch $\lambda\overline{ab}$ und andere Zeitrenten geben, wie im vorhergehenden §. bey augenblicklichen Renten, nur dass die Formel hier nicht so bequem wird als dorten.

24. *Zu*

24.

Zu §. 149.

Wenn die Zahl R (§. 10.) auch für wachsende Renten vorher berechnet ist, die Sterblichkeitstafel sey, welche man will, und dann durch R′ bezeichnet wird, so hat man $L_{\overline{ab}} = \frac{\lambda_{\overline{ab}} + 1 - rR'}{r-1}$..

Es ist nämlich

$$R' = \frac{AB - \overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A.\ B\ r} + 2.\ \frac{\left(\overset{1}{-}A\ \overset{2}{-}B - \overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B\right)}{A.\ B.\ r^2} ++$$

$$n.\ \frac{\left(\overset{n-1}{-}A.\ \overset{n-1}{-}B - \overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B\right)}{A.\ B.\ r^n}$$

Nun $L_{\overline{ab}} = \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{AB.r} + \frac{2\overset{2}{-}A.\ \overset{2}{-}B}{A.B.r^2} ++ \frac{n.\ \overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A.\ B.\ r^n}$

Daher

$$L_{\overline{ab}} + R' = \frac{1}{AB}\left(\frac{AB}{r} + \frac{2.\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B}{r^2} ++ \frac{n.\overset{n-1}{-}A.\ \overset{n-1}{-}B}{r^n}\right)$$

$$= \frac{AB}{ABr} + \frac{\lambda_{\overline{ab}}}{r} + \left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{r} ++ \frac{\overset{n-1}{-}A.\ \overset{n-1}{-}B}{r^n}\right)$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{L_{\overline{ab}} + \lambda_{\overline{ab}}}{r}.$$

Folglich $(r-1)\ L_{\overline{ab}} = \lambda_{\overline{ab}} + 1. - rR'$

und $L_{\overline{ab}} = \frac{\lambda_{\overline{ab}} + 1 - rR'}{r-1}$.

25.

25.

Es war

$$R = \frac{1}{AB}\left(\Delta B.\int\frac{\overset{1}{-}A}{r} - \Delta\Delta B.\int\frac{\overset{2}{-}A}{r^2} - \Delta\Delta\overset{1}{-}B\int\frac{\overset{3}{-}A}{r^3} - -\right)$$

$$+ \frac{1}{AB}\left(\Delta A.\int\frac{B}{r} - \Delta\Delta A.\int\frac{\overset{1}{-}B}{r^2} - \Delta\Delta\overset{1}{-}A.\int\frac{\overset{2}{-}B}{r^3} - -\right)$$

Gebraucht man nun statt der Summen $\int\frac{\overset{1}{-}A}{r}$, $\int\frac{\overset{2}{-}A}{r^2}$, $\int\frac{B}{r}$, $\int\frac{\overset{1}{-}B}{r}$ u. s. f. welche die *erste* Hülfstafel (Cap. II. §. 56.) giebt, die dazu gehörigen Zahlen aus der zwoten Tafel (Cap. III. §. 117.), so erhält man durch eben so viele Operationen die Wehrte von R′, als mittelst der ersten Tafel die Wehrte von R. Daraus ist dann der Wehrt von $L\overline{a\ b}$ leicht zu berechnen.

Zusätze

Zusätze
zum
dritten Abschnitt des dritten Capitels.

Vom Zusammenleben dreyer und mehrerer Personen.

26.

Zu §. 152.

Es ist $\lambda\overline{abc} = \frac{1}{A.B.C}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B\,\overset{1}{-}C}{r} + \frac{\overset{2}{-}A\,\overset{2}{-}B\,\overset{2}{-}C}{r^2} ++\right)$

$$= \frac{1}{ABC}\cdot\left(AB - \Delta(AB)\right)\frac{\overset{1}{-}C}{r} + \left(AB - \Delta(AB) - \Delta(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B)\right)\frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + +$$

$$= \frac{1}{C}\left(\frac{\overset{1}{-}C}{r} + \frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + +\right) - \frac{1}{ABC}\cdot\Delta(AB).\int\frac{\overset{1}{-}C}{r}$$

$$- \frac{1}{ABC}.\Delta(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B)\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2} - \frac{1}{ABC}.(\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B)\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3} - -$$

Allein da ferner $\Delta(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B) = \Delta(AB) - \Delta\Delta(AB)$,

$\Delta(\overset{2}{-}A\,\overset{2}{-}B) = \Delta(AB) - \Delta\Delta(AB) - \Delta\Delta(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B)$,

(weil $\Delta(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B) - \Delta(\overset{2}{-}A\,\overset{2}{-}B) = \Delta\Delta(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B)$)

und so weiter

$\Delta(\overset{3}{-}A\,\overset{3}{-}B) = \Delta(AB) - \Delta\Delta(AB) - \Delta\Delta(\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B)$

$- \Delta\Delta(\overset{2}{-}A\,\overset{2}{-}B)$,

 so

so wird

$$\lambda\,\overline{abc} = \lambda\,\overline{c} - \frac{1}{ABC}\cdot\Delta(AB)\left(\int\frac{\overset{1}{-}C}{r} + \int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2} ++\right)$$

$$+ \frac{1}{ABC}\cdot\Delta\Delta(AB)\left(\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + \int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3} ++\right)$$

$$+ \frac{1}{ABC}\cdot\Delta\Delta(\overset{1}{-}A\;\overset{1}{-}B)\left(\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + \int\frac{\overset{4}{-}C}{r^4} ++\right)$$

$$+\;+\;+$$

$$= \lambda\,\overline{c} - \frac{\Delta.(AB)}{ABC}\,S.\int\frac{\overset{1}{-}C}{r}.$$

$$+ \frac{1}{ABC}\cdot\Big(\Delta\Delta(AB)\,S.\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2}.$$

$$+ \Delta\Delta(\overset{1}{-}A\;\overset{1}{-}B)\,S.\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3}$$

$$+ \Delta\Delta(\overset{2}{-}A\;\overset{2}{-}B)\,S.\int\frac{\overset{4}{-}C}{r^4}\Big).$$

$$+\;+$$

Die Summen $S.\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2}$, $S.\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3}$ ++ sind die Zahlen der Columne E in der Hülfstafel (Cap. II. §. 117.) die zu den Jahren $c+2$, $c+3$ u. s. f. gehören.

Nun ist aber

$$\Delta(AB) = AB - \overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B = \overset{1}{-}A.\Delta B + \overset{1}{-}B.\Delta A + \Delta A.\Delta B.$$

$$= A.\Delta B + B.\Delta A - \Delta A.\Delta B.$$

auch $\Delta(\overset{1}{-}A\overset{1}{-}B) = \overset{1}{-}A.\Delta\overset{1}{-}B + \overset{1}{-}B.\Delta\overset{1}{-}A - \Delta\overset{1}{-}A.\Delta\overset{1}{-}B$

Daraus

Daraus wird $\Delta\Delta(AB) = \Delta(AB) - \Delta(\overset{1}{-}A \;\; -B)$

$= \overset{1}{-}A\,(\Delta B - \Delta\overset{1}{-}B) + \overset{1}{-}B\,(\Delta A - \Delta\overset{1}{-}A)$

$+ \Delta A.\,\Delta B - \Delta\overset{1}{-}A.\,\Delta\overset{1}{-}B$

$= \overset{1}{-}A.\,\Delta\Delta B + \overset{1}{-}B.\,\Delta\Delta A + \Delta A.\,\Delta B$

$- (\Delta A - \Delta\Delta A).\,\Delta\overset{1}{-}B.$

$= \overset{1}{-}A.\,\Delta\Delta B + \overset{1}{-}B.\,\Delta\Delta A + \Delta A.\,\Delta\Delta B$

$+ \Delta\overset{1}{-}B.\,\Delta\Delta A.$

$= A.\,\Delta\Delta B + (\overset{1}{-}B + \Delta\overset{1}{-}B)\,\Delta\Delta A$

$= A.\,\Delta\Delta B + (B - \Delta B + \Delta\overset{1}{-}B)\,\Delta\Delta A,$

$= A.\,\Delta\Delta B + B.\,\Delta\Delta A - \Delta\Delta B.\,\Delta\Delta A.$

Folglich wird

$$\lambda\overline{abc} = \lambda\overline{c} - \frac{\Delta.(AB)}{ABC}.\, S.\!\int\frac{\overset{1}{-}C}{r}$$

$$+ \frac{1}{ABC}\left(A\Delta\Delta B\; S.\!\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + \overset{1}{-}A.\Delta\Delta\overset{1}{-}B\; S.\!\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + +\right)$$

$$+ \frac{1}{ABC}\left(B.\Delta\Delta A\; S.\!\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + \overset{1}{-}B\Delta\Delta\overset{1}{-}B\; S.\!\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + +\right)$$

$$- \frac{1}{ABC}\left(\Delta\Delta B.\Delta\Delta A\; S.\!\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2} + \Delta\Delta -B.\Delta\Delta\overset{1}{-}A\; S.\!\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3} + +\right)$$

$$= \lambda\overline{c} - \left(\frac{\Delta B}{BC} + \frac{\Delta A}{A.C} - \frac{\Delta A.\Delta B}{A.B.C}\right) S.\!\int\frac{\overset{1}{-}C}{r^1}$$

$$+ \frac{1}{ABC}.\left(A.\Delta\Delta B + B.\Delta\Delta A - \Delta\Delta A.\Delta\Delta B\right) S.\!\int\frac{\overset{2}{-}C}{r^2}$$

$$+ \left(\overset{1}{-}A.\Delta\Delta\overset{1}{-}B + \overset{1}{-}B.\Delta\Delta\overset{1}{-}A - \Delta\Delta\overset{1}{-}A.\Delta\Delta\overset{1}{-}B\right) S.\!\int\frac{\overset{3}{-}C}{r^3}$$

$+ \;\; + \;\; +$

27.

Zu §. 157.

Wenn die *Sterbensordnung mit gleichförmig sich verändernden Decrementen* (Cap. I. §. 65.) zum Grunde gelegt wird, so läſst sich, wie bey zwo, so bey mehreren Personen eine allgemeine Formel geben, welche die Wehrte der Verbindung ausdrükt. Nur daſs auch hier, wie vorher §. 6. 7. mehrere Theile derselben besonders für sich zu berechnen vorkommen, weil die veränderlichen Gröſsen der Formel für diese Stücke andere Wehrte haben.

Es seyen überhaupt, wie sonst, A, B, C die *Anfangszahlen*, und $\overset{n}{-}A$, $\overset{n}{-}B$, $\overset{n}{-}C$ die Zahlen der Lebenden für *die Jahre, wo sich der für sich besonders zu berechnende Theil* anfängt, und dann

$\frac{\overset{n}{-}A}{A} = \alpha$, $\frac{\overset{n}{-}B}{B} = \alpha'$, $\frac{\overset{n}{-}C}{C} = \alpha''$. In dem ersten Theil ist $\alpha = 1 = \alpha' = \alpha''$, aber nicht so in den folgenden.

Ferner sollen die *Decremente des ersten* Jahrs seyn D, D′, D″, und die *Differenzen der Decremente* d, d′, d″,

und $\frac{D - \frac{d}{2}}{A} = p$, $\frac{D' - \frac{d'}{2}}{B} = p'$, $\frac{D'' - \frac{d''}{2}}{C} = p''$.

Auch $\frac{d}{2A} = q$, $\frac{d'}{2B} = q'$, $\frac{d''}{2C} = q''$.

Als-

Alsdenn ist für jedes Stück der Verbindungsrente $\lambda\overline{ab}$ der *Terminus generalis*

$(\alpha - px - qx^2)\frac{(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x}$, und der ganze Theil

$$= \int(\alpha - px - qx)\frac{(\alpha' - p' - q'x^2)}{r^x}$$

$$= \alpha\alpha'\int\frac{1}{r^x} \left.\begin{matrix} -\alpha' p \\ -\alpha p' \end{matrix}\right\}\int\frac{x}{r^x} \left.\begin{matrix} -q \\ -q' \\ -pp' \end{matrix}\right\}\int\frac{x^2}{r^x}$$

$$\left.\begin{matrix} +qp' \\ +pq' \end{matrix}\right\}\int\frac{x^3}{r^x} + qq'\int\frac{x^4}{r^x}$$

Wenn man der Kürze wegen jedes besondere Stück, das die Rente hier bezeichnet, wie sonst die ganzen, durch $\lambda\overline{a}$, $\lambda\overline{b}$, $\lambda\overline{ab}$; und die Stücke der *nach der Ordnung der Zahlen wachsenden Rente durch* $L\overline{a}$, $L\overline{b}$, $L\overline{ab}$, und *die Stücke der nach den Quadraten der Zahlen wachsenden Renten* durch $L\overset{2}{\overline{a}}$, $L\overset{2}{\overline{b}}$, $L\overset{2}{\overline{ab}}$ ausdrückt, so ist

$$\int\frac{(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x} = \lambda\overline{b},$$

$$\int\frac{x(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x} = L\overline{b},$$

$$\int\frac{x^2(\alpha' - p'x - q'x^2)}{r^x} = L\overset{2}{\overline{b}},$$

und $\lambda\overline{ab} = \alpha\lambda b - pL\overline{b} - qL\overset{2}{\overline{b}}$.

28.

Für *drey* Personen ist

$$\lambda\overline{abc} = \int \frac{(\alpha - px - qx).(\alpha' - q'x - q'x^2).(\alpha'' - p''x - q''x^2)}{r^x}$$

$$= \alpha\lambda\overline{bc} - pL\overline{bc} - qL\overset{2}{\overline{bc}}.$$

$$= \alpha\alpha'\alpha''\int\frac{1}{r^x} \left.\begin{array}{l} -\alpha\alpha'p'' \\ -\alpha\alpha''p' \\ -\alpha'\alpha''p \end{array}\right\}\int\frac{x}{r^x} \left.\begin{array}{l} -\alpha\alpha'q'' \\ -\alpha\alpha''q' \\ -\alpha'\alpha''q \\ +\alpha p'p'' \\ +\alpha' p p'' \\ +\alpha'' p p' \end{array}\right\}\int\frac{x^2}{r^x}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha p'q'' \\ +\alpha p''q' \\ +\alpha' p q'' \\ +\alpha' p'' q \\ +\alpha'' p q' \\ +\alpha'' p' q \\ +p p' p'' \end{array}\right\}\int\frac{x^3}{r^x} \left.\begin{array}{l} +\alpha q' q'' \\ +\alpha' q q'' \\ +\alpha'' q q' \\ -p p' q'' \\ -p p'' q' \\ -p' p'' q \end{array}\right\}\int\frac{x^4}{r^x}$$

$$\left.\begin{array}{l} -p q' q'' \\ -p' q q'' \\ -p'' q q' \end{array}\right\}\int\frac{x^5}{r^x} - q q' q'' \int\frac{x^6}{r^x}$$

Die Coefficienten sind die Theile des Products

$(\alpha - p - q)\,(\alpha' - p' - q')\,(\alpha'' - p'' - q'')$.

Sind

Sind die Coefficienten für $\lambda\,\overline{b\,c}$ vorher ſchon gefunden und in ihrer Ordnung K, L, M, N, O poſitive oder negative, ſo iſt

$$\lambda\,\overline{a\,b\,c} = \alpha K \int \frac{1}{r^x} \left.\begin{array}{l} + \alpha\, L \\ - p\, K \end{array}\right\} \int \frac{x}{r^x} \left.\begin{array}{l} + \alpha\, M \\ - p\, L \\ - q\, K \end{array}\right\} \int \frac{x^2}{r^x}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \alpha\, N \\ - p\, M \\ - q\, L \end{array}\right\} \int \frac{x^3}{r^x} \left.\begin{array}{l} + \alpha\, O \\ - p\, N \\ - q\, M \end{array}\right\} \int \frac{x^4}{r^x}$$

$$\left.\begin{array}{l} - p\, O \\ - q\, N \end{array}\right\} \int \frac{x^5}{r^x} - q\, O \Big] \int \frac{x^6}{r^x}.$$

29.

Wenn $r = 1$ geſetzet wird, ſo hat man den allgemeinen Ausdruck für die *Dauer* des *Zuſammenlebens*. Nur daſs alsdenn noch $\frac{1}{2}$ als die Correction zugeſetzet werden muſs.

Anmerkung. Es iſt ſo mühſam nicht, nach dieſer Formel zu rechnen, vorausgeſetzt, daſs man die nöthigen Hülfstabellen von den Summen ſchon habe. Nur muſs ſie, wie vorerinnert iſt, auf mehrere Stücke beſonders angewandt werden. Sind die Perſonen alle *gleichen* Alters, ſo hat man nur zwey ſolche unterſchiedene Stücke auſser dem für das letzte Jahr, was man vernach-

läſsigen kann. Iſt aber das Alter verſchieden, ſo kann man *fünf* Stücke bekommen, das Letzte mitgerechnet, oder *vier* ohne dieſes, doch auch nicht mehrere. Es ſey $a=20$, $b=30$, $c=40$ Jahre, ſo bekommt man folgende Stücke:

40—41 ··· 65—66	66 ··· 75 — 76	
30—31 ··· 55—55	56 ··· 65 — 66	
20—21 ··· 45—46	46 ··· 55 — 56	
$x=26$		
$\alpha=1=\alpha'=\alpha''$	$x=10$	
76 ···· 85 — 86	86 ··· 95 — 96	96—97
66 ···· 75 — 76	76 ··· 85 — 86	86—87
56 ···· 65 — 66	66 ··· 75 — 76	76—77
$x=10$	$x=10$	$x=1$

Nun muſs auch jedes benannte Stück discontirt werden auf das Anfangsjahr des erſten Stücks zurück. In dem vorhergehenden Exempel wird das *zweyte* Stück mit $\frac{1}{r^{26}}$ zu multipliciren ſeyn, und das *dritte* mit $\frac{1}{r^{36}}$; das *vierte* mit $\frac{1}{r^{46}}$; das *letzte* mit $\frac{1}{r^{56}}$. Dieſer letzten Arbeit kann man aber dadurch entgehen, daſs man die Wehrte von α, α', α'' und p, p', p'', q, q', q'' ſtatt durch die Diviſion mit A, B, C, durch die mit den gehörig discontirten A, B, C ſucht.

30. *Zu*

30.

Zu §. *158.*

$$\text{Es ist } \lambda\,\overline{abc} = \frac{1}{ABC}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B\ \overset{1}{-}C}{r} ++\right)$$

$$= \frac{1}{A.B.C}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}B\overset{1}{-}C}{r}(A-\Delta A)+\frac{\overset{2}{-}B\overset{2}{-}C}{r^2}(A-2\,\Delta A)\right.$$

$$\left. ++\ \frac{\overset{x}{-}B\ \overset{x}{-}C}{r^x}\cdot(A-x.\Delta A)\right).$$

$$= \frac{1}{B.C}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}B.\ \overset{1}{-}C}{r}+\frac{\overset{2}{-}B\ \overset{2}{-}C}{r^2}++\frac{\overset{x}{-}B\ \overset{x}{-}C}{r^x}\right)$$

$$-\frac{\Delta A}{A.B.C}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{r}+2\,\frac{\overset{2}{-}B.\ \overset{2}{-}A}{r^2}++x\,\frac{\overset{x}{-}B\ \overset{x}{-}C}{r^x}\right)$$

$$= \lambda\,\overline{bc} - \frac{\Delta A}{A}\cdot L\,\overline{bc} = \lambda\,\overline{bc} - \frac{1}{\alpha}L\,\overline{bc}.$$

Setzet man zu dreyen die *vierte* Person hinzu, so ist

$$\lambda\,\overline{abcd} = \frac{1}{ABCD}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B\ \overset{1}{-}C\ \overset{1}{-}D}{r}++\right)$$

$$= \frac{1}{ABCD}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}B\overset{1}{-}C\overset{1}{-}D}{r}(A-\Delta A)++\frac{\overset{x}{-}B\overset{x}{-}C\overset{x}{-}D(A-x\Delta A)}{r^x}\right)$$

$$= \lambda\,\overline{bcd} - \frac{\Delta A}{A}\cdot L\,\overline{bcd} = \lambda\,\overline{bcd} - \frac{1}{\alpha}\,L\,\overline{bcd}.$$

und so ferner für mehrere Personen.

31.

Nach der Hypothese vom *gleichförmigen Absterben* ist überhaupt der Ausdruck für die Verbindungsrente

 mehrerer

mehrerer Personen weniger zusammengesetzt. Bey *jährlichen* Renten hat man folgende:

Das *Alter* der Personen sey *a*, *b*, *c* und die *Altersergänzung*, α, β, γ; so ist

$$\lambda\overline{abc} = \int\frac{1}{r^\gamma} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{\gamma}{r^\gamma}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)\int\frac{\gamma^2}{r^\gamma} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\cdot\int\frac{\gamma^3}{r^\gamma}.$$

Die Summe aller $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ sey *m*, die *Summe der Producte* aus jedem *Paare* dieser Zahlen, *n*, und das Product aus jeden *dreyen* sey *q*, so ist

$$\lambda\overline{abc} = \int\frac{1}{r^\gamma} - m\int\frac{\gamma}{r^\gamma} + n\int\frac{\gamma^2}{r^\gamma} - q\int\frac{\gamma^3}{r^\gamma}.$$

32.

Zusatz. Für vier und mehrere Personen sey überhaupt die *Summe* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}$ das ist, der Brüche, deren Zähler 1, der Nenner die Altersergänzung ist, *m; die Summe der Producte* aus jeden zween dieser Brüche $= n$; die Summe der Producte aus jeden *dreyen* $= q$; aus jeden *vieren t*; u. s. f. aus jeden *k*, *'k*, so wird die Altersergänzung der ältesten Person aus ihnen $= \varepsilon$ gesetzt, für *k* Personen.

$$+\lambda\overline{abcd\ldots k} = \int\frac{1}{r^\varepsilon} - m\int\frac{\varepsilon}{r^\varepsilon} + n\int\frac{\varepsilon^2}{r^\varepsilon}$$

$$- q\int\frac{\varepsilon^3}{r^\varepsilon} + - k\int\frac{\varepsilon^k}{r^\varepsilon}.$$

Sind sie alle am Alter *gleich*, so ist $\alpha = \beta = \gamma = \delta$; und

$$\lambda\overline{a\,a\ldots} = \int\frac{1}{r^{\varepsilon}} - \frac{k}{\varepsilon}\int\frac{\varepsilon}{r^{\varepsilon}} + \frac{k}{\varepsilon^2}\int\frac{\varepsilon^2}{r^{\varepsilon}}$$

$$- \frac{k}{\varepsilon^3}\int\frac{\varepsilon^3}{r^{\varepsilon}} + - + -$$

33.

Die allgemeine Formel bey *augenblicklichen Renten* ist folgende: Es ist

$$\lambda\overline{a\,b\,c\ldots} = \int\left(\frac{(A - x\Delta A)\,(B - x\Delta B)\,(C - x\Delta C)}{A \qquad\qquad B \qquad\qquad C}\ldots\right)\frac{dx}{r^x}$$

$$= \int\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)\ldots\Big)\frac{dx}{r^x}$$

$$= \int\frac{dx}{r^x} - m\int\frac{x\,dx}{r^x} + n\int\frac{x^2\,dx}{r^x} - q\int\frac{x^3\,dx}{r^x} + - + -$$

Wird nun $p = \frac{1}{\log.\,\text{nat.}\; r}$, so ist

$$\lambda\overline{a\,b\,c\ldots} = p\left(1 - \frac{1}{r^x}\right) - m\left(p^2 - \frac{p}{r^x}(x + p)\right)$$

$$+ n\left(2\,p^3 - \frac{p}{r^x}(x^2 + 2\,p\,x + 2\,p^2)\right)$$

$$- q\left(6\,p^4 - \frac{p}{r^x}(x^3 + 3\,p\,x^2 + 6\,p^2\,x + 6\,p^3)\right)$$

$$= p\left(1 - m\,p + 2\,n\,p^2 - 3.\,2\,q\,p^3 + -\right)$$

$$- \frac{p}{r^x}\left(1 - m\,x + n\,x^2 - q\,x^3 + -\right)$$

$$+ \frac{p^2}{r^x}\left(m - 2\,n\,x + 3\,q\,x^2 - +\right)$$

—

$$- \frac{p^3}{r^x} \left(2n - 3mqx + -\right)$$

$$+ \frac{p^4}{r^x} \left(3.2.q - +\right)$$

wo anstatt x, die Altersergänzung der ältesten Person gesetzet werden muss.

34.

Sind wiederum die Personen alle von gleichem Alter, so ist $\lambda\,\overline{a\,a\,a\,..} = \int \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)^k \cdot \frac{dx}{r^x}$, wenn die Zahl der Personen k ist. Diese Formel wird kürzer. Man setze $\varepsilon - x = z$, so ist $- dx = dz$; $r^x = \frac{r^\varepsilon}{r^z}$, daher

$$\int \left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon}\right)^k \cdot dx = - \frac{1}{\varepsilon^k\, r^\varepsilon} \int z^k . r^z\, dz, \text{ oder}$$

$$\left(\frac{1}{r} = t \text{ gesetzt}\right) = - \frac{1}{\varepsilon^k\, r^\varepsilon} \int \frac{z^k\, dz}{t^z}, \text{ und weil}$$

$$\frac{1}{\log. t} = \frac{1}{\log. \frac{1}{r}} = - p, \text{ so ist}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon} \cdot \int \frac{z^k dz}{t^z} = - \frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon}\, p r^z \,(z^k - k z^{k-1} p + k.\overline{k-1}.\, z^{k-2} p^2 - + \mp k.\overline{k-1 \ldots} p^k) + C.$$

Diess Integral muss aber zu nichts werden, wenn $x = 0$, das ist, wenn $z = \varepsilon$ ist. Folglich ist es vollständig gemacht,

$$= + \frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon} \cdot p r^\varepsilon\, (\varepsilon^k - k q^{k-1} p + k.\overline{k-1}.\, q^{k-2} p^2,$$

$$- + \mp k.\overline{k-1 \ldots} p^k)$$

—

$$-\frac{1}{\varepsilon^k . r^\varepsilon} \cdot pr^2 (k - kz^{k-1} p + k.\overline{k-1}. z^{k-2} p^2$$

$$-+ + k.\ k-1\ ..\ p^k).$$

Diefs Integral fo genommen, dafs $x = \varepsilon$, alfo $z = 0$ ift, giebt

$$\lambda \overline{aaa....}_1 = p \left(1 - \frac{k p}{\varepsilon} + \frac{k.\overline{k-1}.p^2}{\varepsilon^2}\right.$$

$$- k.\overline{k-1}.\overline{k-2}.\frac{p^3}{\varepsilon^3} + - \pm k\overline{k-1} \dots \frac{p^k}{\varepsilon^k}$$

$$\left.\mp \frac{k.\overline{k-1}.\overline{k-2} \dots p^{x-1}}{\varepsilon^k\ r^\varepsilon}\right) =$$

$$p - \frac{kp^2}{\varepsilon} + k.k-1.\frac{p^3}{\varepsilon^2} - \pm k.\overline{k-1} \dots \frac{p^k}{\varepsilon^{k-1}}$$

$\pm k.\overline{k-1} \dots \frac{p^k}{\varepsilon^k} p \left(1 - \frac{1}{r^\varepsilon}\right)$ Die letzten Theile find *pofitiv* oder *negativ*, nachdem *k* eine gerade oder ungerade Zahl ift.

35.

Man fuche auch den Wehrt von $L\overline{abc}$. Diefer wird fo gefunden. Es ift

$$\lambda \overline{abc} = \int \frac{dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \int \frac{x\,dx}{r^x}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right) \int \frac{x^2 dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \int \frac{x^3\,dx}{r^x}, \text{ und}$$

$$L\overline{ab} = \int \frac{x\,dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \int \frac{x^2\,dx}{r^x}$$

+

$$+ \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\int\frac{x^3\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{x^4\,dx}{r^x}$$

$$= p\int\frac{dx}{r^x} - \frac{px}{r^x}$$

$$- 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) p\int\frac{x\,dx}{r^x} + \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\frac{px^2}{r^x}$$

$$+ 3\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right) p\int\frac{x^2\,dx}{r^x} - \left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right)\frac{px^3}{r^x}$$

$$- \frac{4}{\alpha\beta\gamma}\int\frac{x^3\,dx}{r^x} + \frac{px^4}{\alpha\beta\gamma . r^x}.$$

Nach der Integration wird $x = \gamma$, wenn c das älteste Leben, und γ die Alterergänzung desselben ist. Alsdenn ist

$$- \frac{px}{r^x} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\frac{px^2}{r^x}$$

$$- \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)\frac{px^3}{r^x} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\frac{px^4}{r^x} = 0.$$

Also

$$L\overline{abc} = p\int\frac{dx}{r^x} - 2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) p\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

$$+ 3\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\right) p\int\frac{x^2\,dx}{r^x} - \frac{4}{\alpha\beta\gamma}\, p\int\frac{x^3\,dx}{r^x}$$

$$= 4p.\lambda\overline{abc} - 3p\int\frac{dx}{r^x} + 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) p\int\frac{x\,dx}{r^x}$$

$$- \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right) p\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

$$= p\left(4\lambda\overline{abc} - \int\frac{dx}{r^x} + \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\beta\gamma}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}\right.$$

$$- \int\frac{dx}{r^x} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)\int\frac{x\,dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha\gamma}\int\frac{x^2\,dx}{r^x}$$

—

$$-\int\frac{dx}{r^x}+\frac{1}{\alpha}\int\frac{xdx}{r^x}-\frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2dx}{r^x}+\frac{1}{\beta}\int\frac{xdx}{r^x}\Big)$$

$$=p\Big(4\lambda\overline{abc}-\lambda\overline{bc}-\lambda\overline{ac}-\int\frac{dx}{r^x}$$

$$+\frac{1}{\alpha}\int\frac{xdx}{r^x}+\frac{1}{\beta}\int\frac{xdx}{r^x}-\frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{x^2dx}{r^x}\Big)$$

und weil $\int\frac{xdx}{r^x}=\gamma\int\frac{dx}{r^x}-\gamma.\lambda\overline{c}$, denn $x=\gamma$ nach der Integration; auch

$$\int\frac{x^2dx}{r^x}=\beta\gamma.\lambda bc-\beta\gamma\int\frac{dx}{r^x}+(\gamma+\beta)\int\frac{xdx}{r^x}.$$

so ist $L\overline{abc}=p\Big(4\lambda\overline{abc}-\Big(1+\frac{\gamma}{\alpha}\Big)\lambda\overline{bc}-\lambda\overline{ac}$

$$-\frac{\gamma}{\beta}\Big(1-\frac{\gamma}{\alpha}\Big)\lambda\overline{c}-\Big(1-\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\gamma\gamma}{\alpha\beta}\Big)\int\frac{dx}{r^x}\Big).$$

36.

Wenn $a=b=c$, also auch $\alpha=\beta=\gamma$, so wird $L\overline{aaa}=4p\lambda\overline{aaa}-3p\lambda\overline{aa}$.

Auch weiter $L\overline{aaaa}=5p\lambda\overline{aaaa}-4\lambda\overline{aaa}$. und überhaupt wenn n die Zahl der Personen ist $L\overline{a^n}=(n+1)p\lambda\overline{a^n}-np\lambda\overline{a^{n-1}}$.

37.

Daraus ergiebt sich ein anderer Ausdruck für den Wehrt von $\lambda\overline{a^n}$, das ist von der *Verbindungsrente* mehrerer (n) Personen von gleichem Alter a. Weil nämlich überhaupt $\lambda\overline{a^n}=\lambda\overline{a^{n-1}}-\frac{1}{\alpha}L.\overline{a^{n-1}}$, und

$L\overline{a^{n-1}}$

$L\overline{a^{n-1}} = n\, p\, \lambda\overline{a^{n-1}} - (n-1)\, p .\, \lambda\overline{a^{n-2}}$, so ist

$$\lambda\overline{a^{n}} = \left(1 - \frac{n p}{\alpha}\right)\lambda\overline{a^{n-1}} + (n-1)\frac{p}{\alpha}\cdot\lambda\overline{a^{n-2}}$$

So wird jede höhere Verbindungsrente aus der niedern gemacht. Zugleich ist $L\overline{a^{n-n}} = \lambda\overline{a^{\circ}}$, das ist die *Zeitrente* $\int\frac{d x}{r^{\alpha}}$. Doch zu diesem Zweck findet man noch einen bequemern Ausdruck auf folgende Art:

Es ist $\lambda\overline{a^{2}} = \left(1 - \frac{2 p}{\alpha}\right)\lambda\overline{a} + \frac{p}{\alpha}\cdot\int\frac{d x}{r^{\alpha}}$ (§. 15).

Auch ist $p = \lambda\overline{a} + \frac{p}{\alpha}\int\frac{d x}{r^{\alpha}}$ (§. 15. *Zusätze* zu dem zweyten Capitel.) Folglich $\lambda\overline{a^{2}} = p - \frac{2 p}{\alpha}\lambda\overline{a}$.

Weiter $\lambda\overline{a^{3}} = \left(1 - \frac{3 p}{\alpha}\right)\lambda\overline{a^{2}} + \frac{2 p}{\alpha}\lambda\overline{a}$

$$= p - \frac{3 p}{\alpha}\lambda\overline{a^{2}}.$$

Auch $\lambda\overline{a^{4}} = \left(1 - \frac{4 p}{\alpha}\right)\lambda\overline{a^{3}} + \frac{3 p}{\alpha}\lambda\overline{a^{2}}$

$$= p - \frac{4 p}{\alpha}\lambda\overline{a^{3}}$$

und überhaupt $\lambda\overline{a^{n}} = p - \frac{n p}{\alpha}\lambda\overline{a^{n-1}}$.

Zusatz. Auch folgt hieraus der allgemeine Ausdruck für $L\overline{a^{n}}$, Es ist nämlich

$$p - \frac{(n+1) p}{\alpha}\lambda\overline{a^{n}} = \lambda\overline{a^{n+1}} = \lambda\overline{a^{n}} - \frac{1}{\alpha} L\overline{a^{n}}.$$

Folglich $L\overline{a^{n}} = (\alpha + (n+1) p)\, \lambda\overline{a^{n}} - \alpha p$.

Diese

Diese Formeln sind, wie man sieht, ausserordentlich bequem, wenn höhere Renten aus den niedern genommen werden. Wird für jede höhere die niedere bis auf die Zeitrente hin substituirt, so bekommt man einen Ausdruck für $\lambda \overline{a^n}$, der keine andere veränderliche Grösse enthält als die Zeitrente $\int \frac{dx}{r^u}$ und dem in §. 34. ähnlich wird.

38.

Die Methode *zwey gegebene Leben zusammen zu bringen auf Eins, und damit ein drittes zu verbinden und dann die Verbindungsdauer der dritten und des gefundenen mittlern Lebens für die Verbindungsdauer aller drey anzunehmen*, ist die leichteste, die man wünschen kann, um die Grösse dieser Dauer bey der Verbindung mehrerer Personen zu bestimmen. Die Frage ist nur, wie weit diess Verfahren von der genauen Rechnung abweiche. Diess kann bey der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* leicht gefunden werden.

Es sey wiederum

für das Alter *a* die Altersergänzung α

— — — *b* — — — — β

— — — *c* — — — — γ

und *a* sey das *jüngste*, *c* das *älteste*, so ist, wenn *b* und *c* verbunden sind, $C\overline{bc} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$ (§. 4.) $= C\overline{m}$, wenn *m das Alter des mittlern Lebens* ausdrückt.

Die Altersergänzung des letztern sey μ, so ist $\mu = 2.\ C\overline{bc} = 2\ E\overline{m}.$

Wird nun das Alter *a* mit *m* verbunden, so hat man

$$C\overline{am} = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{6\alpha} = \frac{\mu}{2} - \frac{4(E\overline{m})^2}{6\alpha} = C\overline{bc} - \frac{4(E\overline{m})^2}{6\alpha}$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{1}{6\alpha} \cdot \left(\gamma^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\gamma^3}{\beta} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\gamma^4}{\beta^2}\right)$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \gamma^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} - \frac{1}{54} \cdot \frac{\gamma^4}{\alpha\beta^2}.$$

Diess wird für $C\overline{abc}$ angenommen.

Sucht man $C\overline{abc}$ nach eben der Hypothese unmittelbar, so ist

$$C\overline{abc} = \int\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) dx$$

$$= \int dx - \left(\frac{1}{\alpha} \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \int x\, dx$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right) \cdot \int x^2 dx - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \int x^3 dx,$$

das ist, wenn nach der Integration die kleinste Altersergänzung für *x* gesetzt ist,

$$C\overline{abc} = \gamma - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\gamma^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right) \frac{\gamma^3}{3} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \frac{\gamma^4}{4}.$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{3}$$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma^2}{3} - \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{4}$$

$$= \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\gamma^2 + \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{12}.$$

Also

Alſo iſt der *Ueberſchuſs des wahren Wehrts über den durch jene Methode gefundenen*, oder $C\overline{abc} - C\overline{am}$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\gamma^3}{12} - \frac{1}{9} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} + \frac{1}{54} \cdot \frac{\gamma^4}{\alpha\beta^2}$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{2}\right).$$

Dieſs iſt die Abweichung, die als Correction zu dem Wehrt $C\overline{am}$ *zugeleget*, oder da $\frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\beta}$ immer kleiner, als $\frac{1}{3}$, weil γ kleiner als β, alſo $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1}{2}\right)$ *negativ* iſt, mit dem entgegengeſetzten Zeichen davon *abgezogen* werden muſs. Daher iſt $C\overline{abc} = C\overline{am}$ $- \frac{1}{18} \cdot \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\beta}\right)$. Auch iſt dieſe Correction ein eigentlicher Bruch, wenn nicht γ gröſſer iſt als 36.

Da auch $\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} = C\overline{bc} = C\overline{m} = \frac{\mu}{2}$ iſt, ſo wird $C\overline{am} - C\overline{abc} = \frac{1}{18} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} \cdot$

$$\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta} - \frac{\gamma^2}{6\beta}\right) = \frac{\gamma^2}{18\alpha\beta} \cdot \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}\right).$$

Dieſe Differenz kann in keinem Fall verſchwinden. Denn es iſt $\frac{\mu}{2} = C\overline{m} = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{6\beta}$. Es müſste alſo $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\beta} = 0$ werden können, was nicht angeht, weil γ jederzeit kleiner, oder doch nicht gröſser als 6 iſt.

Um die Formel für die Differenz noch leichter zu haben bey mehreren Personen, kann man folgender Methode nachgehen.

Es ist die mittlere *Verbindungsdauer* für zwo Personen nach der Hypothese, $C_{\overline{ab}}$

$$= \int. dx - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \int. x\,dx + \frac{1}{\alpha\beta} \int. x^2\,dx,$$

$$= \int. dx - \frac{1}{\beta} \int. x\,dx - \frac{1}{\alpha}\left(\int. x\,dx - \frac{1}{\beta} \int. x^2 dx\right)$$

$$= E_{\overline{b}} - \frac{1}{\alpha}\left(S. x\,dx - \frac{1}{\beta}\, S. x^2\,dx\right).$$

Der zweyte Factor des letzten Theils ist eben der Ausdruck, welchen $E_{\overline{b}}$ giebt, (oder die *mittlere Dauer* eines einfachen Lebens) wenn jeder Theil mit x multiplicirt wird.

Es bezeichne demnach $E'_{\overline{b}}$ eine solche Grösse, die durch die Reihe für $E_{\overline{b}}$ gegeben wird, wenn jedes Glied derselben mit der Zahl des Gliedes multiplicirt wird, auf dieselbe Art, wie $L_{\overline{a}}$ aus $\lambda_{\overline{a}}$ wird. Auch sey ferner $K_{\overline{ab}}$ auf dieselbe Art entstanden aus $C_{\overline{ab}}$, und $K_{\overline{abc}}$ aus $C_{\overline{abc}}$.

Alsdenn ist $C_{\overline{ab}} = E_{\overline{b}} - \frac{1}{\alpha} E'_{\overline{b}}$.

Auch $C_{\overline{abc}} = \int dx - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \int x\,dx$

$$+ \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right) \int x^2 dx - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \cdot \int x^3 dx,$$

=

$$= C\overline{bc} - \frac{1}{\alpha}\left(\int x\,dx - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\int x^2 dx\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta\gamma}\int x^3 dx\right) = C\overline{bc} - \frac{1}{\alpha} K\overline{bc}.$$

und so weiter fort.

$$C\overline{abcd}\ldots = C(bcd\ldots) - \frac{1}{\alpha} K\overline{bcd}\ldots$$

Nun ist überdiess

$$E'\overline{c} = \int x\,dx - \frac{1}{\gamma}\int x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{6}x^2$$

wo nach der Integration $x = \gamma$ wird.

Eben so

$$K\overline{bc} = \int x\,dx - \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\int x^2 dx + \frac{1}{\beta\gamma}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{\gamma^3}{3\beta} - \frac{1}{3}\gamma^2 + \frac{1}{4}\frac{\gamma^3}{\beta}$$

$$= \frac{1}{6}\gamma^2 - \frac{1}{12}\frac{\gamma^3}{\beta}.$$

Daher $C\overline{abc} = C\,bc - \frac{1}{\alpha} K\overline{bc}.$

Wenn statt *b* und *c* ein mittleres Leben genommen wird, vom Alter *m*, so dass $E\overline{m} = C\overline{bc} = \frac{\mu}{2}$, so ist wiederum $C\overline{am} = E\overline{m} - \frac{1}{\alpha} E'\overline{m}.$

Folglich ist die Differenz

$$C\overline{abc} - C\overline{am} = \frac{1}{\alpha}(E'\overline{m} - K\overline{bc})$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\mu^2}{6} - \left(\frac{1}{6}\gamma^2 - \frac{1}{12}\cdot\frac{\gamma^3}{\beta}\right)\right)$$

=

$= \frac{1}{6\alpha}\left(-\frac{\gamma^3}{6\beta}+\frac{\gamma^4}{9\beta^2}\right)$, $\left(\text{weil } \mu=\gamma-\frac{\gamma^2}{3\beta}\right)$,

also $= \frac{\gamma^3}{18\alpha\beta}\cdot\left(\frac{\gamma}{3\beta}-\frac{1}{2}\right)$,

und $C\overline{am} - C\overline{abc} = \frac{\gamma^2}{18\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\gamma^2}{6\beta}\right)$.

wie vorher.

39.

Weil $\frac{\gamma^2}{6\beta}=\frac{\gamma}{2}-\frac{\mu}{2}$, so ist auch die vorige Differenz $C\overline{am} - C\overline{abc}$

$= \frac{1}{3\alpha}\cdot\frac{(\gamma-\mu)}{2}\cdot\left(\mu-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{\gamma-\mu}{2}\right)\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\gamma-\mu}{2}\right)$.

Das ist, die halbe Differenz der Altersergänzungen γ und μ multiplicirt in die halbe Differenz von μ und jener halben Differenz macht den Factor aus, der mit $\frac{1}{3\alpha}$ multiplicirt, *die Grösse der Abweichung* giebt.

Wenn das Alter der beyden ältesten Personen B und C dasselbe bleibet, also auch β, γ, μ, dieselbigen Grösseu sind, so verhalten sich die Abweichungen *umgekehrt*, wie α, das ist, *wie die Altersergänzungen* der dritten verbundenen Person.

Sind die beyden ältesten Personen am Alter gleich, so ist $\gamma=\beta$, und $\mu=\frac{2}{3}\beta$. Also $C\overline{am} - C\overline{abc} = \frac{\beta^2}{108\alpha}$.

40.

Anmerkung. Es ist nicht nothwendig, die beyden ältesten Leben zuerst zu verbinden, aber es wird vorausgesetzt, daſs die *Altersergänzung* des *gefundenen mittlern Lebens* kleiner sey, als sie für das *dritte* Leben ist, was mit dem mittleren wiederum verbunden werden soll. Nimmt man die beyden ältesten zuerst, so verfehlt man diess nicht.

41.

Wenn diese Zusammensetzung der mittlern Lebensdauer weiter auf mehrere Personen fortgesetzet wird, so kann die Abweichung bey den folgenden höhern Verbindungen etwas gröſser werden. Z. B. für vier Personen von gleichem Alter ist $C\overline{aaaa} = \frac{1}{5}\alpha$, und $C\overline{aaa} = \frac{1}{4}\alpha$. Dieſs sind die genauen Wehrte. Denn es ist überhaupt die *Verbindungsdauer für n Personen von gleichem Alter* $= \frac{S(\alpha - x)^n\, dx}{\alpha^n}$, nach der Hypothese vom gleichförmigen Sterben.

Dieſs ist $= -\frac{(\alpha - x)^{n+1}}{(n+1)\alpha^n} + C.$

weil das Integral verschwinden muſs, wenn $x = 0$, so ist die beständige Gröſse $C = \frac{\alpha^{n+1}}{(n\quad 1)\alpha^n} = \frac{1}{n+1}\cdot\alpha.$

Folglich $C\overline{a^n} = \frac{1}{n+1}\cdot\alpha - \frac{(\alpha - x)^{n+1}}{(n+1)\alpha^n}$, das ist, wenn $x = \alpha$, $C\overline{a^n} = \frac{\alpha}{n+1}$; Sucht man aber den

Wehrt von $C\overline{a^3}$ nach der vorigen Methode, so bekommt man

$$\frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{108}\alpha\ (\S.\ 39.) = \frac{28}{108}\alpha = \frac{7}{27}\alpha.$$

Und wenn nun wiederum dieser für die Dauer des *mittlern Lebens* angenommen, und daraus $C\overline{am}$ gesucht wird, so erhält man

$$C\overline{a^4} = \frac{7}{27}\alpha - \frac{(\frac{14}{27}\alpha)^2}{6.\ \alpha},$$

$$= \frac{7}{27}\alpha\left(1 - \frac{2.\ 14}{27.\ 6}\right) = 0,\ 214.\ \alpha.$$

Der wahre Wehrt ist 0, 2. α, also die Differenz 0, 014. α das ist, mehr als in dem vorhergehenden Beyspiel, in §. 39.

Dagegen aber wird die *Abweichung geringer werden, wenn vorher jedesmal der gefundene Wehrt bey den niedern Verbindungen corrigirt ist.* Wenn in dem letzten Exempel $\mu = C\overline{a\ a\ a}$ genommen wird, wie es genau ist, oder nach seinem corrigirten Wehrt §. 39. nämlich $= \frac{1}{4}\alpha$, so wird $C\overline{am} = \frac{1}{4}\alpha$ $- \frac{(\frac{1}{2}\alpha)^2}{6\alpha} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)\alpha = \frac{5}{24}\alpha$. Diess ist von dem genauen Wehrt $\frac{1}{5}\alpha$ nur um $\frac{1}{120}\alpha$, das ist weniger als vorher in §. 39. unterschieden.

42.

Bey einer andern Sterblichkeitstafel ist auch die Abweichung anders. Sie ist nach *Süssmilchs* Tafel in

keinem

keinem der berechneten Beyspiele so groſs gefunden, als nach der vorigen Hypothese.

Im Allgemeinen läſst sich ihre Gröſse nicht bestimmen, da sie von der Natur der krummen Linie abhängt, die man als die Sterblichkeitslinie nach den Tabellen annehmen muſs.

Es sey *in jedem System* überhaupt die *Anfangszahl* für das *jüngste* Leben y, für das *nächstältere* y'; für das *älteste* y'', und für *das einfache Mittelleben*, z. Diese Zahlen sind die *Ordinaten* der Curve, wozu die Absciſsen x gehören, die man von dem Durchschnittspunct beym höchsten Lebensziel an, nehmen kann.

Die *Verbindungsdauer der beyden ältern Leben* ist $\frac{Sy'y''dx}{y'y''}$.

Die *gleiche Dauer des mittlern Lebens* ist $\frac{Szdx}{z}$.

Also $\frac{Sy'y''dx}{y'y''} = \frac{Szdx}{z}$.

Verbindet man das *dritte* gegebene *jüngste* Leben mit dem *mittlern*, so ist die Verbindungsdauer $= \frac{Syzdx}{yz}$. Dieſs ist die durch die Approximationsmethode gefundene Verbindungsdaner aller dreyen.

Die letztere genau berechnet ist $= \frac{Syy'y''dx}{yy'y''}$.

Die Abweichung also (D)

$$= \frac{Syzdx}{yz} - \frac{Syy'y''dx}{yy'y''}.$$

Es ist auch $\frac{Syzdx}{yx} = \frac{y\int zdx}{yz} - \frac{\overline{Sdy.\int zdx}}{yz}$

und $\frac{Syy'y''dx}{yy'y''} = \frac{y\int y'y''dx}{yy'y''} - \frac{\overline{Sdy.\int y'y''dx}}{yy'y''}$.

Folglich $D = \frac{\overline{Sdy.\int y'y''dx}}{yy'y''} - \frac{\overline{Sdy.\int zdx}}{yz}$.

Ausser dem Signo Integrali sind y, y′, y″, gegebene Grössen und können als *beständige* angenommen werden; allein nicht, wenn sie unter diesem Signo stehen.

Man setze $\frac{Sy'y''dx}{y'y''} = V$,

das Stück $\frac{\overline{Sdy.\int zdx}}{yz}, = \frac{Szdx}{z} - \frac{Syzdx}{yz}$,

kann als ein bekanntes Stück angesehen werden. Denn $\frac{Szdx}{z}$ ist die Dauer des Mittellebens nach der Tabelle, und $\frac{Syzdx}{yz}$ die durch die Approximationsmethode gefundene Verbindungsdauer aller dreyen. Es sey also $\frac{Syzdx}{yz} = N$, und $\frac{Szdx}{z} = M$, so ist nun

$$D = \frac{SVdy}{y} - \frac{SVzdy}{yz}$$

$$D = \frac{SVdy}{y} - (M-N).$$

So viel ist zunächst klar, wenn V und z in irgend einem System dieselbigen Grössen sind, das ist, wenn die beyden ältern Leben dieselbigen bleiben, so ist D in dem umgekehrten Verhältniss von y, oder wie $\frac{1}{y}$.

In

In der Hypothese vom gleichförmigen Absterben war D in dem umgekehrten Verhältniss der Alterserganzung. §. 39. Das ist da einerley mit dem umgekehrten Verhältniss der Zahl der Lebenden. *Diess ist also etwas allgemeines in jedem System.*

Die Veränderung, welche die Abweichung D annimmt in verschiedenen Systemen, kann nach den Grundsätzen des Calculi Variationum allgemein ausgedruckt werden; allein sie hängt ab von der *Variation* der Ordinaten y.

Wenn man annimmt, dass in den verschiedenen Systemen, V, oder die *Dauer des Mittellebens* für dasselbe gegebene Alter zwoer verbundenen Personen, in einem beständigen Verhältniss stehe, so wird man auch nicht viel fehlen, wenn $\frac{SV\,dy}{y}$ in demselbigen Verhältniss genommen wird. Es sey in einem andern System V′, v, d v, was in dem vorigen V, y, d y ist, so ist $\frac{SV\,dy}{y} : \frac{SV'dv}{v} = V - \frac{Sy\,dv}{y} : V' - \frac{Sv\,dV'}{v} =$

$$V - \frac{Sy\,dv}{y} : n\left(V - \frac{Sv\,dv}{v}\right),$$ das ist 1 : n, wenn $\frac{Sy\,dV}{y}$ für gleich mit $\frac{Sv\,dV}{v}$ angenommen werden kann. Hier sind *v* und *y* ausser dem Signo Integrali einander gleich; nur nicht unter demselben.

Nach dieser Voraussetzung lässt sich die Abweichung für jedes System angeben, wenn man sie nur für das vom gleich-

gleichförmigen Absterben berechnet hat. Denn aus D und M und N findet man $\frac{SVdy}{y}$, und nun statt der letztern Grösse n. $\frac{SVdy}{y}$ genommen, nämlich in dem Verhältniss der Dauer des Mittellebens; und dann noch M und N nach dem System, wornach man rechnet, so hat man die Abweichung nach dem letztern, wodurch der mittelst der Approximationsmethode gefundene Wehrt corrigiret werden kann.

Will man sich noch kürzer abhelfen, so nehme man die ganze Abweichung D, in den verschiedenen Systemen, in dem Verhältniss, V : v. Die Stücke M verhalten sich ohnediess so. Die kleinern Grössen N werden auch nicht viel davon abweichen.

43.

Um dasselbe Verfahren bey den *Verbindungsrenten* anzubringen, suche man die *Abweichung* von dem wahren Wehrt bey Renten. Die Abweichung nämlich, die *durch die Substitution einer einfachen mittlern Leibrente statt einer Verbindungsrente für zwey Leben* entsteht, wenn man für drey Personen die Verbindungsrente sucht. Zuerst suche man selbige nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben.

Es

Es sey wiederum

das Alter der jüngsten Person *a* die Altersergänzung α
— — — zwoten — *b* — — — — β
— — — ältesten — *c* — — — — γ

so ist nach dem Gesetz vom gleichförmigen Absterben
$\lambda\overline{abc} = \lambda\overline{bc} - \frac{1}{\alpha} L\overline{bc}$ (§. 13. 14.) Man nehme
$\lambda\overline{bc} = \lambda\overline{m}$, das ist, die Rente der Verbindung von *b* und *c* sey der einfachen Leibrente gleich, wozu das Alter *m* und die Altersergänzung μ aus den Tabellen gefunden wird. Nun ist auch

$$\lambda\overline{am} = \lambda\overline{m} - \frac{1}{\alpha} L\overline{m} = \lambda\overline{bc} - \frac{1}{\alpha} L\overline{m}.$$

Also ist die Differenz $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abc} = \frac{1}{\alpha}(L\overline{bc} - L\overline{m})$

und weil

$$L\overline{bc} = 3p.\lambda\overline{bc} - \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) p\,\lambda\overline{c} - p\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}}$$

wo *p* das *Grundcapital* für augenblickliche Zinsen, oder
$= \frac{1}{\text{log. nat. r}}$ ist, auch $L\overline{m} = 2\,p\,\lambda\overline{m} - p\int\frac{dx}{r^{\mu}}$.
(*Zusätze* zu Cap. II. §. 23.) so wird

$$\frac{1}{\alpha}(L\overline{bc} - L\overline{m}) = \frac{1}{\alpha}\left(p\lambda\overline{m} - \left(p + p\frac{\gamma}{\beta}\right)\lambda\overline{c}\right.$$
$$\left. - \left(p - \frac{p\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}} + p\int\frac{dx}{r^{\mu}}\right) = \frac{p}{\alpha}\left(\lambda\overline{m} + \int\frac{dx}{r^{\mu}} - \right.$$
$$\left.\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right)\lambda\overline{c} - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\int\frac{dx}{r^{\gamma}}\right).$$ Diess ist die *Correction, welche* von $\lambda\overline{am}$ *abgezogen werden muss*, um *den genauen Wehrt von* $\lambda\overline{abc}$ zu erhalten.

44. Ist

44.

Ist $b = c$, also $\beta = \gamma$, das ist, sind die zwo ältesten der gegebenen Personen von gleichem Alter, so ist

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abc} = \frac{p}{\alpha}\left(\lambda\overline{m} + \int\frac{dx}{r^{m}} - 2\,\lambda\overline{c}\right)$$

und weil nun auch $\left(1 - \frac{\lambda\overline{m}}{p}\right)\mu = \int\frac{dx}{r^{\mu}}$ (§. 19.)

$= \left(1 - \frac{\lambda\overline{cc}}{p}\right)\mu$, so wird $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{acc}$

$= \frac{1}{\alpha}\left(p.\,\lambda\overline{cc} - 2\,p\,\lambda\overline{c} + p\,\mu - \mu\,\lambda\overline{cc}\right)$

Diese Differenz würde ganz verschwinden, wenn $\mu = p\,\frac{(2\,\lambda\overline{c} - \lambda\overline{cc})}{p - \lambda\overline{cc}}$. Ist also μ dieser letztern Grösse nicht gleich, so sey $p\,\frac{(2\,\lambda\overline{c} - \lambda\overline{cc})}{p - \lambda\overline{cc}} = \mu - d$, so wird $d.\,\frac{(p - \lambda\overline{cc})}{\alpha} = \lambda\overline{am} - \lambda\overline{abc}$ die Correction, welche von dem gefundenen Wehrt $\lambda\overline{am}$ nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben abzuziehen ist, um den genauen Wehrt $\lambda\overline{abc}$ zu erhalten.

45.

Die Abweichung bey *vier* Personen ergiebt sich auf folgende Art. Es ist $\lambda\overline{abcd} = \lambda\overline{bcd} - \frac{1}{\alpha}\,L\overline{bcd}$.

Nun sey $\lambda\overline{bcd} = \lambda\overline{m}$, wo $\lambda\overline{m}$ die *einfache* Rente für das Alter *m* ist, welche der *Verbindungsrente für drey* gleich ist. Es wird vorausgesetzet, dass $\lambda\overline{bcd}$ völlig genau genommen sey. Ist sie durch Abkürzung gesucht,

so

so muss sie nach der obigen Anweisung vorher corrigiret werden.

Alsdenn ist $\lambda\overline{am} = \lambda m - \frac{1}{\alpha} L\overline{m}$. Daher die Differenz $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abcd} = \frac{1}{\alpha}(L\overline{bcd} - L\overline{m})$.

Es ist aber $L\overline{bcd} = p\left(4\lambda\overline{bcd} - \left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda\overline{cd} - \lambda\overline{bd} - \frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda\overline{d} - \left(1-\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\delta}{\beta}+\frac{\delta\delta}{\beta\gamma}\right)\int\frac{dx}{r^x}\right)$, nach §. 35, wenn in dem dortigen Ausdruck *d*, *c*, *b*, statt *c*, *b*, *a*, und δ, γ, β, statt γ, β, α, geschrieben wird.

Weiter ist $L\overline{m} = 2p.\lambda\overline{m} - p\int\frac{dx}{r^x}$ (*Zusätze* zu Cap. II. §. 23.), und $p\int\frac{dx}{r^x} = (p - \lambda\overline{m})\mu$. (*Zus.* zu Cap. II. §. 17.). Daher, weil auch $\lambda\overline{m} = \lambda\overline{bcd}$,

$$\frac{L\overline{bcd} - L\overline{m}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(2p\lambda\overline{m} + p\mu - \mu\lambda\overline{m} - p.\lambda\overline{bd} - p\left(1+\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda cd - p\frac{\delta}{\gamma}\left(1-\frac{\delta}{\beta}\right)\lambda\overline{d} - \left(1-\frac{\delta}{\beta}-\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\delta\delta}{\beta\gamma}\right)p\int\frac{dx}{r^x}\right).$$

Der Kürze wegen setze man $1 - \frac{\delta}{\beta} = g$, und $1 - \frac{\delta}{\gamma} = h$, so wird

$$\frac{L\overline{bcd} - L\overline{m}}{\alpha} = \frac{p}{\alpha}\left(2\lambda\overline{m} - \lambda\overline{bd} - (2-g)\lambda\overline{cd} - (1-h)g\lambda\overline{d} - gh\int\frac{dx}{r^x}\right) + \frac{\mu}{\alpha}(p - \lambda\overline{m}).$$

Es ist aber $\int\frac{dx}{r^x}$ die *augenblickliche Zeitrente auf die Alterser gänzung* δ, *der ältesten Person* nämlich, da nach

der

der Integration $x = \delta$ wird, und daher dann
$\int \frac{dx}{r^x} = \delta - \frac{\lambda \overline{d}}{p}$, und

$$\frac{L\overline{bcd} - L\overline{m}}{\alpha} = \frac{p}{\alpha}\Big(2\lambda\overline{m} - \lambda\overline{bd} - (2-g)\lambda\overline{cd} - g\Big(1 - h\big(1 - \frac{1}{p}\big)\Big)\lambda\overline{d} - gh\delta\Big) + \frac{\mu}{\alpha}(p - \lambda\overline{m}).$$

Dafür schreibe man $= -\frac{p}{\alpha} M + \frac{\mu}{\alpha}(p - \lambda\overline{m})$. Diese Differenz verschwindet, wenn $p\,M = \mu\,(p - \lambda\overline{m})$ oder $\frac{p\,M}{p - \lambda\overline{m}} = \mu$. Ist das nun nicht, so sey $\frac{p\,M}{p - \lambda\overline{m}} = \mu - D$. Alsdenn wird $\frac{L\overline{bcd} - L\overline{m}}{\alpha}$, oder $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abcd} = D.\frac{(p - \lambda\overline{m})}{\alpha}$.

46.

Ist $b = c = d$, das ist, sind die drey ältesten Personen *von gleichem Alter*, so ist auch $\beta = \gamma = \delta$, und $g = h = 0$. Folglich die Abweichung $\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abcd}$
$= \frac{p}{\alpha}\Big(\mu - \mu\frac{\lambda\overline{m}}{p} + 2\lambda\overline{m} - 3\lambda\overline{dd}\Big)$.

Ueberhaupt aber, wenn die *ältern* Personen ausser der jüngsten, *alle von gleichem Alter* sind, so ist bey *drey* Personen (nach §. 43.) die Abweichung

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abb} = \frac{p}{\alpha}\Big(\mu - \Big(\frac{\mu}{p} - 1\Big)\lambda\overline{bb} - 2\lambda\overline{b}\Big).$$

Und nun nach dem obigen bey *vier* Personen

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{abbb} = \frac{p}{\alpha}\Big(\mu - \Big(\frac{\mu}{p} - 2\Big)\lambda\overline{bbb} - 3\lambda\overline{bb}\Big).$$

Für

Für *fünf* Personen

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{ab^4} = \frac{p}{\alpha}\left(\mu - \left(\frac{\mu}{p} - 3\right)\lambda\overline{b^4} - 4.\,\lambda\overline{bbb}\right)$$

und überhaupt für *n* Personen

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{ab^{n-1}} = \frac{p}{\alpha}\left(\mu - \left(\frac{\mu}{p} - (n-2)\right)\lambda\overline{b^{n-1}} - (n-1)\,\lambda\overline{b^{n-2}}\right)$$

Denn es ist $\lambda\overline{am} = \lambda\overline{m} - \frac{1}{\alpha}\cdot L\overline{m}$

$$= \lambda\overline{m} - \frac{1}{\alpha}\,(2\,p\,\lambda\overline{m} + \mu\,\lambda\overline{m} - p\,\mu)$$

und $\lambda\overline{ab^{n-1}} = \lambda\overline{b^{n-1}} - \frac{1}{\alpha}\,L\overline{b^{n-1}}$

$$= \lambda\overline{b^{n-1}} - \frac{(p\,n\,\lambda\overline{b^{n-1}} - p\,(n-1)\,\lambda\overline{b^{n-2}})}{\alpha}$$

Da nun $\lambda\overline{m} = \lambda\overline{b^{n-1}}$, so ist

$$\lambda\overline{am} - \lambda\overline{ab^{n-1}} = \frac{p}{\alpha}\left(\mu - \lambda\overline{m}\left(\frac{\mu}{p} - \overline{n-2}\right) - (n-1)\,\lambda\overline{b^{n-2}}\right).$$

Für diese Fälle wird demnach die erforderliche Correction leicht berechnet.

Viertes Capitel.

Vom Ueberleben und den davon abhängenden Anwartſchaften.

Erſter Abſchnitt.

Von der Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens.

166.

Satz 46. Wenn N h (Fig. 3.) das Decrement der Tabellen, oder die Zahl der Sterbenden aus A N Lebenden, während eines Jahrs iſt, und Mm die Zahl der Abſterbenden aus AM während deſſelben Jahrs, und h i, m k parallel mit A M und A N gezogen werden, und nun die anfängliche Zahl der gegebenen Paare durch das Parallelogramm AB vorgeſtellt wird, ſo giebt

1) *Das Parallelogramm N k l h die Zahl der in dem Jahre erfolgten Trennungen, wobey eine Perſon aus A M am Ende deſſelben überlebend iſt.*

2) *Das Parallelogramm M m l i ſtellt die Zahl der Trennungen vor, wobey eine aus A N am Ende des Jahrs überlebend iſt, und*

3) *B k l i die Zahl der in demſelben Jahre gänzlich ausgeſtorbenen Paare.*

Sind

Sind *h* D und *m* H, die Absterbenden für das *nächstfolgende* Jahr, so sind die Parallelogramme D *h r* F, H *m s* F, *r l s* F dasselbe für diess folgende Jahr. *Die Summe der Parallelogramme* jeder Art stellet dieselbigen Zahlen für *alle* Jahre zusammen vor. Es wird aber das ganze Parallelogramm A B für die Zahl aller anfänglichen Paare angesehen.

Beweis. Die Sache ist fast für sich klar aus dem, was oben §. 107. von dem Gebrauche des Parallelogramms gesagt ist. Es sind von A N in dem Lauf des Jahrs, N h gestorben, und es leben noch A h = M *i*. Von' A M sind B *k* gestorben, und es leben noch N *k*. Von jenen N *h* gehören einige zu den Uebriggebliebenen N *k*, und zwar in dem Verhältniss, wie B *k* : N *k*. So viele als von den Gestorbenen N *h* aus der Zahl A N zu B *k* gehören, das ist zu den *Gestorbenen aus A M*, so viel Paare sind in dem Jahre *ganz ausgestorben;* so viel aber von jenen zu den *Uebriggebliebenen aus A M* gehören, so viel sind Paare getrennet, wobey eine Person von den unter A M vorgestellten, die andere mit ihr verbundene, die unter A N gehört, am Ende des Jahrs überlebet hat. Folglich, wenn N die anfängliche Zahl der gegebenen *Paare* ist, (das ist denn auch zugleich die Zahl der Personen, die zu A N, und derer, die zu A M gehören, welche beyde Zahlen einander gleich sind,) so ist A N : N = N *h* : $\frac{Nh.\,N}{AN}$. Diese letztere ist die Zahl der Gestorbenen aus A N. Auch ist

$AM : N = Bk : \frac{N.\,Bk}{AM}$. Dieſs iſt die Zahl der Geſtorbenen aus A M.

Nun ferner $N : \frac{N.\,Bk}{AM} = \frac{Nh.\,N.}{AN} : \frac{Nh.\,Bk}{AM} \cdot \frac{N}{AN}$ die Zahl der in dem *Jahre ganz ausgeſtorbenen Paare.*

Eben ſo iſt $N : \frac{Nk}{AM} \cdot N = \frac{Nh.\,N}{AN} : \frac{Nk.\,Nh}{AN.\,AM} \cdot N$ das iſt die Zahl der *getrennten* Paare, von denen eine Perſon aus A M am Ende des Jahrs überlebet.

Wird nun das Parallelogramm ſelbſt = N geſetzet, ſo iſt $\frac{Nk.\,Nh}{AN.\,AM} \cdot N = Nk.\,Nh.$

Auf dieſelbige Weiſe erhellet, daſs $Mi.Bk$ die *Zahl der Trennungen* ſey, von denen Eine aus A N überlebet. Es verhalten ſich aber die drey Rectangula $Nh.\,Bk$, $Nh.\,Nk$, $Mi.\,Bk$, wie die drey Parallelogramme, Bl, Nl, Ml.

167.

Zuſatz. Um eben dieſs in Zahlen durch die vorgebrauchten Zeichen auszudrücken, ſey das Product A. B (wo A, B die *Anfangszahlen der Lebenden* aus den Tabellen ſind) die Summe der Paare, welche im Anfang zuſammenleben. Auch ſey *y* die *Altersergänzung* der *ältern* Perſon, die unter B gehört; ſo iſt

$$\overset{1}{-}A \,\Delta\, B + \overset{2}{-}A \,\Delta\, \overset{1}{-}B + + \overset{y+1}{-}A.\, \Delta\, \overset{y}{-}B = S.\overset{1}{-}A.\,\Delta\, B$$

die Zahl aller in den *einzelnen* Jahren *entſtandenen Trennungen,*

nungen, *wobey* die zu A gehörige Person am Ende des Jahrs gelebt hat, während welcher die verbundene zu B gehörige gestorben ist, das ist, wobey A die mit ihr verbundene Person *in diesem Jahr überlebet* hat.

Ferner ist $\overset{1}{-}B \Delta A + \overset{2}{-}B \Delta \overset{1}{-}A + + \overset{y}{-}B \Delta \overset{y-1}{-}A = S. \overset{1}{-}B \Delta A$ die *Zahl der Trennungen*, wobey B am *Ende des Jahrs überlebend* gewesen ist. Und endlich noch $\Delta A. \Delta B + \Delta \overset{1}{-}A. \Delta \overset{1}{-}B + + \Delta \overset{y}{-}A. \Delta \overset{y}{-}B = S. \Delta A. \Delta B$ die *Zahl der in demselben Jahre ganz ausgestorbenen Paare.*

Anmerkung. Es ist klar, daſs diese Zahl der in *demselben Jahre ausgestorbenen* Paare nicht einerley sey mit der *Zahl aller nach einer gewissen Zeit ausgestorbenen* Paare, in §. 104. Jene ist nur die Zahl derer, wovon *beyde Theile in demselbigen Jahre* gestorben sind. Es ist die Zahl der *zugleich* gestorbenen Theile desselben Paars. Denn wenn ein Theil in dem einen Jahr, der zweyte in dem folgenden stirbt, so sind diese Paare zwar ganz ausgestorben, aber *ihre Theile* sind nicht *zugleich*, das ist hier so viel als *nicht in demselben Jahre* gestorben.

168.

Satz 47. Die Wahrscheinlichkeit, daſs eine Person aus der Zahl A die mit ihr verbundene aus B überlebe, ist

$$\frac{S.\overset{1}{-}A \Delta B}{A\, B}.$$

Es iſt nämlich die Wahrſcheinlichkeit des Erfolgs gleich dem Verhältniſs der Fälle, worin er ſich findet, zu der Zahl *aller* Fälle. *Ueberleben* heiſset hier wiederum ſo viel, als am Ende des Jahrs noch leben, während deſſen die andere Perſon geſtorben iſt.

Zuſatz 1. Die *Wahrſcheinlichkeit*, daſs eine Perſon von B die mit ihr verbundene A überlebe, iſt

$$=\frac{S\overset{1}{-}A\,\Delta\,A}{B\,A}.$$

Zuſatz 2. Die *Wahrſcheinlichkeit*, *daſs ſie beyde zugleich ſterben*, in demſelbigen Jahre nämlich, iſt

$$=\frac{S\,\Delta\,A.\,\Delta\,B}{A.\,B}.$$

169.

Zuſatz 3. Dieſe drey Wahrſcheinlichkeiten zuſammen, ſind $= 1$. Denn für ein unbeſtimmtes Jahr n ſind

$$\frac{\overset{n}{-}A\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{A\,B}+\frac{\overset{n}{-}B.\,\Delta\overset{n-1}{-}A}{A.\,B}+\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A.\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{A.\,B}.$$

$$=\frac{(\overset{n}{-}A+\Delta\overset{n-1}{-}A)(\overset{n}{-}B+\Delta\overset{n-1}{-}B)}{A\,B}-\frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A.\,B}$$

$$=\frac{\overset{n-1}{-}A.\,\overset{n-1}{-}B-\overset{n}{-}A.\,\overset{n}{-}B}{A.\,B}=\frac{\Delta(\overset{n-1}{-}A.\,\overset{n-1}{-}B)}{A.\,B},$$ das iſt

gleich der Abnahme der Paare für das nte Jahr durch die anfängliche Zahl der Paare dividirt. Die Summe dieſer

Decre-

Decremente der Paare aus allen Jahren ist der ganzen anfänglichen Zahl derselben gleich, das ist

$$\frac{S\Delta\,(A\,B)}{A\,B} = 1.$$

Zusatz 4. Die *Wahrscheinlichkeit, dass beyde zugleich sterben während desselben Jahrs*, ist schon beträchtlich; allein die, dass beyde *zugleich in demselben Augenblicke* sterben, ist eine unendlich kleine, die nicht in Betracht kommt. Daher wird die Summe der beyden Wahrscheinlichkeiten, der, dass A, B überlebe und der, dass B, A überlebe = 1 gerechnet; denn genau ist diess nur wahr, wenn die Decremente auf jede Augenblicke berechnet werden. *)

170.

Anmerkung 1. Die *Wahrscheinlichkeit, dass eine Person überhaupt die andere überlebe*, ist nicht zu verwechseln, weder mit der Wahrscheinlichkeit, *dass eine Person die andere in einem bestimmten Jahre überlebe*, oder dass eine vor der andern in einem bestimmten Jahre wegsterbe; noch mit der, dass *eine in einem bestimmten Jahre überlebend sey* über die andere, das ist, noch am Leben sey, wenn die andere todt ist. Auch ist jene nicht einerley mit der Summe der letztgedachten Wahrscheinlichkeiten aus allen Jahren zusammen. Diese Summe ist das, was die *mittlere Dauer des Ueberlebens* ausmacht.

*) *Zusätze* zu diesem Capit. §. 1 u. f.

ausmacht. §. 109. Man hat ſich hier zuweilen verſehen, daher dieſe Erinnerung nicht überflüſsig ſeyn wird.

Anmerkung 2. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs B *vor* A in *dem beſtimmten n*ten Jahr wegſterbe, iſt $= \frac{\overset{n+1}{-}A . \Delta \overset{n}{-}B}{A\,B}$, das iſt, daſs B in *dieſem* Jahr abſterbe, und A *am Ende deſſelben*, oder am Anfang des nächſt. folgenden, noch lebe. Eigentlich liegt in ihr die Wahrſcheinlichkeit, daſs B im *Anfang des Jahrs* noch lebe, $\frac{\overset{n}{-}B}{B}$, aber in demſelben Anfang auch abſterbe, $\frac{\Delta \overset{n}{-}B}{\overset{n}{-}B}$; und daſs am *Ende deſſelben*, oder im Anfang des folgenden, A *noch übrig* ſey, $\frac{\overset{n+1}{-}A}{A}$. Das heiſst, jene Wahrſcheinlichkeit iſt *zuſammengeſetzt* aus drey andern, und iſt

$$= \frac{\overset{n}{-}B}{B} \cdot \frac{\Delta \overset{n}{-}B}{\overset{n}{-}B} \cdot \frac{\overset{n+1}{-}A}{A} \cdot = \frac{\overset{n+1}{-}A}{A} \cdot \frac{\Delta \overset{n}{-}B}{B} \cdot .$$

Wenn beyde Perſonen von gleichem Alter ſind, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit von beyden Seiten *gleich*, für *jede einzelne Jahre* ſo wohl als überhaupt, das iſt für alle Jahre zuſammen. Sie iſt alsdenn, in ganzem oder überhaupt genommen $= \frac{1}{2}$, wenn die Wahrſcheinlichkeit des Zugleichſterbens für nichts gerechnet wird. §. 169. Allein ſie kann *nicht für jedes einzelne Jahr* $\frac{1}{2}$, vielmehr nur ein kleiner Bruch ſeyn. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs B *vor* A *während eines beſtimmten Jahrs* ſterbe, und die, *daſs* A *vor* B *in demſelben ſterbe*, macht

kein

kein Ganzes aus. Es iſt ja noch der Fall da, daſs *beyde dieſs Jahr durchleben*, wenn man auch den, daſs *beyde* während deſſelben ſterben, nicht rechnen will.

Die Wahrſcheinlichkeit, daſs *für ein beſtimmtes Jahr* A überlebend ſey, das iſt, daſs A für das Jahr, im Anfang deſſelben noch lebe, und B todt ſey, iſt

$= \overset{n}{—}A. \frac{(B - \overset{n}{—}B)}{A.\ B}$. (§. 106.) Dieſs iſt ein Glied der Reihe, aus der die *Dauer des Ueberlebens* zu berechnen iſt. (§. 109.) Allein *überlebend ſeyn* in einem Jahr und *überlebend werden in demſelben*, iſt nicht daſſelbe.

171.

Anmerkung 3. Ich will hier noch eins anmerken, da es oftmals nicht leicht iſt, ſich für Verwechſelungen zu hüten. Es iſt, wie vorher beſtimmt, $\frac{\overset{n+1}{—}A.}{A} . \frac{\Delta \overset{n}{—}B}{B}$ die Wahrſcheinlichkeit, *daſs in dem nten Jahre B ſterbe, und A am Leben bleibe.* Sie iſt aus den beyden Wahrſcheinlichkeiten, aus der, daſs A am Anfang des folgenden (n + 1)*ten* Jahres, oder am Ende des *nten* noch lebe, und aus der, daſs B im n*ten* (eigentlich im Anfang deſſelben) ſterbe, zuſammengeſetzet. Kann aber eben dieſelbe nicht auch aus folgenden beyden zuſammengeſetzet werden, aus der, daſs die *Verbindung* in dem n*ten Jahr aufhöre*, welche

$$\frac{\Delta.(\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B)}{A.B} = \frac{\overset{n}{}A.\overset{n}{-}B - \overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B}{A\;.\;B}$$

$$= \frac{\overset{n+1}{-}A.\Delta\overset{n}{-}B + \overset{n+1}{-}B.\Delta\overset{n}{-}A + \Delta\overset{n}{-}A.\,\Delta\overset{n}{-}B}{A.\;B}$$

iſt, und aus der, daſs A noch am Ende des *nten* Jahrs am Leben ſey, welche $= \frac{\overset{n+1}{-}A}{A}$ iſt? Dieſs geht nicht an, denn das Product $\frac{(\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B - \overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B)}{A.\;B}.\frac{\overset{n+1}{-}A}{A}$ iſt nicht einerley mit $\frac{\overset{n+1}{-}A.}{A}.\;\frac{\Delta\overset{n}{-}B}{B}$, wie man leicht ſieht. Dennoch ſcheint es einerley zu ſeyn, ob die beyden Umſtände zuſammentreffen, die in den erſten Wahrſcheinlichkeiten enthalten ſind, oder die in den lezten? Hört die Verbindung auf, das iſt, ſtirbt einer von beyden; und kommt hinzu, daſs A am Leben bleibe, ſo iſt dieſs ja daſſelbe, als wenn A fortlebet und B ſtirbt.

Das iſt es allerdings der Natur der Sache nach, und daraus folgt denn auch, daſs wenn die beyden letzten Wahrſcheinlichkeiten hier auf die gehörige Art, den allgemeinen Grundſätzen gemäſs, verbunden werden, das daraus folgende Reſultat daſſelbe ſeyn müſſe, wie vorher. Hier hat man einen Fall, dergleichen man ſonſt in der Mathematik weniger hat als in der Philoſophie, daſs unrichtige Anwendungen von Grundſätzen entſtehen, weil man ihren Sinn nicht recht beſtimmt hat. Es iſt ein Axiom in der *Arithmetica Probabilium*, „daſs die Wahr-

„ſchein-

„ſcheinlichkeit eines Eräugniſſes, welches unter der Vor„ausſetzung, daſs *ein anderes zweytes* gewiſs ſey, nur „$\frac{1}{n}$ Wahrſcheinlichkeit hat, in dem Fall daſs dieſs „zweyte ſelbſt, ſtatt gewiſs zu ſeyn, nur die Wahr„ſcheinlichkeit $\frac{1}{m}$ hat, zuſammengeſetzt ſey aus den „beyden, und alſo $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$ tel ſey."

Eben ſo, wenn ein Eräugniſs das Zuſammentreffen *zweyer* anderer erfordert, davon eins die Wahrſcheinlichkeit $\frac{1}{n}$ hat, das zweyte, wenn jenes gewiſs wäre, $\frac{1}{m}$ iſt, ſo iſt die *Wahrſcheinlichkeit des Zuſammentreffens* $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$.

Aber hierbey finden zwey Fälle ſtatt. Entweder ſind *beyde Eräugniſſe unabhängig von einander;* das eine kann ſtatt finden ohne das andere, auch das letztere ohne das erſtere; oder es iſt nicht ſo. Iſt jenes, ſo ſind auch *ihre Wahrſcheinlichkeiten von einander getrennt.* Iſt die Wahrſcheinlichkeit des einen für ſich betrachtet $\frac{1}{n}$, und die des andern für ſich $\frac{1}{m}$, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit des Zuſammentreffens $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$. So iſt es hier in der Wahrſcheinlichkeit $\frac{\overset{n+1}{-}A}{A} \cdot \frac{\Delta B}{B}$. Es kann A das

nte

*n*te Jahr überleben, ohne daſs B in demſelben abgehe, und umgekehrt B abgehen, ohne daſs A es durchlebe.

Sind *die Wahrſcheinlichkeiten nicht ſeparirt*, ſo iſt das ein anders. Die Verbindung zwoer Perſonen kann aufhören ohne daſs A am Leben bleibe. Beyde verbundene Perſonen können nämlich ſterben, auch A kann ſterben und B leben; nur allein die dritte Art, wie das Aufhören möglich iſt, enthält die Bedingung, daſs A am Leben bleibe, und B ſterbe. In ſo weit iſt die *Wahrſcheinlichkeit, daſs A am Leben bleibe, vermiſcht mit der, daſs die Verbindung aufhöre.*

In ſolchen Fällen muſs man die beyden Wahrſcheinlichkeiten vorher ſepariren. Eigentlich erſt ausmachen, was die eine ſey, im Fall die andere der Gewiſsheit gleich komme. Der Sinn des Grundſatzes, nach welchem die *zuſammengeſetzte Wahrſcheinlichkeit* berechnet wird, erfordert dieſs. Es muſs erſt gefragt werden, wie wahrſcheinlich iſt das eine, wenn das andere ſchon *gewiſs* iſt, und hernach, wie wahrſcheinlich das letztere, wenn das erſte *gewiſs* iſt? Dann iſt die zuſammengeſetzte Wahrſcheinlichkeit, daſs beydes erfolge, gleich dem Product der einzelnen Wahrſcheinlichkeiten in einander.

Dadurch hebt ſich die Schwierigkeit in unſerm Fall. *Die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Verbindung beyder aufhöre,*

höre, ist $\frac{\Delta(\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B)}{A.\,B} = \frac{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A.\,B} - \frac{\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B}{A.\,B}$

$$= \frac{(\overset{n+1}{-}A + \Delta\overset{n}{-}A)(\overset{n+1}{-}B + \Delta\overset{n}{-}B)}{A.\,B} - \frac{\overset{n+1}{-}A.\overset{n+1}{-}B}{A.\,B}$$

$$= \frac{\overset{n+1}{-}A.\Delta\overset{n}{-}B}{A.\,B} + \frac{\overset{n+1}{-}B.\Delta\overset{n}{-}A}{A.\,B} + \frac{\Delta\overset{n}{-}A.\Delta\overset{n}{-}B}{A.\,B}.$$

Diese werde als *Gewissheit* angesehen, so ist die *Wahrscheinlichkeit* des einen Theils derselben, nämlich $\frac{\overset{n+1}{-}A.\ \Delta\overset{n}{-}B}{A.\,B}$, das ist, des Falles, *dass A noch lebe, und B todt sey*, (oder dass A lebe, was unter dieser Bedingung mit jenem einerley ist) $= \frac{\overset{n+1}{-}A.\Delta\overset{n}{-}B}{\Delta(\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B)}$. Denn diese Wahrscheinlichkeit (sie sey W) verhält sich zur Wahrscheinlichkeit, dass die Verbindung aufhöre (W′) wie $\frac{\overset{n+1}{-}A.\Delta\overset{n}{-}B}{A.\,B} : \frac{\Delta.\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A.\,B}$. Also ist W $= W'.\ \frac{\overset{n+1}{-}A.\ \Delta\overset{n}{-}B}{\Delta\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}$, und wenn nun $W' = 1$, das ist gleich der *Gewissheit*, so ist $W = \frac{\overset{n+1}{-}A.\ \Delta\overset{n}{-}B}{\Delta\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}$.

Nun diese Wahrscheinlichkeit multiplicirt in die erste Wahrscheinlichkeit, *dass die Verbindung aufhöre*, das ist, in $\frac{\Delta.\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A.\,B}$, giebt $\frac{\overset{n+1}{-}A.\ \Delta\overset{n}{-}B}{A.\,B}$.

Man

Man kann auch ſo ſchlieſsen. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Verbindung aufhöre, wird, unter der Vorausſetzung, daſs die Wahrſcheinlichkeit, A lebe, am Ende des *nten* Jahrs $\left(\text{oder } \frac{\overset{n+1}{-}A}{A}\right)$ eine Gewiſsheit ſey, ſo viel als $\frac{\Delta\overset{n}{-}B}{B}$, nämlich ſie wird gleich der Wahrſcheinlichkeit, daſs B in dieſem Jahr ſterbe. Es kommt in dem Ausdruck $\frac{\Delta\left(\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B\right)}{A.B}$, ſtatt $\frac{\overset{n+1}{-}A}{A}$ die Einheit und $\Delta\overset{n}{-}A$ iſt $= 0$.

Dieſe Wahrſcheinlichkeit, wie ſie unter der Vorausſetzung iſt, daſs die zwote Gewiſsheit ſey, in die letztere, wie dieſe für ſich iſt, $\left(\frac{\overset{n+1}{-}A}{A}\right)$ multiplicirt, macht $\frac{\overset{n+1}{-}A}{A} \cdot \frac{\Delta\overset{n}{-}B}{B}$, wiederum wie vorher.

172.

Satz 48. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs von zweyen Perſonen A und B, vom Alter a und b, die erſtere A, die letztere B überlebe (in demſelben Sinn des Worts wie §. 168. nämlich, am Ende desjenigen Jahrs noch lebe, während welches B geſtorben iſt) *wird ſo gefunden:*

1) Man ſuche die *Dauer der Verbindung der Ueberlebenden A mit einer dritten*, die um *Ein* Jahr *jünger* iſt, als

als die *Zwote* B, oder *vom Alter* (b — 1) ist. Das ist, man suche $C\,\overline{a\,(b-1)}$.

2) Davon ziehe man ab die Dauer der Verbindung von A und B, das ist $C.\,\overline{a\,b}$.

3) Zu dem Rest lege man hinzu die vorher nach n. 1. gefundene Verbindungsdauer $C\,\overline{a\,(b-1)}$, *multiplicirt* mit dem *Decrement des ersten Jahrs für die dritte verbundene Person;* das ist, für das Jahr (b — 1), und dividirt durch die zu dem Alter von B gehörige Anfangszahl.

In den gewöhnlichen Zeichen diess ausgedruckt, ist

$$\frac{S.\,A\,\Delta\,B}{A.\,B} = C\,\overline{a(b-1)}\;C\,\overline{a\,b} - + \frac{\Delta\overset{-1}{-}B.}{B}.\,C\,\overline{a\,(b-1)}.$$

Beweis. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass A, B *überlebe,* (§. 168)

$$= \frac{S.\overset{1}{-}A.\,\Delta\overset{1}{-}B}{A.\,B} = \frac{S.\overset{1}{-}A.\,(B-\overset{1}{-}B)}{A.\,B}$$

$$= \left(\frac{\overset{1}{-}A.\,B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\,B} + +\right) - \left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B}{A.\,B} + +\right)$$

Die letztere Summe ist die *Verbindungsdauer* von A und B, (§. 108.) $= C\,\overline{a\,b}$, und $\frac{\overset{1}{-}A.\,B}{A\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\,B} + +$ ist

$$= C\,\overline{a(b-1)}.\,\frac{\overset{-1}{-}B}{B} = C\,\overline{a\,(b-1)} + \frac{\Delta\overset{-1}{-}B}{B}\,C\,\overline{a(b-1)},$$

wo

wo $\overset{-1}{-}B$ die Zahl der Lebenden für das Jahr $b - 1$ ist.

$$\text{Folglich } \frac{S. \overset{1}{-}A \,\Delta\, B}{A.\,B} = C\,\overline{a(b-1)} - C\,\overline{ab}$$

$$+ \frac{\Delta \overset{-1}{-}B}{B}\, C\,\overline{a\,(b-1)}.$$

173.

Anmerkung 1. Es kann keinen Zweifel haben, daſs nicht die Reihe $\frac{(\overset{1}{-}A\;B + \overset{2}{-}A\;\overset{1}{-}B)}{A\;B} + +$ gleich ſey $C\,\overline{a(b-1)}.\ \frac{\overset{-1}{-}B}{B}$. Iſt A die Anfangszahl für die älteſte Perſon, ſo werden in der Reihe $\frac{\overset{1}{-}A.\ \Delta\,B}{A\;B} + + \frac{\overset{x}{-}A.\ \Delta\,\overset{x-1}{-}B}{A\;B}$, *x* Glieder ſeyn, wovon das letzte, wenn *x* die Alterergänzung von A iſt, $= 0$ iſt. Iſt dagegen B die älteſte und *y* die Alterergänzung, ſo hat die *Reihe* $\overset{1}{-}A\ \Delta\ B + +$ nur *y* Glieder, und das letzte iſt $\overset{y}{-}A.\ \Delta\ \overset{y-1}{-}A$; hingegen die Verbindungsdauer $C\,\overline{a\,(b-1)}$ hat ein Glied *mehr*, nämlich $\frac{\overset{y-1}{-}A.\ \overset{y-1}{-}B}{A.\ B}$. Allein dieſs hinzukommende Glied iſt Nichts. Uebrigens iſt allerdings in jedem Fall Rückſicht darauf zu nehmen, wie weit die Reihe nach den Bedingungen der Aufgabe feſtgeſetzet werden ſoll, die man nur

nach

nach der Form ihrer ersten Glieder bezeichnet. Auf diese Erinnerung wird man unten zurück zu kommen Gelegenheit haben.

Anmerkung 2. Ferner ist für sich klar, dass die hier zu gebrauchenden *Coexistenzen*, die *nicht corrigirten* seyn müssen, das ist, die nur auf *ganze Jahre* berechnet sind, und die um $\frac{1}{2}$ kleiner sind als die *tabellarischen*.

174.

Zusatz 1. Die *Wahrscheinlichkeit*, dass B, A *überlebe* oder $\frac{S\,\overset{1}{-}B.\Delta A}{A.\ B}$, ist

$$= C\overline{b\,(a-1)} - C\overline{a\,b} + \frac{\Delta \overset{-1}{-}A}{A}.\ C\overline{b\,(a-1)}.$$

Zusatz 2. Die *Wahrscheinlichkeit*, *dass A und B zugleich*, das heisst in dem Lauf desselben Jahrs *abgehen* (§. 168.) oder $\frac{(\Delta A.\ \Delta B + \Delta \overset{1}{-}A.\ \Delta \overset{1}{-}B ++)}{A\ B}$ ist

$$= \frac{S(A - \overset{1}{-}A)\ (B - \overset{1}{-}B)}{A.\ B} = \frac{(A\,B + \overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B + +)}{A.\ B}$$

$$- \frac{(A\,\overset{1}{-}B + \overset{1}{-}A\ \overset{2}{-}B ++)}{A\ B} - \frac{(B\,\overset{1}{-}A + \overset{1}{-}B\ \overset{2}{-}A ++)}{A\ B}$$

$$+ \frac{(\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B + \overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B + +)}{A.\ B} = 2.\ C\overline{a\,b} + 1$$

$$- \frac{\overset{-1}{-}A}{A}.\ C\overline{(a-1)\,b} - \frac{\overset{-1}{-}B}{B}.\ C\overline{a\,(b-1)}.$$

Zusatz 3. Es sind wiederum diese drey Wahrscheinlichkeiten zusammengenommen $= 1$, wie es nach der Natur der Sache, und auch nach den obigen Ausdrücken seyn muss.

175.

Ex. Es sey das Alter von A, $a = 40$ Jahr, das von B, oder $b = 45$, so ist

$$C\overline{ab} = C\overline{40.45} = 14,05 - \tfrac{1}{2} = 13,55;$$
$$C\overline{a(b-1)} = C\overline{40.44} = 14,294 - \tfrac{1}{2}. = 13,794;$$
$$C\overline{(a-1)b} = C\overline{39.45} = 14,20 - \tfrac{1}{2} = 13,70.$$

Ferner $\dfrac{\overset{-1}{\Delta}B}{B} = \dfrac{7}{339}$, und $\dfrac{\overset{-1}{\Delta}A}{A} = \dfrac{7}{374}$.

Folglich

1) die Wahrscheinlichkeit, dass A *überlebe*,

$= 13,794 - 13,55$

$+ \dfrac{7}{339} \cdot 13,794 = 0,244 + 0,284 = 0,528.$

2) Die Wahrscheinlichkeit, dass B *überlebe*,

$= 13,70 - 13,55 + \dfrac{7}{374} \cdot 13,70$

$= 0,15 + 0,256 = 0,406.$

3) Die Wahrscheinlichkeit, dass *beyde in demselben Jahre sterben* $= 2.13,55 + 1 - (13,70 + 0,257)$
$- (13,794 + 0,284) = 0,064.$

Und *alle drey* Wahrscheinlichkeiten *zusammen*

$= 0,528 + 0,406 + 0,064 = 1.$

176. Zu-

176.

Zusatz 4. Wenn man die ersten beyden Wahrscheinlichkeiten, daſs A überlebe über B, und die, daſs B überlebe über A, oder $\frac{S\,\overset{1}{-}A\,\Delta B}{A.\,B}$, und $\frac{S\,\overset{1}{-}B.\,\Delta A}{A.\,B}$ auf *Augenblicke* berechnet, so wird die dritte, daſs *beyde zugleich absterben*, das ist, in demselben Augenblicke sterben, zu nichts. Für diesen Fall muſs zu jedem Wehrt der beyden erstern die Hälfte der letztern addirt werden. *)

Zusatz 5. Es ist *einerley* Wahrscheinlichkeit, daſs in *jedem Jahr, worinn A gestorben ist, B schon im Anfang desselben todt gewesen sey*, und die, daſs A, B *überlebet habe*, wenn man die ganze Lebenszeit nimmt, nach deren Endigung sie beyde todt sind. Denn ob A *nach B gestorben ist*, oder B, A *überlebet* habe, ist dasselbe im Ganzen. Nur wenn man einige *bestimmte Jahre nimmt*, so ist dieſs nicht dasselbe. Das erste enthält auch, daſs *beyde todt* sind, das letztere nicht. Die Wahrscheinlichkeit des erstern ist

$$\frac{(B - \overset{1}{-}B)}{B} \cdot \frac{\Delta A}{A} + \frac{(B - \overset{2}{-}B)}{B} \cdot \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A} + +$$

$$= \left(\frac{\Delta A + \Delta \overset{1}{-}A}{A} + +\right) - \left(\frac{\overset{1}{-}B.\,\Delta A}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}B.\,\Delta \overset{1}{-}A}{B.\,A} + +\right)$$

$$= 1 - \frac{S\,\overset{1}{-}B\,\Delta A}{A.\,B} = \frac{S\,\overset{1}{-}A\,\Delta B}{A\,B}.$$ Es wird nämlich

 voraus-

*) *Zusätze* zu diesem Cap. §. 1.

vorausgeſetzet, wie im vorhergehenden Zuſatz, daſs die Fälle des *Zugleichſterbens* nicht gerechnet werden.

177.

Satz 49. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs A vom Alter a, B vom Alter b überhaupt überlebe (das iſt, noch lebe, wenn B ſtirbt, wenn auch A in demſelben Jahr nach B ſterben ſollte) wird ſo gefunden.

1) Man nehme die *Verbindungsdauer* jeder der gegebenen Perſonen mit einer *andern*, die um *Ein* Jahr jünger iſt als die *zwote*, das iſt die Coexiſtenz $C\overline{(a-1)b}$, und $C\overline{(b-1)a}$.

2) Jede dieſer Dauern werde durch die Anfangszahl für das um Ein Jahr jüngere Alter multiplicirt, und durch die Anfangszahl für das gegebene Alter dividirt, oder $C\overline{(a-1)b}$, mit $\frac{\overset{-1}{A}}{A}$, und $C\overline{a(b-1)}$ mit $\frac{\overset{-1}{B}}{B}$ multiplicirt.

3) Die *Differenz* dieſer beyden Verbindungsdauern zu $\frac{1}{2}$ *addirt*, giebt die *Wahrſcheinlichkeit, daſs A überlebe*, wenn A die *jüngere* iſt; und von $\frac{1}{2}$ ſie abgezogen, giebt die Wahrſcheinlichkeit des *Ueberlebens für* A, *wenn A die ältere iſt.*

Beweis. Nach Zuſatz 4. in §. 176. bekommt man die Wahrſcheinlichkeit, daſs die jüngere A, überhaupt die ältere B überlebe, wenn zu der auf *ganze Jahre be-*

rechne-

rechneten Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens von A, (§. 172.) die Hälfte der Wahrſcheinlichkeit, daſs A und B *zugleich* in demſelben Jahre ſterben, (§. 174. *Zuſ.* 2.) addirt wird. Alſo iſt jene Wahrſcheinlichkeit

$$= \frac{\overset{-1}{=}B}{B} \cdot C_{\overline{a(b-1)}} - C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ab}} + \tfrac{1}{2} - \frac{\overset{-1}{=}B}{2B} \cdot$$

$$C_{\overline{a(b-1)}} - \frac{\overset{-1}{=}A}{2A} \cdot C_{\overline{(a-1)b}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\overset{-1}{=}B}{B} \cdot C_{\overline{a(b-1)}} - \frac{\overset{-1}{=}A}{A} \cdot C_{\overline{(a-1)b}} \right).$$

Und die Wahrſcheinlichkeit, *daſs die ältere B über-lebe*, iſt $= \frac{\overset{-1}{=}A}{A} \cdot C_{\overline{(a-1)b}} - C_{\overline{ab}}$

$$+ C_{\overline{ab}} + \tfrac{1}{2} - \frac{\overset{-1}{=}A}{2A} \cdot C_{\overline{(a-1)b}} - \frac{\overset{-1}{=}B}{B} \cdot C_{\overline{a(b-1)}}$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\overset{-1}{=}B}{B} C_{\overline{a(b-1)}} - \frac{\overset{-1}{=}A}{A} C_{\overline{(a-1)b}} \right)$$

Ex. A ſey 40 Jahr, B 45 Jahr; ſo iſt
$C_{\overline{a(b-1)}} = C_{\overline{40.\,44}} = 14,294$ und

$$\frac{\overset{-1}{=}B}{B} \cdot C_{\overline{a(b-1)}} = C_{\overline{a(b-1)}} + \frac{\Delta \overset{-1}{=}B}{B} \cdot C_{\overline{a(b-1)}}$$

$$= 14,294 + \frac{7}{339} \cdot 14,294 = 14,689.$$

Auch $C_{\overline{(a-1)b}} = C_{\overline{39.\,45}} = 14,20,$

und $\frac{\overset{-1}{=}A}{A} \cdot C_{\overline{(a-1)b}} = 14,20 + \frac{7}{374} \cdot 14,20$
$= 14,466.$ Die Differenz $14,589 - 14,466$ iſt $= 0,123.$

Dieſe halbirt *zu* $\frac{1}{2}$ *gelegt* giebt 0, 5615 für die *Wahrſcheinlichkeit, daſs die jüngere Perſon A überlebe.* Von $\frac{1}{2}$ *abgezogen* macht es 0, 4385 für die Wahrſcheinlichkeit, daſs die *ältere* B überlebe.

Anmerkung. Es ſind hier in dem Exempel corrigirte Coexiſtenzen genommen worden. Eigentlich ſollten es die uncorrigirten ſeyn. Allein hier macht das gar keinen beträchtlichen Unterſchied. Uebrigens iſt zu merken, daſs man fehlerhaft rechnen würde, wenn man ſich der Formeln in §. 172. und 173. bedienen, und auch die corrigirte Dauer ſtatt der auf *ganze Jahre* dorten nehmen wollte. Denn wenn dorten auf Augenblicke gerechnet wäre, ſo würden ſtatt $C\,\overline{a\,(b-1)}$ und $C\,\overline{(a-1)\,b}$ andere *Coexiſtenzen* herausgekommen ſeyn.

Zweyter Abſchnitt.

Von Anwartſchaften im Fall des Ueberlebens.

178.

Wenn ſtatt der *Verbindungsdauer* die baaren Wehrte der *Verbindungsrenten* genommen werden, ſo findet man auf eine ähnliche Art den baaren Wehrt einer Summe, welche bey dem Tode einer gegebenen Perſon zu erheben iſt, im Fall eine andere gegebene ſie überlebet; das iſt, *den baaren Wehrt einer Anwartſchaft auf eine Summe beym Tode einer andern, im Fall dieſe letztere von einer gegebenen Perſon überlebet wird.*

Satz

Satz 50. Der baare Wehrt einer Summe N, die beym Tode der Person B vom Alter b zu erheben ist, im Fall eine andere A vom gegebenen Alter a, am Ende desjenigen Jahrs lebet, in welchem B gestorben ist, wird auf folgende Weise gefunden:

1) „Man suche aus den Tabellen die Verbindungs„rente für *das a*, und *b — 1*, das ist $\lambda\,\overline{a(b-1)}$.“

2) „Multiplicire solche durch die *Anfangszahl* für „das Jahr *b — 1*, und dividire sie wieder durch die *An„fangszahl* für *b*.“

3) „Von diesem Wehrt den Wehrt der Verbindungs„rente für *a* und *b* abgezogen, und die Differenz durch „den Zinsenfuss und durch die gegebene Summe N mul„tiplicirt, giebt den gesuchten Wehrt.“

$$N\left(\frac{\overset{1}{-}A.\ \Delta\ B}{A.\ B} + \frac{\overset{2}{-}A.\ \Delta\ \overset{1}{-}B}{A.\ B\ r} + + +\right)$$

$$= N.\ r\left(\frac{\overset{1}{=}B}{B}\cdot\ \lambda\,\overline{a(b-1)} - \lambda\,\overline{a\,b}.\right).$$

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, dass A, B überlebe, auf ganze Jahre gerechnet, das ist, dass A am Ende des Jahrs noch lebe, oder im Anfange des nachfolgenden, in welchem B gestorben ist, ist für das erste Jahr $\frac{\overset{1}{-}A\ \Delta\ B}{A\ B}$ (§. 168.) Und da dieses Ueberleben als gleich *im Anfang des Jahrs* erfolgend vorausgesetzet wird, wenn man auf ganze Jahre rechnet, (überhaupt aber *jedes-*

 mal

mal im Anfang der Zeit, während welcher die Decremente entstehen) so ist die Ausgabe der Casse für das erste Jahr *baar* $\frac{\overset{1}{-}A\,\Delta\,B}{A.\,B}$; also diess auch ihr *baarer* Wehrt.

Für das *zweyte* Jahr ist sie $\frac{\overset{2}{-}A\,\Delta\,\overset{1}{-}B}{A.\,Br}$, und so ferner. Daher für alle Jahre zusammen

$$\frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta\,B}{A\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\,\Delta\,\overset{1}{-}B}{A.\,B.\,r} ++ = \frac{\overset{1}{-}A.\,(B-\overset{1}{-}B)}{A.\,B}$$

$$+ \frac{\overset{2}{-}A.\,(\overset{1}{-}B-\overset{2}{-}B)}{A.\,Br} ++ = \left(\frac{\overset{1}{-}A.\,B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\,\overset{1}{-}B}{A.\,Br} ++\right)$$

$$- \left(\frac{\overset{1}{-}A.\,\overset{1}{-}B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\,\overset{2}{-}B}{A.\,B.\,r} ++\right).$$ Nun ist die erste dieser beyden Summen $= r.\,\frac{\overset{-1}{-}B}{B}.\ \lambda\overline{a\,(b-1)}$; und die letzte ist $= r.\,\lambda\overline{a\,b}$. Folglich ist der gesuchte Wehrt

$$= r\left(\frac{\overset{-1}{-}B}{B}\,\lambda\overline{a\,(b-1)} - \lambda\overline{a\,b}\right)$$

$$= r\left(\left(1 + \frac{\Delta\,\overset{-1}{-}B}{B}\right)\lambda\overline{a\,(b-1)} - \lambda\overline{a\,b}\right).$$

Ex. A sey 30, B 40 Jahr alt. A habe die Anwartschaft auf 1000 *Rthlr.* beym Tode des B, wenn A noch das Ende des Jahrs erlebet, während dessen B gestorben ist, wie grofs ist der baare Wehrt derselben? Der Wehrt der Verbindungsrente für zwo Personen vom Alter 30 und

und 40 Jahr, oder $\lambda\,\overline{30.\,40}$, ist 10, 7816; und $\lambda\,\overline{30.\,39} = 10,8903$. Der Unterschied beyder 0,1087. Ferner ist das Decrement für das Jahr 39 dividirt mit der Zahl der Lebenden für das 40ste Jahr nach *Süssmilchs* Tabelle, $\frac{7}{374}$, und $\frac{7}{374} \cdot 10,8903 = 0,2038$. Also $0,2038 + 0,1087 = 0,3125$ und $0,3125$. $\frac{104}{100} = 0,325$ was mit 1000 multiplicirt 325 Rthlr. giebt, als den baaren Werth der Anwartschaft des A.

179.

Zusatz 1. Der Wehrt der Anwartschaft der zwoten Person B, auf eine gleiche bey dem Tode von A zu erhebende Summe N, im Fall sie *A* überlebet in demselben Sinn des Worts, ist

$$= N\,r\left(\left(1 + \frac{\Delta\,\overset{-1}{}A}{A}\right) \cdot \lambda\,\overline{(a-1)\,b} - \lambda\,\overline{a\,b}\right).$$

Ex. Es sey wiederum das Alter des jüngern A, $a = 30$; das der ältern B, oder $b = 40$; B habe im Ueberlebungsfall 1000 Rthlr. beym Tode des A zu erwarten, so findet man den baaren Wehrt dieser Anwartschaft so:

Es ist $\lambda\,\overline{30.\,40} = 10,7816$ und $\lambda\,\overline{29.\,40} = 10,8507$. Der Unterschied beyder $= 0,0691$. Und weil $\frac{\Delta\,\overset{-1}{}A}{A} = \frac{6}{439}$, so erhält man $\frac{6}{439} \cdot 10,8507$ $= 0,1483$. Diess zu 0, 0691, giebt 0, 2174;

 und

und 0, 2174. $\frac{104}{100} = 0,\,2261$, was mit 1000 multiplicirt 226, 1 Rthlr. für den gesuchten Wehrt der Anwartschaft giebt.

180.

Zusatz 2. Der baare Wehrt einer Summe 1, die zu empfangen ist, im Fall *zwo gegebene Personen A und B zugleich*, das ist in *demselben Jahre absterben*, ist

$$= \frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A.\,\Delta \overset{1}{-}B}{A.\,B.\,r} ++ = \frac{(A - \overset{1}{-}A)}{B} \cdot \frac{(B - \overset{1}{-}B)}{A}$$

$$+ \frac{(\overset{1}{-}A - \overset{2}{-}A)}{A}\frac{(\overset{1}{-}B - \overset{2}{-}B)}{B.\,r} ++ = \left(\frac{AB}{AB} + \frac{\overset{1}{-}A\overset{1}{-}B}{ABr} ++\right)$$

$$+ \left(\frac{\overset{1}{-}A\overset{1}{-}B}{AB} + \frac{\overset{2}{-}A\overset{2}{-}B}{A.B.r} ++\right) - \left(\frac{\overset{1}{-}AB}{AB} + \frac{\overset{2}{-}A\overset{1}{-}B}{ABr} + +\right)$$

$$- \left(\frac{A\overset{1}{-}B}{AB} + \frac{\overset{1}{-}A\overset{2}{-}B}{ABr} + +\right) = 1 + \lambda\overline{ab}$$

$$+ r\lambda\overline{ab} - r.\frac{\overset{-1}{-}B}{B}\lambda\overline{a(b-1)} - r.\frac{\overset{-1}{-}A}{A}\cdot\lambda\overline{(a-1)b}.$$

Ex. Das obige Exempel beybehalten $a = 30, b = 40$, so ist $r.\lambda\overline{ab} - r.\frac{\overset{-1}{-}B}{B}\cdot\lambda\overline{a(b-1)} = -0,\,325$ (§. 178.) und $r.\lambda\overline{ab} - \frac{r\overset{1}{-}A}{A}\cdot\lambda\overline{(a-1)b} = -0,226$ (§. 179.) auch $(r-1)\,\lambda\overline{ab} = \frac{\lambda\overline{ab}}{25} = 0,\,4312.$

Daher

Daher wird $\lambda\overline{ab} - \frac{r.\,{}^{-1}A}{A}\,\lambda\overline{(a-1)b} = -0,657.$
Folglich dieſe Wahrſcheinlichkeit
$= 1 - 0,325 - 0,657 = 0,018.$

181.

Zuſatz. 3. Alles noch auf ganze Jahre berechnet, addirt man die *drey baaren Wehrte* einer *Summe* N, a) die zahlbar iſt beym Tode von B, wenn A am Ende des Jahrs noch lebet; b) beym Tode von A, wenn B am Ende des Jahrs noch lebet; c) beym Tode des einen, wenn die andere zngleich in demſelben Jahre ausſtirbt, ſo *machen* dieſe *zuſammen* ſo viel aus, als *die Summe N ſelbſt vermindert um den Wehrt einer Verbindungsrente für beyde Perſonen, die den Zinſen der Summe gleich iſt.* Es iſt klar, daſs der Entrepreneur, der dieſe drey Wehrte verkauft hat, die Summe N in jedem Falle *gewiſs* auszahlen müſſe, ſobald die Verbindung aufhöret. Er hat alſo nichts genoſſen, als die *Zinſen der Summe während der Verbindung*, das iſt, *den Wehrt einer Verbindungsrente ſo groſs wie dieſe Zinſen.*

Das zeigt auch die Rechnung. Denn wenn man zuſammen nimmt

$$\frac{1}{A.B}\left({}^{-1}A.\Delta B + \frac{{}^{-2}A.\Delta\,{}^{-1}B}{r} + +\right)$$

$$+\frac{1}{A.B}\left({}^{-1}B\,\Delta A + \frac{{}^{-2}B.\Delta\,{}^{-1}A}{r} + +\right)$$

+

$+ \frac{1}{A.B} \left(\Delta A.\Delta B + \frac{\Delta A.\Delta B}{r} ++ \right) = W$ für $N = 1$; und dazu addirt $r \lambda \overline{a\,b}$

$= \left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B}{A.\,B.\,r} ++ \right)$, so bekommt man für das *erste* Jahr $\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B + \overset{1}{-}A\,\Delta B}{A.\,B}$

$$+ \frac{\overset{1}{-}B.\Delta A + \Delta A.\Delta B}{A.\,B} = \frac{(\overset{1}{-}A. + \Delta A)\,(\overset{1}{-}B + \Delta B)}{A.\,B} = 1.$$

Für das *zweyte* Jahr hat man $\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\,B.\,r}$. Für das *dritte* $\frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B}{A.\,B.\,r^2}$ u. s. f.

Diese Theile zusammen machen $\lambda \overline{a\,b}$. Also ist $W + r.\ \lambda \overline{a\,b} = 1 + \lambda \overline{a\,b}$. Daher $W = 1 - (r-1)\,\lambda \overline{a\,b} = 1 - \frac{\lambda \overline{a\,b}}{p}$, für $N = 1$, und wenn N eine andere Zahl ist $= N - \frac{N.\,\lambda \overline{a\,b}}{p}$, das ist, die Summe N selbst vermindert um den Wehrt einer Verbindungsrente so grofs als die Zinsen der Summe.

183.

Zusatz 4. Und so ist es ebenfalls, wenn man diese Wehrte mittelst der *Verbindungsrenten* ausdrückt. Die beyden, $\frac{1}{A.\,B} \cdot \left(\overset{1}{-}A.\,\Delta B + \frac{\overset{2}{-}A\ \Delta\ \overset{1}{-}B}{r} + + \right)$

und

und $\frac{1}{A.B}\cdot\left(\overset{1}{-}B\,\Delta A + \frac{\Delta\overset{2}{-}B\;\Delta\overset{1}{-}A}{r} + +\right)$ sind

(nach §. 178. 179.) $= r\,\frac{\overset{1}{=}B}{B}\,\lambda\,\overline{a(b-1)} - r\,\lambda\,\overline{ab}$

$+ r\,\frac{\overset{1}{=}A}{A}\cdot\lambda\,\overline{(a-1)b} - r\,\lambda\,\overline{ab}$. Nun ist auch

$$\left(\Delta A.\Delta B + \frac{\Delta\overset{1}{-}A.\;\Delta\overset{1}{-}B}{r}\right) = \left(\frac{A.B}{A.B} + \frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.B.r} + +\right)$$

$$= \left(\frac{A\overset{1}{-}B}{A.B} + \frac{\overset{1}{-}A.\overset{2}{-}B}{A.B} + +\right) - \left(\frac{B.\overset{1}{-}A}{A.B} + \frac{\overset{1}{-}B.\overset{2}{-}A}{A.B.r} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.B} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B}{A.B.r} + +\right) = 1 + \lambda\,\overline{ab}$$

$$- \frac{\overset{1}{=}A}{A}\cdot r\,\lambda\,\overline{(a-b)\,b} - \frac{\overset{1}{=}B}{B}\,r.\lambda\,\overline{a\,(b-1)}$$

$+ r\,\lambda\,\overline{ab}$. Dieser Wehrt zu den beyden obigen addirt giebt $W = 1 + \lambda\overline{ab} - r\,\lambda\,\overline{ab} = 1 - (r-1)\,\lambda\,\overline{ab}$

$= 1 - \frac{\lambda\,\overline{ab}}{p}$. welches für die Summe N, ist

$W N = N - \frac{N}{p}\,\lambda\,\overline{ab}$, wie es seyn soll.

Ex. So ist in dem obigen Beyspiel, wo A 30, B 40 Jahr alt ist, die *erste Anwartschaft* im Fall A überlebet, = 325 Rthlr. (§. 178.) die zwote im Fall B überlebet = 226, 1 Rthlr. und die *dritte* für den Fall des Zugleichsterbens = 18 Rthlr. (§. 180.) Diese zusammen geben 569 Rthlr.

Nun

Nun iſt auch $1000\left(1-\frac{\lambda\,\overline{ab}}{p}\right)=1000\left(1-10.\frac{7816}{25}\right)$ $=1000-431=569$ Rthlr. ſo wie es ſeyn ſoll.

183.

Zuſatz 5. Will man die Wehrte für das Ueberleben von A *überhaupt* haben, ſo daſs auch die Fälle dahin gehören ſollen, wo A nach B in dem *nämlichen Jahre* ſtirbt, ſo muſs der Wehrt des *Zugleichſterbens* in §. 180. $\left(\frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B}+\frac{\Delta\overset{1}{-}A.\,\Delta\overset{1}{-}B}{A.\,B.\,r}\right)$ zur Hälfte zu dem Wehrte des Ueberlebens von *A* in §. 178. addirt werden.

Die andere Hälfte von jenem kommt zu dem Wehrte des *Ueberlebens von B* in §. 179.

In beyden Fällen wird jedoch die beym Tode der einen Perſon zahlbare Summe angeſehen, als ſey ſie im Anfang des Jahrs, in welchem eine zuerſt ſtirbt, in Bereitſchaft zu halten, alſo auch alsdenn ſchon zahlbar, weil der Abgang im Anfang des Jahrs angenommen wird.

Dieſs erhellet ſchon aus eben dem Beweiſe in den *Zuſätzen* *) womit der *Zuſatz* 4. in §. 176, dargethan wird. Allein weil es hier von vorzüglicher Wichtigkeit iſt, wegen des nächſtfolgenden Grundſatzes, ſo habe ich noch inſonderheit die Sache in den Zuſätzen deutlich auseinander geſetzet. **)

Wollte

*) §. 1. **) §. 4.

Wollte man aber statt der gewöhnlichen Leibrenten solche gebrauchen, die für *augenblickliche Termine* gehören, so verschwindet der Wehrt des Zugleichsterbens in §. 180., allein die obigen Formeln für die Wehrte der Anwartschaften in §. 178. und §. 179. können alsdenn nicht behalten werden. Beym ersten Anblicke scheint das so.

184.

Satz 51. Der Wehrt der Anwartschaft auf eine Summe N, die beym Tode einer Person A, und zwar im Anfange des Sterbejahrs zahlbar ist, unter der Bedingung dass A eine zwote Person B überlebe, (es sey nun dass jene gleich in demselben Jahr noch sterbe oder nicht) wird so gefunden. Das Alter der gegebenen Person sey *a.* und *b.*

1) „Man nehme die Verbindungsrenten für zwey „verbundene Leben $a - 1$ und b; und für $b - 1$ „mit a; und jeder dieser Wehrte werde vergrössert „in dem Verhältniss der Zahl der Lebenden in dem „um ein Jahr verminderten Alter, zu der Zahl derselben „in dem gegebenen; das ist $\lambda\,\overline{(a-1)\,b}$ werde multipli„cirt mit $\frac{\overset{-1}{A}}{A}$; und $\lambda\,\overline{a\,(b-1)}$ mit $\frac{\overset{-1}{B}}{B}$.

2) „Die *Differenz* dieser beyden Wehrte werde mit „dem Zinsfuss r multiplicirt und halbirt.

3) „Man

3) „Man suche die *halbe Differenz* zwischen dem „*Grundcapital* und der *Verbindungsrente* der gegebenen „Personen dividirt durch das *Grundcapital* oder „$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda \overline{a\,b}}{p}\right)$.

4) „Die erste halbe Differenz aus n. 2. von der letz„ten aus n. 3. *abgezogen*, oder dazu *addirt*, giebt den „Wehrt der Anwartschaft auf die Summe 1 für die *ältere* „Person im ersten Fall, und für die *jüngere* im letztern „Fall."

Beweis. Nach dem vorhergehenden ist der Wehrt der Anwartschaft auf die Summe 1 beym Tode B, wenn die jüngere A überlebet $= r\frac{\overset{-1}{B}}{B} \cdot \lambda \overline{a(b-1)} - r\lambda \overline{a\,b}$

$$(§.\ 178.) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda \overline{a\,b} - \frac{r.\ \lambda \overline{a\,b}}{2} - \frac{\overset{-1}{A}}{2A} \cdot r\lambda \overline{(a-1)b}$$

$$- \frac{\overset{-1}{B}}{2B} \cdot r\,\lambda \overline{a(b-1)}\ (§.\ 182.\ 183.)$$

$$= \frac{1-(r-1)\lambda_{ab}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\overset{-1}{B}}{B} \cdot r.\ \lambda \overline{a(b-1)}$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{\overset{-1}{A}}{A} \cdot r.\lambda \overline{(a-1)b} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\lambda \overline{a\,b}}{p}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot r\left(\frac{\overset{-1}{B}}{B} \cdot \lambda \overline{a(b-1)} - \frac{\overset{-1}{A}}{A} \cdot \lambda \overline{(a-1)\,b}.\right),$$

Für

Für den Fall des Ueberlebens des ältern B, ist der Wehrt von 1 zahlbar beym Tode des A

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\lambda\overline{a\,b}}{p}\right) - \frac{1}{2}\, r \left(\frac{\overset{-1}{B}}{B}\, \lambda\overline{a(b-1)} - \frac{\overset{-1}{A}}{A}\, \lambda\overline{(a-1)b}\right).$$

Zusatz 1. Sind beyde Personen von *gleichem Alter*, so ist auch die Anwartschaft in beyden Fällen gleich, und $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda\overline{a\,b}}{p}\right)$.

Ex. Es sey die Summe 1000 Rthlr.; *a*, 30 Jahr und *b*, 40 Jahr, so ist $\lambda\overline{a\,b} = 10, 7816$, und $1 - \frac{\lambda\overline{a\,b}}{p} = 1 - 0, 431264 = 0, 5687$, und die Hälfte davon $= 0, 2844$. Es ist ferner $\frac{\overset{-1}{B}}{B}\, \lambda\overline{a\,(b-1)}$ $= 11, 0941$, und $\frac{\overset{-1}{A}}{A} \cdot \lambda\overline{(a-1)\,b} = 10,9990$.

Also $\frac{\overset{-1}{B}}{B}\, \lambda\overline{a(b-1)} - \frac{\overset{-1}{A}}{A}\, \lambda\overline{(a-1)b} = 0, 0951$. Diess mit 1, 04 multiplicirt, giebt 0, 0989; davon die Hälfte = 0, 0494. Also ist die Anwartschaft auf die Summe 1 der *jüngern* Person = 0, 33382, und der *ältern* = 0, 2349.

Diess mit 1000 multiplicirt, giebt für die jüngere 333, 8 Rthlr., und für die ältere 234, 9 Rthlr.

Ex. 2. Es sey das Alter der jüngern Person $a = 20$, und $b = 50$ Jahr, so ist $\lambda\overline{20.\,50} = 9, 6355$; $\lambda\overline{19.\,50}$ $= 9, 6740$, und $\frac{495}{491} \cdot \lambda\overline{19.\,50} = 9, 7527$.

 Ferner

Ferner $\lambda\overline{20.49} = 9,8213$, und $\frac{308}{300}\lambda\overline{20.49} = 10,0835$. Die Differenz $10,0835 - 9,7527 = 0,3308$ mit $\frac{1}{2}r = 0,52$ multiplicirt, giebt $0,1720$. Diese addirt zu der Differenz $\frac{1}{2} - \frac{\lambda\overline{20.50}}{50}$, das ist, zu $0,30729$, giebt den Wehrt der Anwartschaft auf *1*, für die *jüngere* Person $0,4793$; und die erstere Differenz von der letztern *abgezogen* giebt $0,13528$ für die ähnliche Anwartschaft bey der *ältern* Person.

185.

Zusatz 2. Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben kann man die Wehrte der obigen Anwartschaften sehr kurz haben, zumal wenn man sich der *augenblicklichen* Leibrenten bedienen will. Da ist der Wehrt der Summe 1 zahlbar beym Tode von B auf den Fall, dass A *überlebe*, $= \frac{1}{\beta}\lambda\overline{a}$, ($\beta$ und α sind wiederum die *Altersergänzungen* zu *a* und *b*, dem Alter von A und B); und für den Fall, dass B überlebe $= \frac{1}{\alpha}\lambda\overline{b}$. Der dritte Fall, dass beyde zugleich abgehen, hat keinen Wehrt,

Aber hierbey ist zu merken, dass für beyde Fälle jene Ausdrücke nur passen, wenn *die Person, welche die andere überleben soll*, die ältere von beyden *ist*. Also in dem ersten Fall, dass A überlebe, wenn A älter ist als B,

also α kleiner ist als β; und im zweyten, wenn B älter ist als A, und also β kleiner als α.

Wenn die *überlebende* Person die jüngere ist, so muss in dem Fall, dass A es seyn soll, wo also α grösser ist als β, anstatt der Leibrente $\lambda\,\overline{a}$, eine nach β Jahren *aufhörende Leibrente* für A genommen werden. Eben so im zweyten Fall, wenn B die jüngste ist und überleben soll, ist statt der Leibrente $\lambda\,\overline{b}$ eine nach α *Jahren aufhörende* zu gebrauchen. Man sehe *Zusätze* zu diesem Capitel. *)

186.

Anmerkung. Die hier vorgetragenen Grundsätze sind bisher von den Schriftstellern über diese Materie, und zwar, so viel mir bekannt ist, von allen verfehlet worden. *Moivre* gab folgende Anweisung. **) *Man berechne den baaren Wehrt einer Summe 1, die beym Tode einer Person zahlbar ist*, das ist den baaren Wehrt der *Erbschaft* $1 = 1 - \frac{\lambda\,\overline{a}}{p}$ (§. 98.), und *diese multiplicire man mit der Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens.* Denn da jene Erbschaft nur unter der Bedingung zu empfangen ist, dass die Person, von deren Tode sie abhängt, vor einer andern absterbe, oder dass eine andere jene überlebe, so muss ihr baarer Wehrt, den sie für sich hat, noch mit der Wahrscheinlichkeit dieses Ueber-

 lebens

*) §. 5.

**) *Treatise on Annuities. Probl.* XVII und XX.

lebens multiplicirt werden. Sind zum Beyſpiel beyde Perſonen von gleichem Alter, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens auf jeder Seite $= \frac{1}{2}$. Dann iſt ihr geſuchter Wehrt dem halben Wehrt der Erbſchaſt gleich. *Moivres* Schluſs hatte vielen Schein, muſste ihn auch wohl haben, um einen Mann von ſeinem Scharfſinn zu verleiten. Es war ein allgemeines Raiſonnement aus Begriffen, aber ein ſolches, das noch nicht in und durch Zeichen genug verdeutlichet war. Auſser der Mathematik haben die Beweiſe, auch die man für ſehr bündig hält, die meiſtenmale nicht mehr Klarheit als jener. In der Mathematik aber iſt man gewohnt ſie, ihres beſten Scheins ohngeachtet, noch näher in Zeichen zu verdeutlichen. Dieſs iſt eine Probe, bey der ſich zuweilen findet, daſs ſie triegen. Es iſt ohne Zweifel ein Grundſatz, daſs der *jetzige Wehrt einer wahrſcheinlich zahlbaren Summe*, erſtlich *nach ihrer Gröſse*, und zweytens *nach dem Grad der Wahrſcheinlichkeit*, oder des Riſico, daſs ſie zu zahlen oder nicht zu zahlen ſey, berechnet werden müſſe. So rechnet man in jedem Fall. Allein der Fehler des obigen Schluſſes liegt darin. Die zahlbare Summe 1 beſteht aus den verſchiedenen Theilen der einfachen Jahre; und bey dieſen Theilen, einzeln genommen, iſt die *Wahrſcheinlichkeit* zwar gleich bey zwo Perſonen von gleichem Alter, wenn alles übrige einerley iſt, aber ſie iſt *nicht bey jedem einzelnen Theil* $= \frac{1}{2}$, wie oben §. 170. bemerkt iſt. Nur die Summe der

der einzelnen Wahrscheinlichkeiten aller Theile zusammengenommen macht $\frac{1}{2}$ aus bey gleich alten Personen. Kein Wunder also, daſs am Ende nicht die *Hälfte der Wehrte der Erbschaft* herauskommt, auch wenn für gleich alte Personen gerechnet wird. Es kommt die *Hälfte heraus von dem Wehrt einer andern Summe*, nämlich einer solchen, die zahlbar ist, sobald die *Verbindung zwoer Personen* aufhört.

Herr D. *Price* *) zeigte die Unrichtigkeit der *Moivrischen Auflösung*, durch die falschen Folgen, wozu sie führt. *Es sey eine Summe beym Tode einer Person A zahlbar, unter der Bedingung*, daſs sie (nicht wie vorher vor einer andern B von gleichem Alter absterbe) sondern daſs sie B *überlebe*, so würde nach *Moivre* ihr baarer Wehrt derselbige seyn. Denn es ist eben so wahrscheinlich, daſs A am längsten lebe von beyden als zuerst absterbe. Dieſs ist aber nicht möglich. In dem ersten Fall ist das Geld zahlbar, sobald eine von beyden stirbt, es sey die eine oder die andere; zahlbar, wenn A zuerst stirbt, nicht zahlbar, wenn B erst stirbt. Wird sie zahlbar, so wird sie es auch alsdenn. In dem letzten Fall bleibt nun zwar das erste eben so. Die Summe wird zahlbar oder nicht, sobald eine stirbt, jenes wenn B, dieſs, wenn A zuerst stirbt; allein sie wird nicht zahlbar zu der nämlichen Zeit; es sey denn, daſs A un-

*) *Observations on reversionary Payments*, p. 233. Edit. 3. und p. 326. Edit. 4.

mittelbar nach B stirbt; sie wird es erst, wenn auch A nach B stirbt, das ist, sie wird es erst, wenn der *längstlebende* von beyden stirbt; sie war es in dem ersten Fall gleich bey der Trennung. Diess kann nicht einerley seyn. Die letzte Bedingung giebt also der Aufgabe eine andere Gestalt. Sind beyde Personen gleich alt, so muss, um den Wehrt der *Anwartschaft in dem letzten Fall* zu finden, von dem *Grundcapital*, nicht wie vorher die *Verbindungsrente*, sondern der *Wehrt des längsten Lebens* aus zweyen, abgezogen und der Rest halbirt werden. Diese Aufgabe soll noch unten vorkommen.

Dennoch scheint es nicht, dass Herr Dr. *Price* den eigentlichen Grund der Unrichtigkeit in *Moivres* Auflösung recht gekannt habe. Wenigstens hat er ihn nicht angegeben, und hat auch selbst keine eigene bessere Methode gewiesen, sondern bleibt bey *Simpsons* Vorschrift. *Simpson* folgte anfangs dem *Moivre*, entdeckte aber den Fehler, und erfand eine neue Methode, die auch *Morgan* *) annahm, und den grössten Theil seiner Aufgaben vom Ueberleben darnach auflösete.

Simpsons Vorschrift ist diese: *Man suche den Wehrt der Verbindungsrente für zwo Personen von gleichem Alter, so gross als das der ältesten unter den gegebe-*

*) *The Doctrine of Annuities and Assurances on Lives and Survivorships, by William Morgan.* London 1779.

gegebenen Perſonen. Dieſen Wehrt ziehe man ab von dem Grundcapital und halbire den Reſt. Dann ſuche man zu der mittlern künftigen Lebensdauer der jüngern, und der ältern Perſon, und zu dem letzt gefundenen Reſt die vierte Proportionalzahl. Dieſe iſt der jährliche Zins von der Anwartſchaft, in dem Fall die erwartete Summe beym Tode der jüngern Perſon zahlbar iſt; unter der Bedingung, daſs die ältere jene überlebe. Im entgegengeſetzten Fall aber, wenn es auf den Tod der ältern, und das Ueberleben der jüngern ankommt, muſs zu der gefundenen Zahl noch der Wehrt der Verbindungsrente der gegebenen Perſonen addirt, und dann alles von dem Grundcapital abgezogen werden.

In den obigen gewöhnlichen Zeichen dieſs ausgedruckt, und *m* für die künftige mittlere Lebensdauer der *jüngern* Perſon A, *n* für die der *ältern* Perſon B geſetzt; ſo iſt $\frac{m}{2n}(p - \lambda \overline{b\,b})$ der Wehrt der Anwartſchaft auf *p*, im Fall die Summe beym Tode der jüngern Perſon zahlbar iſt, unter der Bedingung, daſs die *ältere* überlebe; und $p - \lambda \overline{a\,b} - \frac{m}{2n}(p - \lambda \overline{b\,b})$ iſt es, im Fall die jüngere überlebet.

Wenn beyde Perſonen von gleichem Alter ſind, ſo wird der Wehrt $= \frac{1}{2}(p - \lambda \overline{a\,b})$. Dieſs ſtimmt mit §. 18. überein. Allein in andern Fällen kann die Abweichung beträchtlich ſeyn.

Ex. 1. Ist das Alter der *jüngern* Person 30, der *ältern* ihres 40 Jahr, so ist $\lambda\overline{a\,b} = 10,7816$, und $p - \lambda\overline{a\,b} = 25 - 10,7816 = 14,2184$ (nämlich für $r = 1,04$.) Ferner ist, nach *Süssmilchs* Tabelle, $m = 28,57$; $n = 22,64$; $\lambda\overline{b\,b} = 9,9484$, und $p - \lambda\overline{b\,b} = 15,0516$. Nun auch $\frac{22,64}{28,57} \cdot 7,5258 = 5,9637$, was mit $\frac{1000}{25}$, oder 40, multiplicirt den Wehrt der Anwartschaft auf 1000 Rthlr beym Tode der jüngsten Person zahlbar, giebt = 238,5 Rthlr. für den Fall, wenn die *ältere* B überlebet. Für den andern Fall wird der Wehrt $14,2184 - 5,9637 = 8,2547$, und $40 \cdot 8,2547 = 330,1$ Rthlr. Die genauen Wehrte sind 234,9 und 338,8 Rthlr. nach §. 184.

Ex. 2. Ist die jüngere von 20, und die ältere von 50 Jahren, so findet man die Anwartschaften auf 1000 Rthlr. für das Ueberleben der *älteren* nach *Simpson*, 167,5 Rthlr., nach der obigen richtigen Berechnung 135,3 Rthlr.; der Unterschied also 32,2 Rthlr. Für das Ueberleben der jüngern giebt *Simpsons* Regel 447 Rthlr., was wieder um 32 Rthlr. unterschieden ist. Diese Abweichung ist doch schon beträchtlich. Sie wird noch grösser seyn bey Personen, deren Alter noch mehr verschieden ist.

Indessen kann *Simpsons* Auflösung noch immer als Approximation zugelassen werden. Dafür gab er sie auch nur aus; und dass sie das sey, suchte er auch nur durch

durch die Gründe zu zeigen, die er davon angiebt. *) Uebrigens ist zwar das richtige Verfahren nicht völlig so kurz als diese Näherung, aber ich meine, der Unterschied sey zu erheblich, um in Praxis sich mit der letztern zu behelfen.

187.

Satz. 52. Wenn eine Summe zahlbar ist beym Tode einer Person von gegebenen Alter a, unter der Bedingung, dass diese eine andere Person B vom gegebenen Alter b, überlebe (oder dass sie die längstlebende unter den beyden gegebenen sey), so ist der baare Wehrt der Anwartschaft auf jene Summe gleich dem Unterschied zwischen dem Wehrt dieser Summe als einer Erbschaft von A betrachtet, und ihrem nach dem nächst vorhergehenden Satz (in §. 184.) *zu berechnenden Wehrt auf den Tod von A, im Fall A vor B abstirbt.*

Wenn der Wehrt der Summe 1 beym Tode von A, im Fall A *zuerst* stirbt, *W* heisset, so ist der Wehrt derselben Summe im Fall A *zuletzt* stirbt

$$= 1 - \frac{\lambda \overline{ab}}{p} - W.$$

Beweis. Es soll B todt seyn, wenn A *stirbt.* Also ist der Wehrt der Summe, die beym Tode von A sogleich zahlbar ist, für das *erste Jahr* $= \frac{(B - {}^{1}B)\,\Delta\,A}{A\,B}$.

*) In seinen angeführten *Exercises.* p. 316.

Für das *zweyte Jahr* hat man ihn $= \frac{(B - {}^{\underline{2}}B)\,\Delta\, {}^{\underline{1}}A}{A.\,B.\,r}$;

für das *nte*, $\frac{(B - {}^{\underline{n}}B)}{A.\,B} . \frac{\Delta\, {}^{\underline{n-1}}A}{r^{n-1}}$ und so ferner. Das erste Jahr wird die Ausgabe nicht *discontirt*, weil sie gleich im Anfang als baar auszugeben angesehen werden muss. (§. 183.) Folglich ist der gesammte Wehrt aus allen Jahren

$$= \left(\frac{B\,\Delta\,A}{A.B} + \frac{B.\,\Delta\,{}^{\underline{1}}A.}{A.\,B.\,r} + + \right) - \left(\frac{{}^{\underline{1}}B.\,\Delta\,A}{A.\,B} + \frac{{}^{\underline{2}}B\,\Delta\,{}^{\underline{1}}A}{A.\,B.\,r} + + \right)$$

$$= \left(\frac{\Delta\,A}{A} + \frac{\Delta\,{}^{\underline{1}}A}{A.\,r} + + \right) - \left(\frac{{}^{\underline{1}}B\,\Delta\,A}{A.\,B} + \frac{{}^{\underline{2}}B.\,\Delta\,{}^{\underline{1}}A}{A.\,B.\,r} + + \right).$$

Der erste Theil ist der Wehrt der *Erbschaft* von A (§. 99.) und der letzte der Wehrt der Summe beym Tode A, wenn A vor B stirbt (§. 178. 179.)

Ex. Ist *a* das Alter von A, 30, und *b* das Alter von B, 40 Jahr, die gegebene Summe 1000 Rthlr., so ist der Wehrt der Anwartschaft beym Tode von A, wenn A *zuerst* stirbt, 234,9 Rthlr. (§. 185.) Der Wehrt der *Erbschaft* ist $\left(1 - \frac{15,0847}{25}\right). 1000. = 396,6$ Rthlr.; folglich der gesuchte Wehrt für den Fall, wenn A *zuletzt* stirbt $= 161,7$ Rthlr.

Soll die Summe zahlbar seyn beym Tode der *ältern* Person B, im Fall diese *zuletzt* stirbt, so ist der Wehrt der Summe bey ihrem Tode, wenn sie *zuerst* stirbt (das

Alter

Alter von 40 Jahr gesetzt) 333 Rthlr. (§. 184.) Nun ist in diesem Fall der *Wehrt der Erbschaft*

$$1000\left(1-\frac{\lambda\overline{40}}{p}\right)=\left(1-\frac{13,1565}{25}\right).\ 1000.=473,7.$$

Der Unterschied also, oder der gesuchte Wehrt wenn B *zuletzt* stirbt, ist 139,3 Rthlr.

188.

Zusatz. Man nehme die beyden Wehrte zusammen, den von der *Anwartschaft auf den Tod A, wenn A überlebet*, und den von der *Anwartschaft auf den Tod B, wenn B überlebet*, so bekommt man aus §. 187. und §. 184. den Wehrt

$$1-\frac{\lambda\overline{a}}{p}+1-\frac{\lambda\overline{b}}{p}-\left(1-\frac{\lambda\overline{ab}}{p}\right).$$

$$=1-\frac{\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}-\lambda\overline{ab}}{p}.$$ Aber $\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}-\lambda\overline{ab}$ ist der Wehrt der *Rente auf zwey Leben nach einander*, oder der *Rente auf das längste Leben*, wie unten gezeiget werden soll. Daher ist die obige Summe der beyden Anwartschaften so groß als das *Grundcapital*, *weniger der Rente auf das längste Leben*, multiplicirt mit der zahlbaren Summe, als zinstragendes Capital betrachtet, das ist mit der zahlbaren Summe durch das Grundcapital dividirt. So ist es auch der Natur der Sache gemäß. Denn wer *beyde* Anwartschaften hat auf die Summe, so wohl beym Tode A, wenn A *zuletzt* stirbt, als beym Tode B, wenn B *zuletzt* stirbt, der bekommt die Summe gewiß

gewiſs in jedem Fall, ***alsdenn***, wenn der *Längſtlebende* ſtirbt, das iſt, er bekommt die Erbſchaft des *Längſtlebenden*, das iſt, das Grundcapital weniger der den Zinſen gleichen Leibrente des Längſtlebenden. Nach der XXVIII[ſten] Tabelle iſt die Rente des *Längſtlebenden* auf zwo Leben nach einander für 30 und 40 Jahre, 17,4596; und $1000.\left(1-\frac{17{,}4596}{25}\right)=301{,}6$ Rthlr. das iſt, ſo viel als die Summe von dem Wehrt der Anwartſchaft auf 1000 Rthlr. beym Tode der *zuletzt ſterbenden* Perſon, wenn dieſe die jüngere iſt, oder von 161, 7 Rthlr.; und von 139, 9 Rthlr. als dem Wehrt beym Tode der ältern, wenn *dieſe zuletzt* ſtirbt.

189.

Satz 53. Der Wehrt des Ueberlebens von A über B, beyde vom gegebenen Alter, welcher oben (§. 127.) durch den Unterſchied der *Leibrente* von A, und der *Verbindungsrente beyder*, $(\lambda\,\overline{a} - \lambda\,\overline{a\,b})$ ausgedruckt wird, iſt auch gleich der Summe

$$\frac{\Delta B}{B}\cdot\ \lambda\,\overline{a} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A}\cdot\ \frac{\overset{1}{-}A}{A.\,r}\cdot\ \lambda\,\overline{a+1}$$

$$+\ \frac{\Delta \overset{2}{-}B}{B}\cdot\ \frac{\overset{2}{-}A.}{A}\cdot\ \frac{\lambda\,\overline{a+2}}{r^2} + +$$

Beweis. Es iſt einerley, ob A, nach dem Tode von B, *jährlich* 1 *lebenswierig*, jedoch am Ende der Termine empfangen, oder alsdenn auf einmal abgefunden

werden

werden solle; dadurch, dafs ihm der am Ende des Todesjahrs von B fällige Termin, und zugleich der baare Wehrt einer Leibrente auf die übrige Lebenszeit bezahlet wird. Nun ist die Wahrscheinlichkeit der Ausgabe im ersten Jahr, $\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A}$; Denn $\Delta B . \overset{1}{-}A$ ist die *Summe der Paare*, wovon im ersten Jahr eine von B abstirbt, und eine von A am Leben bleibt, wenn A B die *Anfangszahl der Paare* ist, (§. 105.) und die Ausgabe selbst $1 + \frac{\lambda\overline{a+1}}{r}$. Daher ihr *baarer Wehrt*

$\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A}\left(1 + \frac{\lambda\overline{a+1}}{r}\right)$. Für das *zweyte* Jahr hat man

$\frac{\Delta \overset{1}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{2}{-}A}{A}\left(1 + \frac{\lambda\overline{a+2}}{r^2}\right)$, und so ferner

$\frac{\Delta \overset{n}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{n+1}{-}A}{A}\left(1 + \frac{\lambda\overline{a+n+1}}{r^{n+1}}\right)$, bis entweder

$\Delta \overset{n}{-}B$, oder $\overset{n+1}{-}A = 0$ wird.

Aber $\frac{\overset{1}{-}A}{A}\left(\frac{1+\lambda\overline{a+1}}{r}\right) = \lambda\overline{a}$, und

$\frac{\overset{2}{-}A}{A}\left(\frac{1+\lambda\overline{a+2}}{r}\right) = \lambda\overline{a+1}$; und so ferner

$\frac{\overset{n+1}{-}A}{\overset{n}{-}A}\left(\frac{1+\lambda\overline{a+n+1}}{r}\right) = \lambda\overline{a+n}$. (§. 69.) Daher wird die Summe $\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A}\left(\frac{1+\lambda\overline{a+1}}{r}\right) +$

$\Delta \overset{1}{-}B$

$$\frac{\Delta \overset{1}{-} B. \overset{2}{-} A}{B.\ A} \cdot \left(\frac{1 + \lambda \overline{a + 2}}{r^2}\right) + +$$

$$\frac{\Delta \overset{n}{-} B}{B} \cdot \frac{\overset{n+1}{-} A}{A} \left(\frac{1 + \lambda \overline{a + n + 1}}{r^{n+1}}\right) = \frac{\Delta B}{B} \cdot \lambda \overline{a} +$$

$$+ \frac{\Delta \overset{1}{-} B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-} A}{A} \frac{\lambda \overline{a + 1}}{r} + + \frac{\Delta^{n} B}{B} \cdot \frac{\overset{n}{-} A}{A} \cdot \frac{\lambda \overline{a + n}}{r^n}.$$

Dieselbe Summe ist auch $= \lambda \overline{a} - \lambda \overline{a\ b}$. (§. 127.)

190.

Anmerkung. Diese Gleichheit beyder Summen kann auch aus ihnen selbst erwiesen werden. *Zusätze* zu diesem Capitel. *) Ueberhaupt muss es einerley seyn, ob ***eine Rente auf Lebenszeit, nach und nach*** in jährlichen Terminen bezahlt, oder ob statt ihrer alsdenn, wenn die Bedingungen eintreten, unter denen sie das erstemal zahlbar wird, dieser erste Termin, und für die übrigen Termine ihr baarer Wehrt auf einmal erleget werde? Nur verstehet sichs, dass die Bedingungen der Leibrente, wenn sie *einmal* fällig geworden ist, sich nachher in der Folge, so lange der Rentenier lebt, nicht ändern.

*) §. 6.

Dritter

Dritter Abſchnitt.

Von Anwartſchaften, die von dreyer Perſonen Leben abhängen.

191.

Anmerkung.

Wenn es auf das Leben dreyer Perſonen ankommt, ſo können die hieher gehörenden Aufgaben unter *folgende* Claſſen gebracht werden.

1) Zur *erſten* gehören ſolche, wo jemand *eine Leibrente* zu erwarten hat, *die von dem Leben oder Tode zwoer andern gegebenen Perſonen abhängt*, ohne daſs es dabey auf eine beſtimmte Folge im Sterben der beyden letztern ankomme. Daſs der Expectant der Leibrente am Leben ſeyn müſſe, wenn die Rente fällig wird, verſteht ſich von ſelbſt.

2) Eine andere Art von Aufgaben iſt es, *wenn es eine zahlbare Summe iſt*, oder ein zu erwartendes Vermögen, wobey die Fallzeit vom Leben und Tode *dreyer gegebenen Perſonen* abhängt. Dabey kann auch mehr oder minder eine *gewiſſe Folge des Abſterbens unter ihnen* beſtimmt ſeyn.

3) Wenn der jetzige Wehrt einer Leibrente für eine gewiſſe Perſon geſucht wird, die nicht bloſs von dem Leben und Tode, ſondern auch von einer *beſtimmten Folge im Sterben bey zwo andern Perſonen* abhängt.

Herr

Herr *Morgan* hat die hieher gehörige Aufgaben alle nach der vorher erwähnten *Simpsonischen* Approximation aufgelöset. Uebrigens ist er weiter als andere hierin gegangen. Ich will versuchen diese Aufgaben so zu stellen, dass man sie leicht übersehen, und auf ein Paar allgemeine, sie alle zurück bringen könne. Es wird hierbey vorausgesetzet, dass die *Verbindungsrenten für drey Personen* gegeben sind.

192.

Die *drey* Personen sind A, B, C, und ihr Alter *a*, *b*, *c*. Der Exspectant sey C, auf den die Leibrente fallen soll, so kommen bey der ersten Classe von Aufgaben folgende verschiedene Bedingungen und Bestimmungen vor.

Satz 54. 1) *C soll die Leibrente haben, so lange A und B beysammen leben,* (folglich, so lange *alle drey* gegebene Personen zusammen leben.)

Alsdenn ist der Wehrt der Anwartschaft von C, gleich dem Wehrt einer Verbindungsrente auf alle drey Personen = $\lambda \overline{abc}$.

Diess ist für sich klar.

193.

Zusatz 1. Soll die Leibrente des C auf eine bestimmte Zahl von Jahren, auf *n* Jahren beschränkt seyn; (wenn z. E. zwey Personen, so lange sie zusammen leben, für

für ein Kind jährlich was beſtimmtes geben, ſo lange, bis dieſes zu einem beſtimmten Alter gekommen iſt), ſo iſt die Leibrente $\lambda_{\overline{a\,b\,c}}$ nur auf *n* Jahre zu berechnen. Das iſt, es muſs eine *aufhörende Verbindungsrente* für drey Perſonen geſucht werden, die durch ${}^{+n}\lambda_{\overline{a\,b\,c}}$ (nach der Analogie, wie oben §. 30.) bezeichnet werden kann: Ihr Wehrt wird, wenn anders für *drey* Perſonen von jedem Alter die *Verbindungsrenten* gegeben ſind, leicht gefunden. Es iſt nämlich ${}^{+n}\lambda_{\overline{a\,b\,c}} = \lambda_{\overline{a\,b\,c}}$

$$- \frac{{}^{-n}A\ {}^{-n}B\ {}^{-n}C}{A.\ B.\ C} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \lambda_{\overline{(a+n).(b+n).(c+n)}}.$$

Das iſt: Von dem Wehrt der Verbindungsrente für die drey gegebene Perſonen wird abgezogen die *Verbindungsrente dreyer anderer*, jede um *n* Jahre älter, wenn die letztere vorher in dem Verhältniſs des Products der Anfangszahlen für das *letztere* Alter zu dem Product derſelben für das *gegebene* Alter verkleinert, und überdieſs auf die gegebene Zahl von *n* Jahren zurück diſcontirt iſt.

194.

Zuſatz 2. Soll die Leibrente für C auf *n* Jahre *aufgeſchoben* ſeyn, ſo iſt das letztere nach dem vorhergehenden Zuſatz abzuziehende Stück ſelbſt der geſuchte Wehrt. Wird die aufgeſchobene Leibrente auch hier nach der Analogie bezeichnet durch ${}^{-n}\lambda_{\overline{a\,b\,c}}$, ſo iſt

$${}^{=n}\lambda_{\overline{a\,b\,c}} = \frac{{}^{-n}A\ {}^{-n}B\ {}^{-n}C}{A.\ B.\ C} \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \lambda_{\overline{(a+n).(b+n).(c+n)}}.$$

195.

Satz 55. 2) *Der zweyte Fall iſt: C ſoll die Leibrente haben, nur wenn A und B beyde todt ſind. Dann iſt ihr Wehrt gleich der Leibrente von C, wenn die Verbindungsrenten von A und C, und von B und C, davon abgezogen, und die Verbindungsrente aller dreyen dazu addirt wird.*

Es iſt nämlich der geſuchte Wehrt

$$=\left(\frac{A-\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{B-\overset{1}{-}B}{B}\cdot\frac{\overset{1}{-}C}{Cr}++\right)$$

$$=\left(\frac{\overset{1}{-}C}{Cr}++\right)-\left(\frac{\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{B.C}\cdot\frac{1}{r}++\right)-\left(\frac{\overset{1}{-}A\overset{1}{-}C}{A.C}\cdot\frac{1}{r}++\right)-$$

$$++\left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{A.B.C}\cdot\frac{1}{r}++\right)=\lambda c-\lambda\overline{bc}$$

$$-\lambda\overline{ac}+\lambda\overline{abc}.$$

196.

Zuſatz. Dieſs iſt der *Wehrt des Ueberlebens der Perſon C über zwey andere gegebene A, B.* Auch der Wehrt einer *Wayſenpenſion*, die nach beyder Eltern Tode fällig wird. Soll ſie nur bis auf ein gewiſſes Alter der Kinder gehen, ſo ſind alle Theile, woraus ſie beſtehet, *aufhörende Renten;* ſie hören auf nach dem *Zieljahr.*

Ex. Das Alter des *Vaters* A ſey 50 Jahr, der *Mutter* B, 40 Jahr, und des Kindes C 15 Jahr. Letzteres ſoll

nach

nach dem Tode beyder Eltern eine jährliche Pension 1 haben; so ist $\lambda\overline{15} = 17,6104$, $\lambda\overline{15.\ 40} = 11,6761$, $\lambda\overline{15.\ 50} = 9,8279$, $\lambda\overline{15.\ 40.\ 50.} = 7,9331$. Der Wehrt der Letztern ist nach dem Satz in §. 163. nur durch Näherung gesucht. Also der *Wehrt des Ueberlebens der jüngsten Person* $= 17,6104 + 7,9331 - 11,6761 - 9,8279 = 4,0395$. Soll die Pension von C nur bis zum *25sten Jahr* des Alters gehen, diess noch eingeschlossen, so ist $\lambda\overline{15} = 17,6104$; und die nach zehn Jahren aufhörende Leibrente

$${}^{+10}\lambda\overline{15} = 17,6104 - \frac{466}{511} \cdot 0,6756.\ \lambda\overline{25}$$

$$= 17,6104 - 0,6159.\ 15,987$$

$$= 17,6104 - 9,8464 = 7,7640.$$

Ferner $\lambda\overline{15.\ 40} = 11,6761$, und die nach zehn Jahren aufhörende Verbindungsrente

$${}^{+10}\lambda\overline{15.\ 40} = 11,6761$$

$$- 0,6756.\ \frac{300.\ 466}{374.\ 511} \cdot \lambda\overline{25.\ 50}$$

$$= 11,6761 - 0,6756.\ 0,7315.\ 9,4564$$

$$= 11,6761 - 4,6733 = 7,0028.$$

Auch $\lambda\overline{15.\ 50.} = 9,8279$ und

$${}^{+10}\lambda\overline{15.\ 50} = 9,8279$$

$$- 0,6756.\ \frac{210}{300} \cdot \frac{466}{511} \cdot 7,5464 = 9,8279$$

$$- 3,2547 = 6,5732.$$

 Endlich

Endlich $\lambda\overline{15.\ 40.\ 50.} = \lambda\overline{15.\ 59,6} = 7,9331$, und wenn sie nur 10 Jahre dauern soll, (oder $\overset{+10}{-}\lambda\overline{15.\ 40.\ 50}$)

$= 7,9331 - 0,6756. \frac{210.\ 300.\ 466}{300.\ 374.\ 511}. \lambda\overline{25.\ 50.\ 60.}$

$= 7,9331 - 0,6756.\ 0,5121.$

$5,9720 = 7,9331 - 2,0662 = 5,8669.$

Folglich der gesuchte Wehrt $= 7,7640 - 7,0028 - 6,5732 + 5,8669 = 0,0549.$

197.

Satz 56. 3) *C soll die Leibrente haben, wenn eine der zwo übrigen gegebenen Personen A todt ist, und dann so lange die andere B lebet. Alsdenn ist der Wehrt der Erwartung*

$$= \left(\frac{(A - \overset{1}{-}A)}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$$

gleich dem Wehrt der Verbindungsrente von C und der zugleich Lebenden B, wenn davon der Wehrt der Verbindungsrente für alle drey abgezogen wird, oder $= \lambda\overline{b\ c} - \lambda\overline{a\ b\ c}.$

Zusatz 1. Ist die Bedingung, dass A mit C fortleben soll, B gestorben seyn soll, so ist der gesuchte Wehrt $= \lambda\overline{a\ c} - \lambda\overline{a\ b\ c}.$

Zusatz 2. Soll also überhaupt C eine Leibrente geniessen, so lange *einer von beyden,* A *oder* B, *mit* C *fortlebet,* nachdem die andere tod ist, so ist der Wehrt der Erwartung $= \lambda\overline{b\ c} + \lambda\overline{a\ c} - 2\lambda\overline{a\ b\ c}.$

198.

Satz 57. 4) *Der vierte Fall ist, wenn C die Leibrente haben soll, so lange noch Eine Person von den beyden übrigen lebet, es sey welche es wolle. Alsdenn ist der Wehrt der Erwartung* W

$$= \left(\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{{}^{1}B}{B} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{1}{r} + + \right)$$

$$+ \left(\frac{(B - {}^{1}B)}{B} \cdot \frac{{}^{1}A}{A} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{1}{r} + + \right) + \left(\frac{{}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C}{A.B.C.r} + + \right)$$

$= \lambda\,\overline{a\,c} + \lambda\,\overline{b\,c} - \lambda\,\overline{a\,b\,c}$. In diesem Fall bekommt C nicht nur das, was in dem *Zusatz 2.* (§. 197.) gefunden ist, sondern auch noch die Rente so lange alle drey zusammen leben.

199.

Satz 58. Endlich fünftens, C soll die Leibrente haben, sobald einer von den beyden A oder B todt ist, und dann ohne weitere Bedingung. Alsdenn ist der gesuchte Wehrt

$$= \left(\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{1}{r} + + \right) +$$

$$+ \left(\frac{(A - {}^{1}A).{}^{1}B}{A.\,B} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{1}{r} + + \right) + \left(\frac{(B - {}^{1}B)}{B} \frac{{}^{1}A}{A} \cdot \frac{{}^{1}C}{C} \frac{1}{r} + + \right)$$

= den Wehrten aus §. 195. und aus §. 197. *Zusatz 2.* zusammen, $= \lambda\,\overline{c} - \lambda\,\overline{a\,b\,c}$.

200.

Anmerkung. Diese beygebrachten Fälle sind die *einfachen*, welche zu der ersten Classe gehören, alle. Daraus lassen sich die zusammengesetztern auflösen. Einige von den letztern, die zu den Tontinen gehören, kommen noch in dem nächst folgenden Capitel vor.

Die *zwote Classe von Fällen* enthält solche, wo eine Summe 1, als eine *Erbschaft*, beym Absterben Einer der drey gegebenen Personen zahlbar ist, unter der Bedingung, dass diese Personen in einer *gewissen Ordnung* wegsterben. Wenn der Erblasser stirbt, können 1) die andern *beyde noch am Leben seyn*, das ist, *der Erblasser* soll *zuerst* sterben unter den dreyen. 2) Eine von den beyden andern kann todt, die zwote am Leben seyn, das ist, der *Erblasser kann der zweyte im Sterben seyn* unter den dreyen. Endlich beyde ausser dem Erblasser können vorher todt seyn, wenn jener stirbt, das ist, der *Erblasser soll der dritte im Sterben seyn.*

Bey dem *zweyten* und *dritten* Fall können wiederum Verschiedenheiten statt finden. Bey dem *zweyten* ist es entweder *gleich viel*, welcher von den beyden andern *vor*, und welcher *nach* dem Erblasser abgehe; oder ist auch *insonderheit* bestimmt, welche von jenen zuerst sterben soll. Bey dem *dritten* Fall kann es gleichgültig seyn, welche von *den* beyden *vor dem Erblasser gestorbenen*, die *erste* gewesen sey, und welche die *zwote;*

oder *es wird insonderheit bestimmt, welche zuerst gestorben seyn solle.*

Alle hieher gehörigen Aufgaben kommen auf zwo Sätze an, außer denen, die bey den vorhergehenden schon gebraucht sind. Damit reicht man denn auch aus bey der dritten Classe der Aufgaben. Da aber auch bey der *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens*, und *des Sterbens in einer gewissen Ordnung*, ähnliche Aufgaben vorkommen, wie bey der zu suchenden Anwartschaft, so will ich die hieher gehörigen Sätze gleichfalls beybringen.

201.

Satz 59. Die Wahrscheinlichkeit, daſs von dreyen Personen, A, B, C vom Alter a, b, c, die letztere C, es sey die älteste, oder eine andere, zuerst sterbe (so nämlich, daſs A und B am Ende des Jahrs, in dessen Lauf C stirbt, noch am Leben sind) wird gegeben durch

$$\left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B.\ C}{A.\ B.\ C} + \frac{\overset{2}{-}A\ \overset{2}{-}B.\ \overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C} + +\right) - \left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B\ \overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C} + +\right)$$

das ist, *durch den Rest, wenn von der Verbindungsdauer von A und B mit einer dritten, welche um ein Jahr jünger ist als C, vergrössert in dem Verhältniſs der Zahl der Lebenden für dieſs jüngere Alter zu der Zahl derselben für das Alter von C, die Verbindungsdauer der gegebenen dreyen abgezogen wird.*

Beweis. Es ist nämlich die gesuchte *Wahrscheinlichkeit* die Summe

$$\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\Delta C}{A.\ B.\ C} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B.\Delta\overset{1}{-}C}{A.B.C} ++ = \frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\ C}{A.\ B.\ C}$$

$$-\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B.\overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C} - \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B.\overset{2}{-}C}{A.\ B.\ C} ++$$

$$= \frac{\overset{-1}{-}C}{C}.\ C_{\overline{a.b.(c-1)}} - C_{\overline{abc}}.$$

202.

Zusatz 1. Wenn auch die Fälle mitgerechnet werden sollen, wo C mit B, oder mit A, oder mit allen beyden in demselben Jahre stirbt, aber doch zuerst, das ist, wenn von der Wahrscheinlichkeit des Vorsterbens des C überhaupt die Rede ist, so ist solche

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{\overset{-1}{-}A}{A}.\left(\frac{\overset{-1}{-}C}{C}.\ C_{\overline{(a-1)b.(c-1)}} - C_{\overline{(a-1)b.c}}\right)$$

$$+ \frac{1}{6}.\ \frac{\overset{-1}{-}B}{B}.\left(\frac{\overset{-1}{-}C}{C}.\ C_{\overline{a.(b-1).(c-1)}} - C_{\overline{a.(b-1).c}}\right)$$

$$-\frac{1}{3}.\left(\frac{\overset{-1}{-}A.\overset{-1}{-}B}{A.\ B}.C_{\overline{(a-1)(b-1).c}} - \frac{\overset{-1}{-}C}{C}.C_{\overline{a.b.(c-1)}}\right)$$

Den Beweis hiervon habe ich, weil er etwas weitläuftig ist, in die *Zusätze* gebracht. *)

*) §. 7.

203.

Zusatz 2. Sind alle drey Personen von gleichem Alter, so ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{3}$. Die übrigen Theile der Formel heben sich in diesem Fall auf.

Anmerkung. ***Simpson*** und ***Morgan*** haben sich durchgehends hierbey der *Hypothese vom gleichförmigen Sterben bedienet.* Die Abweichung von den wahren Wehrten, die daraus entsteht, mag in den meisten Fällen nicht sehr beträchtlich seyn, zumal wenn man für die *Altersergänzungen* nach ***Simpsons*** Methode die *doppelte mittlere Lebensdauer* nimmt, Sind α, β, γ diese *Ergänzungen*; so sey noch n die kleinste von ihnen, unbestimmt, welche es sey. Alsdenn wird die Grösse der hier gesuchten *Wahrscheinlichkeit* (W), *dass C zuerst sterbe*, seyn $= \frac{n}{\gamma}\left(1 - \frac{n}{2\alpha} - \frac{n}{2\beta} + \frac{n^2}{3\alpha\beta}\right)$. Siehe *Zusätze.* *)

Sind α, β, γ gleich, so ist $W = \frac{1}{3}$. Ist $\alpha = \beta = n$, so ist $W = \frac{n}{3\gamma}$.

204.

Satz 60. Die Wahrscheinlichkeit, dass C unter drey gegebenen Personen am längsten lebe, (oder der dritte im Sterben sey) ist die Wahrscheinlichkeit, dass C sterbe, wenn beyde A und B todt sind. Diese ist $\frac{\Delta C}{C}$.

*) §. 3.

$$\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{(A-\overset{1}{-}A)(B-\overset{1}{-}B)}{A\qquad B}++=S.\frac{\Delta C}{C}-S.\frac{\Delta C.\overset{1}{-}A}{C.\,A}$$

$$-S.\frac{\Delta C.\overset{1}{-}B}{C.\,B}+S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{\overset{1}{-}B}{B.},=1$$

weniger den beyden Wahrscheinlichkeiten, daſs C *vor* A, und daſs C *vor* B sterbe (§. 168.), wenn wiederum die Wahrscheinlichkeit, daſs C zuerst stirbt (§. 201.) dazu addirt wird.

205.

Satz 61. Die Wahrscheinlichkeit, daſs C der zweete im Sterben sey, ist so groſs als die beyden Wahrscheinlichkeiten, daſs A todt sey, und B noch lebe, wenn C stirbt, zusammen genommen.

Die *erste* von diesen beyden Wahrscheinlichkeiten ist

$$S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{(A-\overset{1}{-}A)}{A}\cdot\frac{\overset{1}{-}B}{B}=S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{\overset{1}{-}B}{B}$$

$$-S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{\overset{1}{-}B}{B};$$ das ist, *die Wahrscheinlichkeit, daſs C vor B sterbe* (§. 168.) *weniger der Wahrscheinlichkeit, daſs C zuerst aus dreyen stirbt.* (§. 201.)

Die zwote ist $=S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{(B-\overset{1}{-}B)}{B}.$

$$=S.\frac{\Delta C.\overset{1}{-}A}{C.\,A}-S.\frac{\Delta C}{C}\cdot\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\,B}.$$ das ist, die *Wahrscheinlichkeit, daſs C sterbe vor A, weniger der, daſs C zuerst aus dreyen stirbt.*

Beyde

Beyde zusammen machen

$$S.\frac{\Delta C}{C}.\ \frac{\overset{1}{-}A}{A} + S.\frac{\Delta C}{C}.\ \frac{\overset{1}{-}B}{B}$$

$$-2\,S.\frac{\Delta C}{C}.\ \frac{\overset{1}{-}A}{A}.\ \frac{\overset{1}{-}B}{B}.$$

206.

Zusatz. Nimmt man die *Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebens* von A über C, und von B über C, nach *Satz 49.* §. 177, so wie sie angenommen werden müssen, wenn die Fälle des Zugleichsterbens wegfallen sollen, und eben so die *Wahrscheinlichkeit des Zuerststerbens* nach §. 217, so bekommt man auch die Wahrscheinlichkeiten in §. 204. und §. 205. auf dieselbe Art, und in demselben Sinn.

207.

Satz 62. Der baare Wehrt einer bey dem Absterben einer Person C zahlbaren Summe, im Fall selbige stirbt vor zwo andern A und B, ist

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{\lambda\overline{a\,b\,c}}{p}\right)+\frac{r}{6}.\ \frac{\overset{1}{-}A}{A}\left(\frac{\overset{1}{-}C}{C}.\ \lambda\overline{(a-1)b(c-1)}.\right.$$

$$\left.-\lambda\overline{(a-1)b.c.}\right)+\frac{r}{6}.\ \frac{\overset{1}{-}B}{B}.\left(\frac{\overset{1}{-}C}{C}\ \lambda.\overline{a.(b-1).(c-1)}.\right.$$

$$\left.-\lambda\overline{a.(b-1).c.}\right)-\frac{r}{3}.\left(\frac{\overset{1}{-}A}{A}.\frac{\overset{1}{-}B}{B}.\ \lambda\overline{(a-1)(b-1).c}.\right.$$

$$\left.-\frac{\overset{1}{-}C}{C}.\ \lambda\overline{a.b.(c-1)}\right).$$

208.

Anmerkung. Die Formel ist der im §. 202. ähnlich, nur dass hier *Verbindungsrenten* gebraucht werden statt der *Dauer* vorher, wo denn jede derselben mit *r* noch zu multipliciren ist, weil die für das *erste* Jahr zahlbare Summe, als gleich im Anfang fällig anzusehen, und daher nicht discontirt werden darf. Ferner kommt an statt $\frac{1}{3}$tel, hier $\frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right)$ das ist $\frac{1}{3}$tel *des Wehrts einer bey dem Aufhören der Coexistenz von dreyen zahlbaren Summe.* Diess läßt sich so schon übersehen, ich habe es aber in den *Zusätzen* *) deutlicher gezeigt.

209.

Zusatz 1. Ist $a = b = c$, so ist dieser Wehrt, (er sey W) $= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right)$.

Zusatz 2. Wenn das Alter auch nicht gleich ist, man nimmt aber die *drey* Anwartschaften zusammen für den Fall, dass C die erste im Sterben sey, und für die beyden andern, dass A es sey, und dass B es sey, so wird die Summe dieser drey Wehrte $= 1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}$, das ist dem *Wehrt der Summe* 1, *die bey der Trennung, es sterbe zuerst, welche man will, zahlbar ist.* So lehrt es auch ohne Rechnung die Natur der Sache, womit die gegebenen Formeln übereinstimmen, wie in den *Zusätzen* der letzt angeführten Stelle ebenfalls erwiesen ist.

Zusatz

*) §. 9. 10.

Zusatz 3. Wird nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben gerechnet, so wird $w' = \frac{1}{\gamma}\,\lambda\,\overline{a\,b}$; $\lambda\,\overline{a\,b}$ für die Verbindungsrente nach *augenblicklichen* Renten genommen. Nur im Fall γ kleiner ist als α, und als β, das ist, im Fall die Person C die *älteste* ist unter den dreyen gegebenen, darf von $\lambda\,\overline{a\,b}$ nicht mehr genommen werden, als der Theil, der auf γ Jahre geht. Ist das Alter aller dreyen gleich, so ist wiederum $w' = \frac{1}{\gamma}\,\lambda\,\overline{c\,c} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\,\overline{c\,c\,c}}{p}\right)$. Siehe *Zusätze.* *)

210.

Anmerkung 1. Es giebt einige Aufgaben, wozu nöthig ist, die *Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens* Eines von zweyen, welche in der Reihe $\frac{\overset{1}{\leftarrow}B.\,\Delta A}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{\leftarrow}B\,\Delta\overset{1}{\leftarrow}A}{A.} ++$ enthalten ist, *für jedes Jahr insonderheit* zu suchen. Die Zähler dieser Theile einzeln genommen drucken die Zahl der Fälle aus, worin A am Leben bleibt, wenn B abgeht, und die Brüche selbst die *Wahrscheinlichkeit*, dass das Vorsterben von B in *dem einzelnen Jahre* erfolge. Daraus ist klar, dass wenn man diese Theile von zweyen, dreyen, und so ferner mehrern Jahren zusammen nimmt, so hat man die Wahrscheinlichkeit, dass A, B überlebe in den zwey, drey, und so ferner, Jahren. Diess ist denn

*) §. 11.

denn auch zugleich die *Wahrscheinlichkeit*, *daſs unter den in ſo vielen Jahren erfolgten Trennungen*, *diejenige geweſen ſey*, *bey der A übrig blieb*, *als B abgieng.* Denn die Summe der Zähler dieſer Brüche, die einen gemeinſchaftlichen Nenner haben, drückt die Summe dieſer Claſſe von Trennungen aus, welche bis dahin erfolget ſind. Man hat alſo auch in dieſen Summen von Brüchen die *Wahrſcheinlichkeit*, *daſs A*, *B überlebet habe nach Ablauf ſo vieler Jahre*, *für welche man die Theile zuſammen nimmt.* So iſt $\frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{A.\,B}$ die Wahrſcheinlichkeit, daſs B vor A geſtorben ſey im *erſten* Jahr; $\frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\,\Delta \overset{1}{-}B}{A.\,B}$ iſt ſie, daſs dieſs in den *beyden erſten Jahren* geſchehen ſey, und ſo weiter $\frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\,\Delta \overset{1}{-}B}{A.\,B} + + \frac{\overset{n}{-}A.\,\Delta \overset{n-1}{-}B}{A.\,B}$ die Wahrſcheinlichkeit, daſs A nach n Jahren B überlebet habe.

211.

Anmerkung 2. Die Reihe, *welche in jedem einzelnen Gliede die Wahrſcheinlichkeit ausdrückt*, *daſs in ſo viel Jahren*, *als der numerus termini iſt*, *A*, *B überlebet habe*, *iſt*, *wenn man die Hypotheſe vom gleichförmigen Sterben vorausſetzt*, folgende:

$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\alpha\beta} + \frac{2}{\beta} - \frac{2^2}{2\alpha\beta} + \frac{3}{\beta} - \frac{3^2}{2\alpha\beta} + +$, wovon

der

der Terminus generalis für das *n*te Glied $= \frac{n}{\beta} - \frac{n^2}{2\alpha\beta}$ ist. Hier sind wiederum α, β, die *Altersergänzungen.*

Der Beweis steht in den *Zusätzen* *), ist aber ohne diess leicht zu übersehen. Nach der erwähnten Hypothese ist die Reihe, welche die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A über B ausdruckt, wenn man auf ganze Jahre rechnet,

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha - 2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{\alpha - 3}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} + +$$

Hiezu kommt aber noch für jedes Jahr $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha\beta}$, nämlich die Hälfte von der Wahrscheinlichkeit, dass beyde in demselben Jahre absterben. Folglich wird die gesuchte Reihe

$$= \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\alpha\beta} + \frac{1}{\beta} - \frac{3}{2\alpha\beta} + \frac{1}{\beta} - \frac{5}{2\alpha\beta} + +.$$

Da nun die Summe der ungeraden Zahlen jedesmal den Quadraten der natürlichen Zahlen gleich ist, $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$ u.s.f. so wird die Reihe, welche die Summe von jenen Gliedern enthält, folgende:

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2\alpha\beta}\right) + \left(\frac{2}{\beta} - \frac{2^2}{2\alpha\beta}\right) + \left(\frac{3}{\beta} - \frac{3^2}{2\alpha\beta}\right) + +$$

$\left(\frac{n}{\beta} - \frac{n^2}{2\alpha\beta}\right)$. Das letzte Glied in dieser summatorischen Reihe ist, wo *n* der *kleinsten Altersergänzung*, sie sey α oder β, gleich wird. Es ist also entweder $\frac{\alpha}{2\beta}$, oder $1 - \frac{\beta}{2\alpha}$; jenes, wenn $n = \alpha$, diess wenn $n = \beta$ ist; und $= \frac{1}{2}$, wenn $\alpha = \beta = n$ ist.

212.

*) §. 2.

212.

Anmerkung 3. In der Aufgabe, wo man diese Summe gebraucht, würde die Rechnung zu weitläuftig werden, wenn man die Decremente genau aus den Tabellen nehmen wollte. *Simpson* und *Morgan* gebrauchen hier die Hypothese. Der *Terminus generalis* in §. 211. wird $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overset{n}{-}A}{A} - \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A.B}\right)$ wenn $\frac{\overset{n}{-}B}{B}$ für $\frac{\beta - n}{\beta}$, und $\frac{\overset{n}{-}A}{A}$ für $\frac{\alpha - n}{\alpha}$ gesetzet wird. Diesen Ausdruck durch die *Zahlen der Lebenden* habe ich in der Folge gebraucht. Für die Wahrscheinlichkeit, dass B überlebet habe, bekommt man ihn $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}A}{A} + \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A.\ B}\right)$. Suchet man den genauen Wehrt, so läst sich solcher durch die Coexistenzen für zwo Personen angeben. *)

Mittelst dieser Sätze können nun alle Aufgaben der zwoten und dritten Classe (§. 191.), die vom Ueberleben unter drey Personen abhangen, ihre Auflösung erhalten. Ich will solche nur kurz anzeigen.

213.

Satz 63. 1) *Eine Summe 1 ist zahlbar bey dem Tode einer Person A, wenn diese zuerst stirbt unter dreyen,* A, B, C. Das Alter der Personen *a*, *b*, *c* ist gegeben.

In

*) *Zusätze* §. 12.

In dieſem Falle hat man die Summe

$$\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{2}{-}C}{C} \frac{1}{r} + +$$

zu ſuchen. Sie wird gefunden nach dem 70ſten Satz §. 207.

Zuſatz. Zu dieſem Wehrt die zwey andern zugelegt für die Fälle, daſs B und C die erſten im Sterben ſind, ſo bekommt man $1 - \frac{\lambda\, \overline{abc}}{p}$. *Zuſatz* 2. §. 209. das iſt man findet überhaupt den Wehrt einer Anwartſchaft auf eine alsdenn zahlbare Summe, wenn von drey Perſonen eine abgeht, es ſey, welche es wolle.

214.

Satz 64. 2) *Der Erblaſſer A ſoll der zweyte in der Ordnung des Sterbens ſeyn, und inſonderheit B ſoll vor ihm ſterben, C ihn überleben.*

Alsdenn iſt folgende Summe zu ſuchen

$$\frac{B - \overset{1}{-}B}{B} \cdot \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{B - \overset{2}{-}B}{B} \cdot \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}C}{C} \frac{1}{r} + +$$

$$= \left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}C}{C} \frac{1}{r} + + \right)$$

$$- \left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A . \overset{2}{-}B . \overset{2}{-}C}{A . B . C} \frac{1}{r} + + \right)$$

Die *erſte* Summe iſt der Wehrt der Anwartſchaft 1

beym Tode des A im Fall C überlebet. (§. 187.) Die zwote ist die Anwartschaft auf die Summe, wenn B und C beyde überleben. Wiederum nach dem 62sten Satz. §. 207.

215.

Zusatz 1. Sind A, B, C am Alter gleich, so wird die gesuchte Summe $= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda\overline{ab}}{p}\right)$ $- \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right)$. Ist es *nicht bestimmt*, dass B insonderheit vor A absterben soll, sondern ist es genug, wenn nur eine von beyden, B oder C, vorher stirbt und die andere überlebt, so muss auf dieselbe Art, wie vorher, der Wehrt der Anwartschaft für den Fall gefunden werden, wenn C zuerst stirbt, und B zuletzt. Diesen Wehrt zu den vorhergefundenen addirt, giebt den gesuchten Wehrt, der, wie die Natur der Sache es mit sich bringt, so gross seyn muss als jene beyde zusammen genommen.

Zusatz 2. Sind wiederum die Personen gleich alt, so hat man

$$1 - \frac{\lambda\overline{ab}}{p} - \frac{2}{3}.\left(1 - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\lambda\overline{ab}}{p}$$
$$+ \frac{2}{3}\frac{\lambda\overline{abc}}{p}.$$

216.

Zusatz 3. Der Wehrt der Anwartschaft, wenn die Summe zahlbar ist bey dem Tode der zwoten im Sterben

aus

aus dreyen, welche auch dieſe zwote ſey, iſt ſo groſs als die Summe der Wehrte zuſammen, die man für die beſtimmten Fälle findet, in denen jede von den dreyen als die zwote angenommen wird, und in jedem dieſer Fälle iſt der Wehrt ſo groſs als zwey andere Wehrte für die beyden möglichen Verſchiedenheiten, daſs, wenn eine, z. B. A die *zwote* iſt, jede von den beyden andern B oder C die *erſte*, auch die *dritte* ſeyn kann. Der geſammte Wehrt auf den Tod zwoer aus dreyen überhaupt iſt, $= 1 - \frac{\lambda \overline{ab}}{p} - \frac{\lambda \overline{ac}}{p} - \frac{\lambda \overline{bc}}{p} + \frac{2 \lambda \overline{abc}}{p}$. Das Alter der Perſonen mag gleich oder ungleich ſeyn. Siehe *Zuſätze* *)

217.

Satz 64. Der Erblaſſer A ſoll zuletzt abgehen, wenn B und C beyde todt ſind, ohne daſs eine gewiſſe Ordnung im Sterben unter dieſen beyden bedungen werde.

Die zu ſuchende Summe iſt alsdenn

$$= \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B} \cdot \frac{(C - {}^{1}C)}{C}$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\Delta\, {}^{1}A}{A} \cdot \frac{(B - {}^{2}B)}{B} \cdot \frac{(C - {}^{2}C)}{C} + +$$

gleich folgenden Summen

Dd 2 $\left(\frac{\Delta A}{A}\right.$

*) §. 13.

$$\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{A} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}C}{C} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{B} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}B}{B} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A}{A} \cdot \frac{\overset{2}{-}B}{B} \, \frac{\overset{2}{-}C}{C} \, \frac{1}{r} + +\right)$$

Die *erste* Summe ist der Wehrt der Erbschaft auf den Tod des A (§. 98.), die *zwote* der Wehrt der Anwartschaft auf 1 beym Tode des A, wenn C, A überlebet, und die *dritte* für den Fall, wenn B, A überlebet, (§. 187.)

Die *vierte* ist die Anwartschaft auf den Fall, wenn A vor B und C stirbt. (§. 207.)

218.

Zusatz 1. Sind A, B, C von gleichem Alter, so wird diese Summe

$$= 1 - \frac{\lambda_{\overline{a}}}{p} - \left(1 - \frac{\lambda_{\overline{ab}}}{p}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\lambda_{\overline{a}}}{p} + \frac{\lambda_{\overline{ab}}}{p} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}.$$

Zusatz 2. Und wenn diese Wehrte für alle drey Personen, jede als die letzte angenommen, addirt werden, so hat man $1 - 3\frac{\lambda_{\overline{a}}}{p} + 3\frac{\lambda_{\overline{ab}}}{p} - \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}$. das ist *der Wehrt der Anwartschaft, wenn die Summe*

überhaupt

überhaupt bey dem Tode des letztern im Sterben, das iſt, bey dem gänzlichen Ausſterben der drey verbundenen Perſonen, *zahlbar iſt.*

Zuſatz 3. Dieſer letzte Wehrt kommt auch heraus, wenn die Perſonen am Alter ungleich ſind. Alsdenn wird

$$\text{er} = 1 - \left(\frac{\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c}}{p}\right) + \left(\frac{\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}}{p}\right) - \frac{\lambda\overline{abc}}{p}.$$

Siehe *Zuſätze.* *)

219.

Satz 65. Es ſey die Summe 1 zahlbar beym Tode von A, unter der Bedingung, daſs beyde B und C todt und C vor B geſtorben ſey. Das Alter der Perſonen iſt gegeben. Wie groſs iſt der baare Wehrt der Anwartſchaft auf dieſe Summe?

1) Man ſuche den Wehrt der Summe für den Fall, daſs A der *Längſtlebende* ſey, ohne Rückſicht auf die Ordnung, in der B und C geſtorben ſind (nach dem vorhergehenden 64ſten Satz §. 217.) und nehme davon die Hälfte. *Dieſe Hälfte iſt der geſuchte Wehrt, wenn A die älteſte unter den dreyen iſt, und die Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben zum Grunde gelegt wird. Dieſs iſt ſie auch auſser der Hypotheſe, wenn B und C am Alter gleich ſind.*

2) Iſt A *nicht die älteſte*, ſo ſind entweder B und C von gleichem Alter, oder nicht. In jenem Fall iſt der

*) §. 14.

nach n. 1. gefundene Wehrt gleichfalls einerley mit dem, welchen man sucht.

3) Sind β und γ, die *Altersergänzungen* von B und C, *verschieden*, A nicht die älteste Person, so ist *entweder* zu dem nach n. 1. gefundenen Wehrt *hinzuzulegen*, die Hälfte von dem Wehrt einer beym Tode einer Person, die γ Jahre älter ist, als A, zahlbaren Summe 1 unter der Bedingung, daſs noch eine andere, welche um γ Jahre älter ist als B, vor jener gestorben sey, vermindert im Verhältniſs des Products der Lebenden in dem um γ vergröſserten Alter zu diesem Product für das gegebene Alter, und dann auf $\gamma - 1$ Jahre zurück discontirt. Das ist, es ist *zuzulegen*

$$\frac{1}{2}\frac{1}{r^{\gamma-1}} \cdot \frac{{}^{\underline{\gamma}}B}{B}\,\frac{{}^{\underline{\gamma}}A}{A} \cdot \left(\frac{{}^{\underline{\gamma}}B - {}^{\underline{\gamma+1}}B}{{}^{\underline{\gamma}}B} \cdot \frac{\Delta\, {}^{\underline{\gamma}}A}{{}^{\underline{\gamma}}A} + \right.$$

$$\left. \frac{({}^{\underline{\gamma}}B - {}^{\underline{\gamma+2}}B)}{{}^{\underline{\gamma}}B} \cdot \frac{\Delta\, {}^{\underline{\gamma+1}}A}{{}^{\underline{\gamma}}A}\,\frac{1}{r} + + \right)$$

Oder es muſs dagegen *abgezogen werden* der halbe Wehrt einer beym Tode einer Person, welche um β Jahre älter ist als A, zahlbaren Summe 1 für den Fall, wenn eine andere, welche β Jahre älter ist als C, vor jener gestorben ist; vermindert in dem Verhältniſs des Products der Lebenden in dem um β Jahre erhöheten Alter zu diesem Product für die gegebenen Leben und

auf

auf $\beta - 1$ Jahre zurück discontirt. Das ist, man muss *abziehen*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^{\beta-1}} \cdot \frac{\overset{\beta}{-}C \cdot \overset{\beta}{-}A}{C \cdot A} \left(\frac{\overset{\beta}{-}C - \overset{\beta+1}{-}C}{\overset{\beta}{-}C} \cdot \frac{\Delta \overset{\beta}{-}A}{\overset{\beta}{-}A} + \frac{\overset{\beta}{-}C - \overset{\beta+1}{-}C}{\overset{\beta}{-}C} \cdot \frac{\Delta \overset{\beta+1}{-}A}{\overset{\beta}{-}A\, r} + + \right)$$

220.

Zusatz. Wenn die beyden Altersergänzungen β und γ *gleich* sind, so fallen beyde Stücke, das zuzulegende und das abzuziehende weg. Eben so, wenn A die *älteste* Person ist, in welchem Fall $\overset{\beta}{-}A$ und $\overset{\gamma}{-}A = 0$ sind. Sind aber β und γ *ungleich*, so ist doch nur Eins von jenen beyden Stücken etwas, und jedesmal das andere $= 0$. Ist $\beta > \gamma$, so ist $\overset{\beta}{-}C = 0$, und ist $\gamma > \beta$, so ist $\overset{\gamma}{-}B = 0$. Daher Eins von beyden auch nur erfordert werden kann.

Den Beweis siehe in den *Zusätzen.* *)

221.

Anmerkung. Diese Auflösung ist nur eine Annäherung, weil sie die Hypothese vom gleichförmigen Absterben voraussetzet. Sie erfordert, dass man die Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebethaben für jede einzelne Jahre durch Summirung suche nach dem Ausdruck in §. 211.

*) §. 15. 16. 17. 18.

Man könnte auch hier verleitet werden, eine ähnliche fehlerhafte Auflösung, wie die *Moivrische* oben war, (§. 186.) anzubringen. Wenn zuförderst der Wehrt der Anwartschaft berechnet ist auf eine Summe, die bey dem Tode der längstlebenden A zahlbar ist, und man nun diese multipliciren wollte in die Wahrscheinlichkeit, dass von den *vor A abgestorbenen*, B und C, die erstere B die letztere C überlebet habe, so würde diess Verfahren unrichtig seyn, aus dem nämlichen Grunde, der oben §. 186. angeführet ist.

222.

Nun das letzte Problem, was zu der dritten Classe gehört. §. 191.

Satz 66. Eine Person A von gegebenen Alter soll eine Leibrente 1 empfangen, nach dem Tode einer andern B, unter der Bedingung, dass die letztere B eine dritte C überlebet habe. Der erste Termin der Leibrente fällt am Ende des Sterbejahrs von B. Der baare Wehrt der erwähnten Leibrente von A, wenn man, wie vorher, von der Hypothese des gleichförmigen Absterbens Gebrauch macht, wird auf folgende Art gefunden:

1) „Man suche die Hälfte des Wehrts der Leibrente „A nach dem Tode der beyden andern Personen B und C, „nach dem 55sten Satz in §. 195;
„$= \frac{1}{2}(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab} - \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{abc})$.

2) „Hier-

2) „Hierzu werde *entweder addirt* der *halbe Wehrt* „*des Ueberlebens* einer Person vom Alter $a+\gamma$ über eine „andere vom Alter $b+\gamma$, vermindert in dem Verhält- „nifs des Products der Lebenden in dem Alter $a+\gamma$ und „$b+\gamma$, zu diesem Product in dem Alter a und b, dis- „contirt auf γ Jahre. Das ist, es werde *addirt*

$$„\frac{1}{2}\,\frac{1}{r^{\gamma}}\,\frac{\overset{\gamma}{-}A.\overset{\gamma}{-}B}{A.\,B}\cdot\;(\lambda\,\overline{a+\gamma})-\lambda\,\overline{(a+\gamma).(b+\gamma)}.$$

Es „ist a, b, c das gegebene *Alter;* α, β, γ sind die *Alters-* „*ergänzungen.*

3) „*Oder es werde davon abgezogen* die Hälfte *des* „*Wehrts des Ueberlebens* einer Person vom Alter $a+\beta$, „über eine andere vom Alter $c+\beta$, vermindert in dem „Verhältnifs des Products der Lebenden, aus den Jahren „$(a+\beta)$, $(c+\beta)$, zu dem Product aus den Jahren a, „und c; und denn auf β Jahre zurück discontirt. Das „ist es werde abgezogen

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\beta}}\cdot\frac{\overset{\beta}{-}A\overset{\beta}{-}C}{A.\,C}\,(\lambda\,\overline{(a+\beta)}-\lambda\,\overline{(a+\beta)(c+\beta)}.)\,.$$

Siehe *Zusätze.* *)

*) §. 21.

Zusätze
zum vierten Capitel.
Vom Ueberleben und den davon abhängenden Anwartschaften.

I.

Zu §. 169.

Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass A, B überlebe, oder $S.\frac{A\Delta B}{A.B}$, bloss auf *ganze* Jahre berechnet wird, so enthält sie die Bedingung, dass A noch das Ende des Jahrs erlebe, während dessen B gestorben ist, und ist

$$= \frac{{}^{1}B}{B} . \; C.\overline{a.(b-1)} - C\,\overline{ab}. \text{ (Cap. IV. §. 172.)}$$

Soll aber jene auf *Augenblicke* berechnet werden, so findet man die noch hinzuzulegende Correction auf folgende Art.

Man theile das Jahr in *n* Momente und setze den augenblicklichen Abgang von B gleich $\frac{\Delta B}{n}$, und von $A = \frac{\Delta A}{n}$. Das Absterben nämlich während der einzelnen Jahre wird als *gleichförmig* angesehen. Alsdenn erhält man für das *erste* Jahr, anstatt $\frac{{}^{1}A.\Delta B}{A.B}$, folgende Theile

$(\,{}^{1}A$

$$\frac{\left(\stackrel{1}{-}A+(n-1)\frac{\Delta A}{n}\right)\cdot\frac{\Delta B}{n}}{A.\,B}+\frac{\left(\stackrel{1}{-}A+(n-2)\frac{\Delta A}{n}\right)\frac{\Delta B}{n}}{A.\,B}+$$

$$+\left(\stackrel{1}{-}A+1\,\frac{\Delta A}{n}\right)\frac{\Delta B}{n}+\frac{\stackrel{1}{-}A.\Delta B}{n.\,A.\,B}$$

$$=\frac{\stackrel{1}{-}A.\,\Delta B.\,n}{A.\,B.\,n}+\frac{\Delta A.\,\Delta B}{n.\,n.\,A.\,B}\left(n-1+n-2+n-3+++1\right)$$

$$=\frac{\stackrel{1}{-}A.\,\Delta B}{A.\,B}+\frac{\Delta A.\,\Delta B}{2.\,A.\,B},$$ wenn *n* unendlich ist.

Eben so für das *zweyte* Jahr,

$$\frac{\stackrel{2}{-}A.\,\Delta\stackrel{1}{-}B}{A.\,B}+\frac{\Delta\stackrel{1}{-}A.\,\Delta\stackrel{1}{-}B}{A.\,B}$$ an statt $$\frac{\stackrel{2}{-}A.\,\Delta\stackrel{1}{-}B}{A.\,B}.$$

Also muſs zu dem obigen Wehrt von $S.\frac{\stackrel{1}{-}A.\,\Delta B}{A.\,B}$ noch $S.\frac{\Delta A.\,\Delta B}{2.\,A.\,B}$ hinzugeſetzet werden.

Auf eine gleiche Weiſe zeiget ſich, daſs dieſelbe Correction für $S.\frac{\stackrel{1}{-}B.\,\Delta A}{A.\,B}$, oder für die Wahrſcheinlichkeit, daſs B überlebe, erforderlich ſey. Es iſt $S.\frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B}$ die *Wahrſcheinlichkeit des Zugleichſterbens* in einem Jahre. Dieſe muſs zur Hälfte auf jede der beyden Wahrſcheinlichkeiten des Ueberlebens vertheilet werden.

2.

Zuſatz 1. Nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben wird die Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens

leicht

leicht berechnet. Es ſind α und β die Alterergänzungen für A und B. So iſt auf Augenblicke gerechnet, wobey die Fälle des Zugleichſterbens nicht in Betracht kommen,

1) *Die Wahrſcheinlichkeit, daſs* A, B *überlebe*

$$= S.\overline{\frac{\alpha - x}{\alpha}}.\ \frac{dx}{\beta} = \frac{x}{\beta} - \frac{x^2}{2.\alpha\beta}..$$

2) *Die Wahrſcheinlichkeit, daſs* B, A *überlebe,*

$$= S.\overline{\frac{\beta - x}{\beta}}.\ \frac{dx}{\alpha} = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2.\alpha\beta}.$$

Denn wenn A, B die Anfangszahlen der Lebenden ſind, ſo ſind die Geſtorbenen in jedem Jahre, $A - \frac{x}{}A$, in demſelben Verhältniſs zu den Anfangszahlen, wie die verfloſſenen Jahre zu der Alterergänzung. Es iſt

$$\frac{A - \frac{x}{}A}{A} = \frac{x}{\alpha},\ \text{alſo}\ \frac{\frac{x}{}A}{A} = \frac{\alpha - x}{\alpha}.$$

Nach der Integration muſs für x die *kleinſte* der beyden Ergänzungen geſetzt werden. Denn die Reihe hört auf, ſo wohl wenn $x = \alpha$, als wenn $x = \beta$ wird, alſo da, wo x am erſten das eine oder das andere wird. Wenn alſo n für die kleinſte Alterergänzung geſetzet wird, ſo hat man $\frac{n}{\beta} - \frac{n^2}{2\alpha\beta}$ für das Ueberleben von A; und $\frac{n}{\alpha} - \frac{n^2}{2\alpha\beta}$ bey B.

Die

Die Differenz beyder ist $= \frac{n}{\beta} - \frac{n}{\alpha} = \frac{(\alpha - \beta).n}{\alpha\beta}$.

Und ihre Summe $\frac{n}{\beta} + \frac{n}{\alpha} - \frac{n^2}{\alpha\beta} = 1$, es sey $n = \alpha$, oder $= \beta$.

Ist A die *älteste* der gegebenen Personen, so muss x nach der Integration α werden. Dann ist $S.\frac{(\alpha - x)dx}{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot E\overline{a}$, das ist, der mittlern Lebensdauer von A, dividirt durch die Altersergänzung der jüngern B.

3.

Zusatz. 2. Die Wahrscheinlichkeit, dass B schon todt sey, wenn A stirbt, das ist, dass *A nach B sterbe*, muss einerley seyn mit der, dass *A*, *B überlebe*, wenn auf die *ganze Lebenszeit* gerechnet wird. Es ist A der Längstlebende in beyden Fällen. (Cap. IV. §. 176.)

Diese letzte Wahrscheinlichkeit, dass eine nach der andern sterbe, wird bey der Hypothese vom gleichförmigen Absterben,

1) dass *A nach B sterbe* $= S.\frac{x}{\beta} \cdot \frac{dx}{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\alpha\beta}$.

2) dass *B nach A sterbe* $= S.\frac{x}{\alpha} \cdot \frac{dx}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{x^2}{\alpha\beta}$.

Diese *unvollständigen* Integralia sind zwar gleich, allein man muss bedenken, dass wenn diejenige Person, welche die andere überleben soll, jünger ist, als die zwote, ihre Altersergänzung also grösser, so dauret das Absterben

von

von ihr, und alſo das *nach der zwoten Sterben* noch die Jahre durch fort, um welche ihre Altersergänzung die der andern übertrifft. So iſt es nicht, wenn die *Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens* genommen wird. Die Zahl der Paare, von denen eine Perſon am Leben bleibt, wenn die andere ſtirbt, wird nicht mehr vergröſsert, ſo bald die ältere der beyden todt iſt. Aber die Zahl der Paare, wovon eine nach der andern ſtirbt, nimmt noch zu bis an das letzte Jahr des Ueberlebenden. Es muſs alſo in jenem Fall noch etwas vorher hinzugeſetzet werden. Der Altersunterſchied ſey z, ſo iſt dieſe Ergänzung $\frac{S. dz}{\alpha} = \frac{z}{\alpha}$, für A, wenn A, und $\frac{z}{\beta}$, wenn B überleben ſoll.

Daher hat man für die Wahrſcheinlichkeit, daſs *A nach B ſterbe*, im Fall A die jüngere iſt, $\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 1 - \frac{\beta}{2\alpha}$. Iſt A *älter*, ſo bekommt man $\frac{\beta}{2\alpha}$, wie vorher §. 2. So auch bey B.

Um den Folgen dieſes Umſtandes zu entgehen, iſt es die meiſtenmale beſſer und einfacher, die *Wahrſcheinlichkeit des Ueberlebens*, als die des *Nachſterbens*, zu berechnen.

4.

Zu §. 183.

Auf dieſelbe Art, wie vorher §. 1. findet man bey *Anwartſchaften* den Unterſchied zwiſchen den Wehrten für *ganze Jahre* und für *Augenblicke.*

Die

Die Anwartschaft auf eine Summe 1 bey dem Tode von B, wenn A, B überlebet, bekommt für das erste Jahr anstatt $\frac{\overset{1}{-}A.\Delta B}{A.B}$ folgende Theile:

$$\frac{\left(\overset{1}{-}A+(n-1)\frac{\Delta A}{n}\right).\frac{\Delta B}{n}}{A.B.r^{\frac{1}{n}}}+\frac{\left(\overset{1}{-}A+(n-2)\frac{\Delta A}{n}\right).\frac{\Delta B}{n}}{A.B.r^{\frac{2}{n}}}+$$

$$\frac{\left(\overset{1}{-}A+1\,\frac{\Delta A}{n}\right)\frac{\Delta B}{n}}{A.B.r^{\frac{n-1}{n}}}+\frac{\overset{1}{-}A\,\frac{\Delta B}{n}}{A.B.n.r^{\frac{n}{n}}}$$

$$=\frac{\overset{1}{-}A.\Delta B}{A.B}.\left(\frac{1:n}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1:n}{r^{\frac{2}{n}}}++\frac{1:n}{r}\right)$$

$$+\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}.\left(\frac{1:n}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{1:n}{r^{\frac{2}{n}}}++\frac{1:n}{r^{\frac{n-1}{n}}}\right)$$

$$-\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}.\left(\frac{1:n^2}{r^{\frac{1}{n}}}+\frac{2:n^2}{r^{\frac{2}{n}}}+\frac{3:n^2}{r^{\frac{3}{n}}}++\frac{(n-1):n^2}{r^{\frac{n-1}{n}}}\right)$$

$$=\frac{\overset{1}{-}A\,\Delta B}{A.B}\int\frac{dx}{r^x}+\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}\int\frac{dx}{r^x}.$$

$-\frac{\Delta A.\Delta B}{A.B}.\frac{1}{n}.\int\frac{x\,dx}{r^x}$. Es ist nämlich $\frac{1}{n}=dx$, weil $n=\infty$, und x wird nach der Integration $=\frac{n}{n}=1$. Setzet man, wie oben in ähnlichen Berechnungen, $p'=\frac{1}{\text{log. nat. } r}$, und $\frac{1}{r-1}=p$, wo nämlich p' das Grundcapital für *augenblickliche* Renten ist, was p für

ganze

ganze Jahrsrenten, ſo bekommt man den Wehrt der obigen Anwartſchaft für das erſte Jahr

$$= \frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{A.\,B}\cdot\frac{p'}{p}\cdot\frac{1}{r} + \frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B}\frac{1}{r}\cdot\frac{p'}{p} -$$

$$\frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B}\cdot\frac{p'}{p}\cdot\frac{1}{r}(p'-p).$$

Die Veränderung iſt für alle Jahre die ähnliche. Es iſt alſo die Anwartſchaft *auf den Tod von B*, wenn B vor A ſtirbt

$$= \frac{p'}{pr}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A.\,\Delta B}{A.\,B} + \frac{\overset{2}{-}A.\,\Delta\overset{1}{-}B}{A.\,Br} + \frac{\overset{3}{-}A.\,\Delta\overset{2}{-}B}{A.\,B.\,r^2} + +\right)$$

$$+ \frac{p'}{pr}\left(\frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A.\,\Delta\overset{1}{-}B}{A.\,B.\,r} + +\right)$$

$$- \frac{p'}{pr}\cdot(p'-p)\left(\frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A.\,\Delta\overset{1}{-}B}{A.\,B.\,r} + +\right)$$

Die Anwartſchaft auf *den Tod von A*, im Fall dieſer vor B ſtirbt, wird auf dieſelbe Weiſe,

$$= \frac{p'}{pr}\cdot\frac{1}{A.\,B}\cdot\left(\overset{1}{-}B\,\Delta A + \overset{2}{-}B.\,\Delta\overset{1}{-}A + +\right)$$

$$+ \frac{p'}{pr}\cdot\frac{1}{A.\,B}\cdot\left(\Delta B.\,\Delta A + \frac{\Delta\overset{1}{-}B.\,\Delta\overset{1}{-}A}{r} + +\right)$$

$$- \frac{p'}{pr}\cdot(p'-p)\cdot\frac{1}{A.\,B}\cdot\left(\Delta A.\Delta B + \frac{\Delta\overset{1}{-}A.\,\Delta\overset{1}{-}B}{r} + +\right)$$

Die letztern Theile, welche zu den erſten beyden Anwartſchaften hinzukommen, ſind einander gleich, und da $\frac{p'}{pr}$ $(p'-p) = 0,5$ ganz nahe, ſo kann man ſie,

=

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta A.\,\Delta B}{A.\,B} + \frac{\Delta \overset{1}{-} A\ \Delta \overset{1}{-} B}{A.\,B.\,r} + +\right)$$ annehmen.

Die beyden erſten Theile verhalten ſich zu den Anwartſchaften auf *ganze* Jahre berechnet, das iſt zu den beyden Wehrten

$$\frac{1}{A.\,B}\left(\overset{1}{-}A\ \Delta B + \frac{\overset{2}{-}A.\,\Delta \overset{1}{-} B}{r} + +\right)$$ und

$$\frac{1}{A.\,B}\left(\overset{1}{-}B.\,\Delta A + \frac{\overset{2}{-}B.\,\Delta \overset{1}{-} A}{r} +\right)$$ auf gleiche Weiſe,

nämlich wie $\frac{p'}{p} \cdot \frac{1}{r} : 1$, das iſt wie der baare Wehrt *einer Rente in augenblicklichen Terminen*, zu ihrem baaren Wehrt, wenn die Summe aller Theile auf einmal im Anfang gegeben wird (*Zuſätze* zu Cap. I. §. 9.) Uebrigens iſt die Anwartſchaft auf den *gleichzeitigen* Tod beyder Perſonen ein Nichts. Aber es zeigt ſich aus dem vorhergehenden, „daſs ihr Wehrt, den ſie hat, „wenn auf *ganze* Jahre gerechnet wird, auf die Wehrte „des Ueberlebens ganz nahe zur Hälfte auf jede falle.“

5.

Zuſatz. Berechnet man die Wehrte dieſer Anwartſchaft nach der Hypotheſe vom gleichförmigen Abſterben, ſo iſt die Anwartſchaft, im Fall A, B überlebet

$$= \int \frac{\overline{\alpha - x}}{\alpha\beta} \cdot \frac{dx}{r^x} = \frac{1}{\beta}\int \frac{dx'}{r^x} - \frac{1}{\alpha\beta}\int \frac{x\,dx}{r^x} = \frac{1}{\beta}\,\lambda\,\overline{a}$$

wenn B die *jüngſte* Perſon iſt, alſo β gröſser als α, und daher x nach der Integration α wird. Iſt aber B die

älteste und also β kleiner als α, so muss statt $\lambda\overline{a}$ eine nach β Jahren *aufhörende* Leibrente von A genommen werden. Denn nach der Integration wird x in diesem Fall nicht α, sondern β. Die nach β Jahren aufhörende Leibrente für A, ist $= \int \frac{dx}{r^x} - \frac{1}{\alpha} \int \frac{x\,dx}{r^x}$, so genommen, dass nach der Integration $x = \beta$ wird. Diess

$$\text{wird} = p \int \frac{dx}{r^\beta} - \frac{p}{\alpha} \cdot \int \frac{dx}{r^\beta} + \frac{p\beta}{\alpha r^\beta}$$

$$= p \int \frac{dx}{r^\beta} - \frac{p}{\beta} \int \frac{dx}{r^\beta} + \frac{\beta p}{\beta r^\beta}$$

$$+ \left(\frac{p}{\beta} - \frac{p}{\alpha}\right) \cdot \int \frac{dx}{r^\beta} + \left(\frac{p}{\alpha} - \frac{p}{\beta}\right) \frac{\beta}{r^\beta} = \lambda\overline{b}$$

$$+ p\left(\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) \int \frac{dx}{r^\beta} + \frac{\beta}{\alpha r^\beta}\right).$$

6.

Zusatz zum 53sten Satz in §. 189. und 190.

Es ist der *Wehrt des Ueberlebens* von A über B, oder der *Wehrt einer Leibrente von A nach dem Tode von B*, nach §. 127. Cap. III. berechnet, $= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b}$. So hingegen berechnet, *dass A*, nach dem Tode von B, *sogleich auf einmal abgefunden werde*, mit dem am Ende des Sterbjahrs fälligen Termin und mit dem Wehrt seiner Leibrente für das folgende Leben, bekommt man die Summe: $\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A} \cdot \left(\frac{1 + \lambda\overline{a+1}}{r}\right)$

$$+ \frac{\Delta \overset{1}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{2}{-}A}{A} \left(\frac{1 + \lambda\overline{a+2}}{r^2}\right) +++ \frac{\Delta \overset{n}{-}B}{B} \cdot \frac{\overset{n+1}{-}A}{A}$$

(1 +

$$\frac{\left(1+\lambda\overline{a+n+1}\right)}{r^{n+1}} = \frac{\Delta B}{B}\cdot\lambda\overline{a} + \frac{\Delta\overset{1}{-}B}{B}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+1}}{r}$$

$$+\frac{\Delta\overset{2}{-}B}{B}\cdot\frac{\overset{2}{-}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+2}}{r^2} + \; +$$

$$\frac{\Delta\overset{n}{-}B}{B}\cdot\frac{\overset{n}{-}A}{A}\cdot\frac{\lambda\overline{a+n}}{r^n}.$$

Daſs dieſe letztere Summe ſey

$$= \lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b} = \frac{\left(B-\overset{1}{-}B\right)}{B}\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\frac{1}{r} +$$

$$\frac{\left(B-\overset{2}{-}B\right)}{B}\frac{\overset{2}{-}A}{A.r^2}\cdot \; + + \frac{\left(B-\overset{n+1}{-}B\right)}{B}\frac{\overset{n+1}{-}A}{A}\cdot\frac{1}{r^{n+1}}$$

erhellet ſo. Es iſt $\lambda\overline{a} = \frac{\overset{1}{-}A}{A.r} + \frac{\overset{2}{-}A}{A.r^2} + + \frac{\overset{n+1}{-}A}{A.r^{n+1}}$;

$$\frac{\lambda\overline{a+1}}{r} = \frac{\overset{2}{-}A}{\overset{1}{-}A.r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{\overset{1}{-}A.r^3} + + \frac{\overset{n+1}{-}A}{\overset{1}{-}A.r^{n+1}};$$

$$\frac{\lambda\overline{a+2}}{r^2} = \frac{\overset{3}{-}A}{\overset{2}{-}A.r^3} + \frac{\overset{4}{-}A}{\overset{2}{-}A.r^4} + + \frac{\overset{n+1}{-}A}{\overset{2}{-}A.r^{n+1}};$$

$$\frac{\lambda\overline{a+n}}{r^n} = \frac{\overset{n+1}{-}A}{\overset{n}{-}A.r^{n+1}} + +$$

Folglich wird die erſte Summe

$$= \frac{\Delta B}{B}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}A}{A.r} + \frac{\overset{2}{-}A}{A.r^2} + + \frac{\overset{n+1}{-}A}{A.r^{n+1}}\right)$$

$$+\frac{\Delta\overset{1}{-}B}{B}\cdot\left(\frac{\overset{2}{-}A}{A.r^2} + \frac{\overset{3}{-}A}{A.r^3} + + \frac{\overset{n+1}{-}A}{A.r^{n+1}}\right)$$

$$+ \frac{\Delta \overset{2}{-}B}{B}\left(\frac{\overset{3}{-}A}{A.r^3} + \frac{\overset{4}{-}A}{A.r^4} + + \frac{\overset{n+1}{-}A}{A.r^{n+1}}\right) + +$$

$$+ \frac{\Delta \overset{n}{-}B}{B}\left(\frac{\overset{n+1}{-}A}{A} . \frac{1}{r^{n+1}}\right) = \frac{\Delta B}{B} . \frac{\overset{1}{-}A}{Ar}$$

$$+ \left(\frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta \overset{1}{-}B}{B}\right)\frac{\overset{2}{-}A}{A.r^2}$$

$$+ \frac{1}{A.B}\left(\frac{\Delta B + \Delta \overset{1}{-}B + \Delta \overset{2}{-}B}{r^3}\right)\overset{3}{-}A + +$$

$$+ \left(\frac{\Delta B + \Delta \overset{1}{-}B + \Delta \overset{2}{-}B + + \Delta \overset{n}{-}B}{r^{n+1}}\right) . \overset{n+1}{-}A.$$

Dieſs iſt

$$= \frac{(B - \overset{1}{-}B)}{B} . \frac{\overset{1}{-}A}{A.r} + \frac{(B - \overset{2}{-}B)}{B} . \frac{\overset{2}{-}A}{A.r^2} .$$

$$+ \frac{(B - \overset{3}{-}B)}{B} . \frac{\overset{3}{-}A}{Ar^3} + + \frac{(B - \overset{n+1}{-}B)}{B.\ A}\frac{\overset{n+1}{-}A}{r^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{\overset{1}{-}A}{A.r} + \frac{\overset{2}{-}A}{A.r^2} + + +\right) - \left(\frac{\overset{1}{-}B}{B} \frac{\overset{1}{-}A}{A} \frac{1}{r} + \frac{\overset{2}{-}B.\ \overset{2}{-}A}{A.B r^2} + +\right)$$

$$= \lambda \overline{a} - \lambda \overline{a\,b} .$$

7.

Beweis des Satzes in §. 202.

Es iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs von dreyen gegebenen Perſonen A, B, C, die letzte C *zuerſt abſterbe*, wenn nur auf ganze Jahre geſehen wird, ſo viel als die Summe

$$\frac{\overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B\ \Delta C}{A.\ B.\ C} + \frac{\overset{2}{-}A.\ \overset{2}{-}B.\ \Delta \overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C} + +$$

$$=$$

$$= \frac{\overset{1}{-}A \overset{1}{-}B\, C}{A.\,B.\,C} - \frac{\overset{1}{-}A \overset{1}{-}B \overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C} + \frac{\overset{2}{-}A.\, \overset{2}{-}B.\, \overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C} - \frac{\overset{2}{-}A.\, \overset{2}{-}B.\, \overset{2}{-}C}{A.\,B.\,C} + +$$

$$= \frac{\overset{1}{=}C}{C} \cdot C_{\overline{a.b.(c-1)}} - C_{\overline{a\,b\,c}}.$$

Rechnet man nun aber auch die Fälle mit, wo C und A, ingleichen C und B, *beyde während desselben Jahrs sterben*, ingleichen auch die, wo alle *drey zugleich abgehen*, so muſs zu dem obigen Wehrt noch die Hälfte

der Summe $\frac{\overset{1}{-}B.\, \Delta A.\, \Delta C}{A.\,B.\,C} + \frac{\overset{2}{-}B.\, \Delta \overset{1}{-}A.\, \Delta \overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C} + +$

ingleichen die Hälfte von der Summe

$\frac{\overset{1}{-}A.\, \Delta B.\, \Delta C}{A.\,B.\,C} + \frac{\overset{2}{-}A.\, \Delta \overset{1}{-}B\, \Delta \overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C} + +$; auch ferner

$\frac{1}{3}$ tel der Summe $\frac{\Delta A.\, \Delta B.\, \Delta C}{A.\,B.\,C} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A.\, \Delta \overset{1}{-}B.\, \Delta \overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C} + +$

addirt werden.

Die erste Summe enthält die Fälle, in denen C mit A in demselben Jahre abgeht, wovon die Hälfte zu denen gehöret, wo C *zuerst* stirbt, was auf eine ähnliche Art erhellet, wie es oben §. 1. bey zwey Leben gezeiget ist. Die zwote Summe enthält die Fälle, in welchen C mit B in demselben Jahre stirbt, wovon die Hälfte auch hieher gehört.

Ferner drückt die letzte Summe die Fälle aus, wo alle drey in demselben Jahre abgehen, davon $\frac{1}{3}$tel diejenigen begreift, in denen C zuerst stirbt.

Nimmt man bloſs die Theile für das erſte Jahr, woraus ſich die für die folgenden von ſelbſt geben, ſo iſt

$$\frac{\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B\,\Delta C}{A.\,B.\,C} = \frac{1}{A.B.C}\left(C.\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B - \overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C\right);$$

$$\frac{{}^{1}A.\Delta.B.\Delta C}{2\,A.\,B.\,C} = \frac{1}{2\,ABC}\left({}^{1}A.C.B - {}^{1}A.B.{}^{1}C + {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - C\,{}^{1}A\,{}^{1}B\right);$$

$$\frac{{}^{1}B.\Delta A.\Delta C}{2\,A.\,B.\,C} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{A.B.C}\left(A\,{}^{1}BC - {}^{1}A\,{}^{1}BC + {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - C\,A\,{}^{1}B\right);$$

$$\frac{\Delta A.\Delta B.\Delta B}{3\,A.B.C} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{A.B.C}\left(A.B.C - B.C\,{}^{1}A + A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - AB\,{}^{1}C + B\,{}^{1}A\,{}^{1}C - {}^{1}A\,{}^{1}B\,{}^{1}C - AC\,{}^{1}B + C\,{}^{1}A\,{}^{1}B\right).$$

Die Summe dieſer Theile iſt

$$\frac{1}{3}\left(\frac{A\,B\,C - \overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B\,\overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{A.C.\overset{1}{-}B - A\,\overset{1}{-}B\,\overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C}\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{BC.\overset{1}{-}A - B\,\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}C}{A.\,B.\,C}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{A.B.\overset{1}{-}C - C\,\overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B}{A.\,B.\,C}\right)$$

Nun iſt $\frac{1}{3}\,\frac{(ABC - \overset{1}{-}A\,\overset{1}{-}B\,\overset{1}{-}C)}{A\,B\,C} = \frac{1}{3}\,\frac{\Delta\,(A\,B\,C)}{A\,B\,C}$ aus allen Jahren zuſammen genommen $= \frac{1}{3}$. Ferner iſt $\frac{A\,C\overset{1}{-}B}{A\,B\,C}$ aus allen Jahren $= C\overline{(a-1)\,b.\,(c-1)}.\,\frac{\overset{-1}{-}A\,\overset{-1}{-}C}{A\,C}$;

auch $\int\frac{A\overset{1}{-}B\,\overset{1}{-}C}{A\,B\,C} = \frac{\overset{-1}{-}A}{A}.\ C\overline{(a-1)\,b.c}.$ Ferner

∫BC

$$\int \frac{BC\overset{1}{-}A}{A.B.C}\text{ aus allen Jahren} = \frac{\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{B.\ C}.$$

$C_{\overline{a.(b-1).(c-1)}}$ und so weiter. Also der gesammte gesuchte Wehrt

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\overset{1}{-}A}{A}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}C}{C}\cdot C_{\overline{(a-1)\,b.(c-1)}} - C_{\overline{(a-1)\,b.c}}\right) + \frac{1}{6}\frac{\overset{1}{-}B}{B}\cdot\left(\frac{\overset{1}{-}C}{C}\cdot C_{\overline{a(b-1)(c-1)}} - C_{\overline{a(b-1)\,c}}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A.\ B}\cdot C_{\overline{(a-1)(b-1)c}} - \frac{\overset{1}{-}C}{C}\cdot C_{\overline{a.b.(c-1)}}\right):$$

8.

Zu §. 203.

Die Hypothese vom gleichförmigen Absterben vorausgesetzt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass C zuerst absterbe aus dreyen A, B, C, oder $W = S.\frac{(\alpha-x)(\beta-x)\,dx}{\alpha\,\beta\,\gamma}$

Denn $\frac{\alpha-x}{\alpha}$ ist gleich der Zahl der noch Lebenden von A nach verflossener Zeit x durch die anfängliche Zahl der Lebenden dividirt, weil die Zahl der Gestorbenen sich jedesmal verhält wie die verflossene Zeit. Eben das ist $\frac{\beta-x}{\beta}$ bey B, und $\frac{dx}{\gamma}$ ist der Abgang von C in jedem Augenblick.

Nun ist $S. \overline{\frac{\alpha - x}{\alpha}}. \overline{\frac{\beta - x}{\beta}}. \frac{dx}{\gamma}$

$= \frac{x}{\gamma} - \frac{x^2}{2\alpha\gamma} - \frac{x^2}{2\beta\gamma} + \frac{x^3}{3\alpha\beta\gamma}$; wo x nach der Integration so gross genommen werden muss, als die kleinste von den dreyen gegebenen Altersergänzungen, α, β, γ. Setzet man also n für die kleinste dieser Grössen, unbestimmt welche, so wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{n}{\gamma}\left(1 - \frac{n}{2\alpha} - \frac{n}{2\beta} + \frac{n}{3\alpha\beta}\right)$. Da man hier auf Augenblicke rechnet, so fallen von selbst die Zusätze weg, die wegen des Zugleichabgehens mehrerer erfordert werden.

Zusatz. Wenn C nicht die jüngste ist, also auch nach der Integration x entweder α oder β wird, so ist $S. \frac{(\alpha - x)}{\alpha} \frac{(\beta - x)}{\beta} \frac{dx}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \int \frac{(\alpha - x)}{\alpha} \frac{(\beta - x).dx}{\beta}$

$= \frac{1}{\gamma} C_{\overline{ab}}$.

9.

Beweis des 62sten Satzes §. 207.

Sucht man auf ähnliche Art *den Wehrt* (W′) einer bey dem Tode der Person C zahlbaren Summe, im Fall diese *vor den beyden* A und B abstirbt, so erhält man für das *erste* Jahr dieselbigen Theile, wie im §. 7. und zwar völlig dieselbigen, *undiscontirt*, weil die auf diess Jahr fallende Ausgabe angesehen wird als eine *baare* Ausgabe. Die auf das *zweyte* Jahr fallende wird zuerst discontirt.

Daher

Daher ist W′ auf das erste Jahr

$$= \frac{1}{3}\frac{(A.B.C - \overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C)}{A.B.C} + \frac{1}{6}\frac{(A.C.\overset{1}{-}B - A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C)}{A.B.C.}$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{(B.C.\overset{1}{-}A - B\overset{1}{-}A\overset{1}{-}C)}{A.B.C} - \frac{1}{3}\frac{(A.B.\overset{1}{-}C - C\overset{1}{-}A\overset{1}{-}B)}{A.B.C.}$$

Nun ist das erste Stück für alle Jahre zusammen genommen

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{A.B.C.}{A.B.C.} + \frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{A.B.C.r} + +\right)$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{A.B.C} + \frac{\overset{2}{-}A.\overset{2}{-}B.\overset{2}{-}C}{A.B.C.r} + +\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \lambda_{\overline{abc}} - r.\lambda_{\overline{abc}}\right) = \frac{1-(r-1)\lambda_{\overline{abc}}}{3}.$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}\right).$$

Das Stück

$$\frac{1}{6}\left(\frac{A.C.\overset{1}{-}B}{A.B.C} + \frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}C.\overset{2}{-}B}{A.B.C}.\frac{1}{r} + +\right)$$

wird, alle Jahre zusammengenommen,

$$= \frac{1}{6}\ r.\frac{\overset{-1}{-}A\ \overset{-1}{-}B}{A.C}.\ \lambda_{\overline{(a-1).b.(c-1)}}.$$

Eben so werden ferner alle übrigen Stücke Wehrte der Verbindungsrenten mit *r* multiplicirt, wie sie vorher Verbindungsdauer waren.

 Diess

Diefs giebt den gesammten Wehrt,

$$W' = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda\,\overline{a\,b\,c}}{p}\right) + \frac{r}{6} \cdot \frac{\overset{-1}{-}A}{A}\left(\frac{\overset{-1}{-}C}{C} \cdot\right.$$

$$\left.\lambda\,\overline{(a-1).b.(c-1)} - \lambda\,\overline{(a-1).b.c.}\right) +$$

$$\frac{r}{6} \cdot \frac{\overset{-1}{-}B}{B}\left(\frac{\overset{-1}{-}C}{C} \cdot \lambda\,\overline{a.(b-1)(c-1)} \cdot -\right.$$

$$\left.\lambda\,\overline{a.(b-1)(c-1)}\right) - \frac{r}{3} \cdot \left(\frac{\overset{-1}{-}A.\overset{-1}{-}B}{A.\,B} \cdot \lambda\,\overline{(a-1).(b-1)c.}\right.$$

$$\left.- \frac{\overset{1}{-}C}{C} \cdot \lambda\,\overline{a.(b-1)(c-1)}\right).$$

10.

Fortsetzung.

Sucht man auch den Wehrt der Anwartschaft für den Fall, *dass B die vor den übrigen sterbende* Person ist $\left(\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}C.\Delta B}{A.\,C.\,B.} + +\right)$, ingleichen den Wehrt für den Fall, wenn *A zuerst* abgeht, das ist $\left(\frac{\overset{1}{-}B.\,\overset{1}{-}C.\,\Delta A}{B.\,C.\,A} + \frac{\overset{2}{-}B.\,\overset{2}{-}C\,\Delta\,A}{B.\,C.\,A} \cdot \frac{1}{r} + +\right)$ und nennet die beyden letztern Wehrte W'', W''', so macht $W' + W'' + W'''$ so viel aus, als *den Wehrt einer Anwartschaft auf die Trennung der drey Personen.* Denn nun ist es gleich viel, welche von ihnen zuerst stirbt. Dieser Wehrt ist $= 1 - \frac{\lambda\,\overline{a\,b\,c}}{p}$.

Diefs

Dieſs lehren auch die obigen Formeln. Das erſte Stück in $W' = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}\right)$ iſt für alle drey Fälle daſſelbe. Für alle drey zuſammen macht es alſo $1 - \frac{\lambda_{\overline{abc}}}{p}$. Die übrigen Theile heben ſich einander auf.

Man hat in W' für das erſte Jahr

$$\frac{1}{6}\,\frac{AC - \overset{1}{B}}{ABC} + \frac{1}{6}\,\frac{BC - \overset{1}{A}}{ABC} - \frac{1}{3}\,\frac{AB - \overset{1}{C}}{ABC}$$

Dazu kommt in W'', in dem zweyten Fall,

$$\frac{1}{6}\,\frac{AB - \overset{1}{C}}{ABC} + \frac{1}{6}\,\frac{AC - \overset{1}{B}}{ABC} - \frac{1}{3}\,\frac{BC - \overset{1}{A}}{ABC},$$

und in W''' das iſt in dem dritten Fall,

$$\frac{1}{6}\,\frac{BC - \overset{1}{A}}{ABC} + \frac{1}{6}\,\frac{AB - \overset{1}{C}}{ABC} - \frac{1}{3}\,\frac{AC - \overset{1}{B}}{ABC}.$$

Dieſe Stücke zuſammen ſind $= 0$.

Eben ſo hat man

$$\text{in } W';\ -\frac{1}{6}\cdot\frac{A\overset{1}{B}\overset{1}{C}}{ABC} - \frac{1}{6}\cdot\frac{B\overset{1}{A}\overset{1}{C}}{ABC} + \frac{1}{3}\cdot\frac{C\overset{1}{A}\overset{1}{B}}{ABC}$$

$$\text{in } W'';\ -\frac{1}{6}\cdot\frac{B\overset{1}{A}\overset{1}{C}}{ABC} - \frac{1}{6}\cdot\frac{C\overset{1}{A}B}{ABC} + \frac{1}{3}\cdot\frac{A\overset{1}{B}\overset{1}{C}}{ABC}$$

$$\text{und in } W''';\ -\frac{1}{6}\cdot\frac{C\overset{1}{A}\overset{1}{B}}{ABC} - \frac{1}{6}\cdot\frac{A\overset{1}{B}\overset{1}{B}}{ABC} + \frac{1}{3}\cdot\frac{B\overset{1}{A}\overset{1}{C}}{ABC}$$

Dieſe Theile heben ſich wieder auf.

11. Zu

II.

Zu §. 209.

Nach *Moivres* Hypothese gerechnet ist der gesuchte Wehrt $W' = \int \frac{\overline{\alpha - x}.\ \overline{\beta - x}.\ dx}{\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ r^x}$, wo x nach der Integration der kleinsten Altersergänzung gleich werden muss. Ist nun γ nicht die kleinste, oder C nicht die jüngste Person, so ist $W' = \frac{1}{\gamma} \lambda \overline{a\ b}$, (wenn nämlich $\lambda \overline{ab}$ oder die Verbindungsrente von A und B für augenblickliche Renten genommen wird.) Ist aber C die jüngste, dass also x nach der Integration γ wird, so muss $\lambda \overline{a\ b}$ nicht weiter als γ Jahre genommen werden. Das ist, statt der ganzen Verbindungsrente ist es eine, welche nach γ Jahren aufhört.

Sind die *Altersergänzungen gleich*, so ist wiederum $\frac{1}{\alpha} \lambda \overline{a\ a} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\lambda \overline{a a a}}{P}\right)$ nach derselben Voraussetzung.

12.

Zu §. 212.

Die Reihe, welche die *Wahrscheinlichkeit, dass A fortlebe, wenn B stirbt, für jedes einzelne Jahr* ausdruckt, und welche *ganz* genommen *die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens von A* über eine zwote Person enthält, ist nach § 1.

=

$$= \frac{1}{A.B}.\left(\overset{1}{-}A.\Delta B + \frac{\Delta A.\Delta B}{2} + \overset{2}{-}A.\Delta\overset{1}{-}B + \frac{\Delta\overset{1}{-}A.\Delta\overset{1}{-}B}{2} + +\right) \text{ sie sey} = W.$$

Diese Reihe hat so viele Theile, als die *kleinste Altersergänzung* ausmacht, welche, im Fall man nicht nach der Hypothese vom gleichförmigen Sterben rechnet, der Abstand des gegebenen Alters von dem kürzesten Alter der Tabelle ist.

Diese Reihe summirt, giebt eine andere *summatorische Reihe*, deren erstes Glied das erste Glied von jener, deren zweytes die beyden ersten von jener, das dritte die drey ersten zusammen genommen, enthält.

Der *Terminus generalis* dieser *summatorischen Reihe* ist für ein *n*tes Glied

$$= S.\frac{\overset{n}{-}A.\Delta\overset{n-1}{-}B}{A.B} + S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A.\Delta\overset{n-1}{-}B}{2A.B}$$

$$= S.\frac{\overset{n-1}{-}A.\Delta\overset{n-1}{-}B}{A.B} - S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A.\Delta\overset{n-1}{-}B}{2.A.B}$$

$$= S.\frac{\overset{n-1}{-}A.(\overset{n-1}{-}B - \overset{n}{-}B)}{A.B} - S.\frac{(\overset{n-1}{-}A - \overset{n}{-}A)(\overset{n-1}{-}B - \overset{n}{-}B)}{2.A.B}$$

$$= \frac{S.\overset{n-1}{-}A.\overset{n-1}{-}B - S.\overset{n-1}{-}A.\overset{n}{-}B + S.\overset{n}{-}A.\overset{n-1}{-}B - S.\overset{n}{-}A\overset{n}{-}B}{2\ A.B}$$

Diese Summen sind Theile von Coexistenzen, nämlich von Coexistenzen auf *n* Jahre berechnet.

Es

Es ist $S.\frac{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{2\,A.\,B} = \frac{C\,\overline{ab}}{2}$ auf die ersten *n* Jahre;

$S.\frac{\overset{n-1}{-}A.\overset{n-1}{-}B}{2\,A.\,B} = \frac{\overset{-1}{-}A.\overset{-1}{-}B}{A.\,B}.\frac{C\,\overline{(a-1).(b-1)}}{2}$ eben solche. Auch $S.\frac{\overset{n-1}{-}A.\overset{n}{-}B}{2\,A.\,B} = \frac{\overset{-1}{-}A}{A}.\frac{C.\overline{(a-1)\,b}}{2}$,

und $S.\frac{\overset{n}{-}A.\overset{n-1}{-}B}{2\,A.\,B} = \frac{\overset{-1}{-}B}{B}.\frac{C.\overline{a.(b-1)}}{2}$ nach *n* Jahren.

13.

Beweis des Zusatzes in §. 216.

Wenn A aus dreyen Personen von gegebenen Alter *a*, *b*, *c*, die *zwote* im Absterben seyn soll, so ist der Wehrt der Anwartschaft auf die Summe 1 zahlbar bey dem Tode von A,

$$= \left(\frac{\Delta A}{A}.\frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A\overset{2}{-}C}{A\;\;C}.\frac{1}{r} + +\right)$$

$$- \left(\frac{\Delta A}{A}.\frac{\overset{-1}{-}B.\overset{1}{-}C}{B.\,C} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta A}{A}.\frac{\overset{1}{-}B}{B} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A\overset{2}{-}B}{A.\,B}.\frac{1}{r} + +\right)$$

$$- \left(\frac{\Delta A}{A}.\frac{\overset{1}{-}B\overset{1}{-}C}{B.\,C} + +\right).$$

Das ist gleich dem Wehrt für den Fall, dass *B die erste und C die letzte* ist, und für den zweyten, dass umgekehrt *C die erste und B die letzte* ist.

Nun

Nun sey auch B der Erblasser, der zwischen A und C sterben soll, so erhält man den Wehrt für diesen Fall,

$$= \left(\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + +\right) - \left(\frac{\Delta B.\ \overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A} + +\right) - \left(\frac{\Delta B.\ \overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}C}{B.\ A.\ C} + +\right)$$

Und endlich, wenn C der *zwote* im Sterben seyn soll

$$= \left(\frac{\Delta C}{C} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A} + +\right) - \left(\frac{\Delta C.\ \overset{1}{-}A.\ \overset{1}{-}B}{C.\ A.\ B} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta C}{C} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{B} + +\right) - \left(\frac{\Delta C\ \overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{C.\ A.\ B} + +\right)$$

Es ist aber $\left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}C}{C} + +\right) + \left(\frac{\Delta C\ \overset{1}{-}A}{C.\ A} + +\right)$

$= 1 - \frac{\lambda \overline{ac}}{P}$ (§. 82. Cap. 4.)

und $\left(\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{\overset{1}{-}A}{A} + +\right) + \left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overset{1}{-}B}{B} \cdot + +\right)$

$= 1 - \frac{\lambda ab}{P}$. (eben daselbst.)

Diese Theile zusammen geben also

$$3 - \frac{\lambda \overline{ac}}{P} - \frac{\lambda \overline{ab}}{P} - \frac{\lambda \overline{bc}}{P}.$$

Die

Die Summen, welche hiervon abzuziehen sind, machen

$$2.\left(\frac{\Delta A.\overset{1}{-}B\overset{1}{-}C}{A.B.C}++\right)+\left(\frac{\Delta B\overset{1}{-}A\overset{1}{-}C}{B.A.C}++\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta C}{C}.\frac{\overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.B}+\right)=2\left(1-\frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right).$$

(§. 10. *Zus.* zum IV. Capitel).

Daraus wird der Wehrt für den allgemeinen Fall, daſs die zu empfangende Summe 1, zahlbar ſey beym Tode der *zwoten ſterbenden Perſon aus dreyen, überhaupt*, in welcher Ordnung ſie auch abſterben

$$=3-\left(\frac{\lambda\overline{ab}+\lambda\overline{ac}+\lambda\overline{bc}}{p}\right)-2\left(1-\frac{\lambda\overline{abc}}{p}\right)$$

$$=1-\left(\frac{\lambda\overline{ab}+\lambda\overline{ac}+\lambda\overline{bc}}{p}\right)+2\,\frac{\lambda\overline{abc}}{p}.,$$

14.

Zu §. 218. Zuſ. 3.

Wenn A zuletzt abgeht aus A, B, C, ſo iſt der Wehrt einer bey deſſen Tode zahlbaren Summe

$$=\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta\overset{1}{-}A}{A}.\frac{1}{r}++\right)-\left(\frac{\Delta A\overset{1}{-}C}{A.C}++\right)$$

$$-\left(\frac{\Delta A.\overset{1}{-}B}{A.B}++\right)+\left(\frac{\Delta A}{A}.\frac{\overset{1}{-}B.\overset{1}{-}C}{B.C}++\right).$$

Iſt B *der letzte*, ſo wird der Wehrt

$$=\left(\frac{\Delta B}{B}++\right)-\left(\frac{\Delta B.\overset{1}{-}A}{B.A}++\right)-\left(\frac{\Delta B.\overset{1}{-}C}{B.C}++\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta B}{B}.\frac{\overset{1}{-}A\overset{1}{-}C}{A.C}++\right).$$

Und

Und ist C *der letzte*, so ist selbiger

$$= \left(\frac{\Delta C}{C} + +\right) - \left(\frac{\Delta C . \overset{1}{-}A}{C . A} + +\right) - \left(\frac{\Delta C . \overset{1}{-}B}{C . B} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta C}{C} . \frac{\overset{1}{-}A . \overset{1}{-}B}{A . B} + +\right).$$

Aber

$$\left(\frac{\Delta A}{A} + +\right) + \left(\frac{\Delta B}{B} + +\right) + \left(\frac{\Delta C}{C} + +\right)$$

$$= 1 - \frac{\lambda \overline{a}}{p} + 1 - \frac{\lambda \overline{b}}{p} + 1 - \frac{\lambda \overline{c}}{p}.$$

Und $\left(\frac{\Delta A . \overset{1}{-}C}{A . C} + +\right) + \left(\frac{\Delta A . \overset{1}{-}B}{A . B} + +\right)$

$$+ \left(\frac{\Delta B . \overset{1}{-}A}{B . A} + +\right) + \left(\frac{\Delta B . \overset{1}{-}C}{B . C} + +\right)$$

$$+ \left(\frac{\Delta C . \overset{1}{-}A}{C . A} + +\right) + \left(\frac{\Delta C . \overset{1}{-}B}{C . B} + +\right)$$

$$= 3 - \left(\frac{\lambda \overline{a\,b} + \lambda \overline{a\,c} + \lambda \overline{b\,c}}{p}\right).$$ (§. 182. Cap. IV. und hier 13.)

Auch $\left(\frac{\Delta A . \overset{1}{-}B \overset{1}{-}C}{A . B . C} + +\right) + \left(\frac{\Delta B . \overset{1}{-}A \overset{1}{-}C}{B . A . C} + +\right)$

$$+ \left(\frac{\Delta C . \overset{1}{-}A \overset{1}{-}B}{C . A . B} + +\right) = 1 - \frac{\lambda \overline{a\,b\,c}}{p}.$$

 Alles

Alles zusammen also $= 3 - \left(\frac{\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c}}{p}\right)$

$$- \left(3 - \frac{\lambda\overline{a\,b} + \lambda\overline{a\,c} + \lambda\overline{b\,c}}{p}\right) + 1 - \frac{\lambda\overline{a\,b\,c}}{p}$$

$$= 1 - \left(\frac{\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c}}{p}\right) + \left(\frac{\lambda\overline{a\,b} + \lambda\overline{a\,c} + \lambda\overline{b\,c}}{p}\right)$$

$$- \frac{\lambda\overline{a\,b\,c}}{p}$$

15.

Beweis des 65sten Satzes §. 219.

Diese Aufgabe hat drey Bedingungen.

1) Die Summe 1 ist zahlbar beym Tode A.

2) Die beyden andern B und C sollen alsdenn todt seyn, und

3) B soll gestorben seyn nach C.

Für jedes einzelne Jahr *(n)* ist die Wahrscheinlichkeit, daſs B nach C sterbe $= \frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C} \cdot \frac{\Delta \overset{n-1}{-} B}{B}$

Und die Wahrscheinlichkeit, daſs bis an dieſs Jahr hin C gestorben sey vor B, ist die Summe aller solcher Theile bis auf dieſs Jahr eingeschlossen, also

$$= \overline{S. \frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C} \cdot \frac{\Delta \overset{n-1}{-} B}{B}}.$$

Daher ist für dasselbe Jahr die Wahrscheinlichkeit, *daſs A sterbe, B und C todt sind und C vor B gestorben,*

$$= \frac{\Delta \overset{n-1}{-} A}{A} \cdot S. \frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C} \cdot \frac{\Delta \overset{n-1}{-} B}{B}.$$

Folglich

Folglich der baare Wehrt einer Summe zahlbar beym Tode von A unter den gesetzten Bedingungen, für diess

*n*te Jahr, $= \dfrac{\overset{n-1}{\Delta}A\; S.(C - \overset{n}{-}C)\,\overset{n-1}{\Delta}B}{A.\;C.\;B\,r^{n-1}}$.

Diess ist der *terminus generalis* der Reihe, die, summirt den gesuchten Wehrt giebt.

Der gesuchte Wehrt ist nämlich

$$= \int \overline{\frac{\overset{n-1}{\Delta}A}{A}.\; S.\frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C.}\,\frac{\overset{n-1}{\Delta}B}{B.\;r^{n-1}}}$$

$$= \int \overline{\frac{\overset{n-1}{\Delta}A}{A.\,r^{n-1}}.\; S.\frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C}\,\frac{\overset{n-1}{\Delta}B}{B}}.$$

Nun ist für das *n*te Jahr

$$S.\frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C}\,\frac{\overset{n-1}{\Delta}B}{B} = S.\frac{\overset{n-1}{\Delta}B}{B} - S.\frac{\overset{n}{-}C.\,\overset{n-1}{\Delta}B}{C.\;B}.$$

Auch ist, wenn die Hypothese vom gleichförmigen Absterben genommen wird

$$\frac{\overset{n}{-}C.\;\overset{n-1}{\Delta}B}{C.\;B} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} + \frac{\overset{n}{-}C}{C} - \frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C}{B.\;C}\right)$$

(Cap. IV. §. 212.) weil hier $S.\dfrac{\overset{n}{-}C.\;\overset{n-1}{\Delta}B}{C.\;B}$ die Wahrscheinlichkeit bis auf *n* Jahre enthält, dass C, B überlebet habe.

Noch ist $S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B} = \frac{B-\overset{n}{-}B}{B} = 1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B}$.

Daraus wird $S.\frac{(C-\overset{n}{-}C)}{C}.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B} =$

$$= 1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{1}{2}.\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}+\frac{\overset{n}{-}C}{C}-\frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C}{B.\,C}\right)$$

Und der gesuchte Wehrt also

$$S.\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}\right)\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}} - S.\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}+\frac{\overset{n}{-}C}{C}-\frac{\overset{n}{-}B.\overset{n}{-}C}{B.\,C}\right)\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A.\,r^{n-1}}$$

Hierbey ist aber in Hinsicht des letzten Theils wohl zu bemerken, dass $S.\frac{\overset{n}{-}C}{C.}\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}$ nicht weiter geht, als auf die *kleinste Altersergänzung* von C und B, sie sey nun die von C, γ, oder die von B, β. Wenn in der Summe diese kleinste Altersergänzung für n gesetzet ist, so hat diese ihre unveränderliche Grösse. Dagegen $S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}$ jedesmal so lange wachsen kann, bis $1-\frac{\overset{\beta}{-}B}{B}=1$ wird.

In dem Fall, wenn α die *kleinste* Altersergänzung ist, also auch weder $S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}$ noch $S.\frac{\overset{n}{-}C}{C.}\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}$ für so viele Jahre genommen werden darf, als β oder γ gross ist, kann es gleich viel seyn, welche von diesen

beyden

beyden letztern die grösere oder kleinere sey. In diesem Fall ist der terminus generalis

$$= S.\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{\overset{n}{-}C}{C} + \frac{\overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{B.\ C}\right).\ \frac{\Delta \overset{n-1}{-\!-}A}{Ar^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\ S.\ \frac{(B - \overset{n}{-}B)}{B}.\ \frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C}.\ \frac{\Delta \overset{n-1}{-\!-}A}{A.\, r^{n-1}}..$$

Dann ist auch der *gesuchte Wehrt gleich der Hälfte des Wehrts einer beym Tode von A zahlbaren Summe, wenn A zuletzt aus dreyen A, B, C stirbt;* gleichviel ob B vor C, oder C vor B gestorben sey. Dieser Wehrt ist nach dem 64sten Satz im Cap. IV. §. 217. zu finden.

16.

Wenn $\beta = \gamma$, so ist es wiederum einerley, ob α grösser oder kleiner als β sey. Der gesuchte Wehrt ist, im Fall α grösser als β ist,

$$= S.\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{\beta}{-}B}{B} - \frac{\overset{\beta}{-}C}{C} + \frac{\overset{\beta}{-}B.\ \overset{\beta}{-}C}{B.\ C}\right).\ \frac{\Delta \overset{n-1}{-\!-}A}{A r^{n-1}}$$

$$= S.\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{\beta}{-}B}{B}\right).\ \left(1 - \frac{\overset{\beta}{-}C}{C}\right).\ \frac{\Delta \overset{n-1}{-\!-}A}{A.\, r^{n-1}},$$

das ist wiederum *dem halben Wehrt einer Summe 1 bey dem Tode von A, wenn B und C beyde vorher gestorben sind, gleichviel in welcher Ordnung.* Hier ist auch, nach der Natur der Sache, die Wahrscheinlichkeit, dass B nach C sterbe, so gross als die, dass C nach B sterbe. Also auch die Wahrscheinlichkeit, dass A *zuletzt* sterbe, wenn C vor B gestorben ist, so gross, als in dem Fall,

wenn B vor C stirbt. Folglich ist jede derselben die Hälfte der gesammten Wahrscheinlichkeit, *dass A zuletzt stirbt*, ohne Rücksicht auf die Ordnung, in der B und C sterben.

17.

Allein wenn β und γ verschieden sind, so ist es nicht gleichviel, welches das grössere davon sey.

1) *Es sey* $\beta > \gamma$.

Zu Berichtigung des termini generalis gehört folgendes. Es ist

$$S. \frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C} \frac{\Delta \overset{n-1}{-}B}{B} = S. \frac{\Delta \overset{n-1}{-}B}{B} - S. \frac{\overset{n}{-}C}{C} \cdot \frac{\Delta \overset{n-1}{-}A}{B},$$

für das Jahr γ,

$$= 1 - \frac{\overset{\gamma}{-}B}{B} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{\gamma}{-}B}{B} + \frac{\overset{\gamma}{-}C}{C} - \frac{\overset{\gamma}{-}B \; \overset{\gamma}{-}C}{B\,C}\right)$$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{\gamma}{-}B}{B}\right)$, weil diess das Jahr ist, worin $\overset{\gamma}{-}C = 0$ wird. Allein hier muss das erste Stück $1 - \frac{\overset{\gamma}{-}B}{B}$, von dem zweyten separirt werden. Jenes wird noch grösser in den folgenden Jahren. Es wird $1 - \frac{\overset{\gamma+1}{-}B}{B}$, $1 - \frac{\overset{\gamma+2}{-}B}{B}$, und im letzten Lebensjahr von B, kommt es auf $1 - \frac{\overset{\beta}{-}B}{B} = 1$. Bis so

hoch

hoch kann es in $S.\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}\right)\frac{\Delta\overset{n-1}{-\!-}A}{Ar^{n-1}}$ heraufgehen, wenn nicht etwa α kleiner als β ist.

Allein das zweyte Stück

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{\gamma}{-}B}{B}+\frac{\overset{\gamma}{-}C}{C}-\frac{\overset{\gamma}{-}B.\ \overset{\gamma}{-}C}{B.\ C}\right)$$ wird nicht grösser nach dem Jahr γ. Alsdenn ist es $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{\gamma}{-}B}{B}\right)$ und diesen Wehrt behält es für alle folgende Jahre. Die Summe $S.\frac{\overset{n}{-}C}{C}.\ \frac{\Delta\overset{n-1}{-\!-}B}{B}$ kann nach dem Jahr γ, wo die kleinste Altersergänzung aufhört, nicht grösser werden.

Demnach kann für diesen Fall, $\beta > \gamma$, der Factor $S.\frac{(C-\overset{n}{-}C)}{C}.\ \frac{\Delta\overset{n-1}{-\!-}B}{B}$ so gross werden als

$$1-\frac{\overset{\beta}{-}B}{B}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{\gamma}{-}B}{B}\right),$$ das ist, es kann werden

$$=\frac{1}{2}-\frac{\overset{\beta}{-}B}{B}+\frac{\overset{\gamma}{-}B}{2B}-\frac{\overset{\beta}{-}B}{2B}+\frac{\overset{\beta}{-}B}{2B},$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{\beta}{-}B}{B}\right)+\frac{(\overset{\gamma}{-}B-\overset{\beta}{-}B)}{2B}.$$

Behält man den obigen Ansdruck bey, da

$$S.\frac{(C-\overset{n}{-}C)}{C}.\ \frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}=1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}+\frac{\overset{n}{-}C}{C}-\frac{\overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{B\ C}\right)$$

so geht dieser, so bald $n=\gamma$, über in $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{\beta}{-}B}{B}\right)$, in dem Fall nämlich, wenn $\beta > \gamma$. Man kann jenen also durchaus beybehalten, nur muſs für die auf γ folgende Jahre addirt werden

$$\frac{B-\overset{\gamma+1}{-}B}{B},\ \frac{B-\overset{\gamma+2}{-}B}{B}\ \text{u. s. f. bis}\ \frac{\overset{\gamma}{-}B-\overset{\beta}{-}B}{2\,B}.$$

Dieser Zusatz ist auch selbst $=0$, wenn nicht $\beta > \gamma$, das ist, wenn nichts der Art addirt werden soll.

Es sey 2) γ *grösser als* β, so ist wiederum in

$$S.\frac{(C-\overset{n}{-}C)}{C}\ \frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}$$

$$=1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}+\frac{\overset{n}{-}C}{C}-\frac{\overset{n}{-}B\,\overset{n}{-}C}{B\ C}\right)$$

das erste Stück $1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}$ veränderlich bis $1-\frac{\overset{\beta}{-}B}{B}=1$. Diesen Wehrt behält es nachher in den folgenden Jahren, und ist alsdenn auch für sich $=1$.

Das zweyte Stück wird in dem Jahre β, das ist in dem Jahr der kleinsten Altersergänzung $=\left(1+\frac{\overset{\beta}{-}C}{C}\right)$.

Weiter

Weiter ſoll $S.\frac{{}^{n}C}{C}\cdot\frac{\Delta\,{}^{n-1}B}{B}$ ſich nicht verändern.

Alſo kann $S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\,\frac{\Delta\,{}^{n-1}B}{B}$ auch nicht gröſser werden als $1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{{}^{\beta}C}{C}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\beta}C}{C}\right)$.

Behält man dagegen den obigen unbeſtimmten Ausdruck auch für die auf β folgenden Jahre bis γ, ſo wird für das nächſte Jahr, $S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\,\frac{\Delta\,{}^{n-1}B}{B}$ $=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\beta+1}C}{C}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\beta+1}C}{C}\right)$, für das zweyte, $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\beta+2}C}{C}\right)$ u. ſ. f. bis $\frac{1}{2}\left(1-\frac{{}^{\gamma}C}{C}\right)=\frac{1}{2}$. So viel alſo muſs wiederum *abgezogen* werden, wenn man jenen obigen Ausdruck gebrauchen will. Dieſs abzuziehende Stück iſt aber gleichfalls nur Etwas, unter der Bedingung, daſs γ gröſser als β iſt.

Nimmt man das für $\beta \geqq \gamma$ zu *addirende* mit dem für $\gamma > \beta$ zu *ſubtrahirenden* Stück zuſammen, ſo kann $\frac{({}^{\gamma}B-{}^{1+m}B)}{2\,B}-\frac{({}^{\beta}C-{}^{1+m}C)}{2\,C}$ als das Stück angeſehen werden, was zu dem obigen Ausdruck von

$S.\frac{(C-{}^{n}C)}{C}\,\frac{\Delta\,{}^{n-1}B}{B}$, nämlich

$$\text{zu } 1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} + \frac{\overset{n}{-}C}{C} - \frac{\overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{B.\ C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{\overset{n}{-}C}{C} + \frac{\overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{B\ C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B}\right).\left(1 - \frac{\overset{n}{-}C}{C}\right) \text{ \textit{zuzulegen} ist,}$$

so bald *n* grösser wird als die kleinste Altersergänzung des B oder C. Eins von den beyden Theilen, woraus der Zusatz besteht, ist in jedem Fall $= 0$; sie können es alle beyde seyn. Es ist nur immer der Theil etwas, der in Rechnung zu bringen ist.

18.

Die *Wahrscheinlichkeit, dass B vor C gestorben sey,* also vorher berichtiget, so ist nun die Reihe zu summiren, deren *terminus generalis*

$\frac{\Delta^{n-1}A}{A\,r^{n-1}} \cdot S.\frac{(C - \overset{n}{-}C)}{C} \cdot \frac{\Delta^{n-1}B}{B}$, ist. Dieser terminus ist nunmehro

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B}\right)\left(1 - \frac{\overset{n}{-}C}{C}\right).\ \frac{\Delta^{n-1}A}{A\,r^{n-1}} +$$

$$\left(\frac{\overset{\gamma}{-}B - \overset{\gamma+m}{-}B}{2\,B} - \frac{(\overset{\beta}{-}C - \overset{\beta+m}{-}C)}{2\,C}\right)\frac{\Delta^{n-1}A}{A\,r^{n-1}} \text{ für}$$

die auf die kleinste Altersergänzung von B oder C folgende Jahre.

Wenn

Wenn nun α größer ist als eine von den beyden Ergänzungen β und γ, oder als alle beyde, so ist zu der Hälfte der Wehrte der Summe für den Fall, daſs A *am letzten* stirbt in § 15. oben noch zuzulegen

$$S.\left(\frac{{}^{\gamma}B - {}^{\gamma+m}B}{2\,B} - \frac{({}^{\beta}C - {}^{\beta+m}C)}{2\,C}\right).\ \frac{\Delta\,{}^{n-1}A}{A\,r^{n-1}}$$

für die über β oder γ hinausgehende Jahre.

Dieſs zuzulegende Stück ist nach dem obigen, weil n in dem einen Fall $= \gamma$, in dem andern $= \beta$ wird,

$$= \frac{1}{2}.\ \frac{1}{r^{\gamma-1}}\ \frac{{}^{\gamma}B.\ {}^{\gamma}A}{B.\ A}.\left(\frac{({}^{\gamma}B - {}^{\gamma+1}B)}{{}^{\gamma}B}\ \frac{\Delta\,{}^{\gamma}A}{{}^{\gamma}A} + \frac{({}^{\gamma}B - {}^{\gamma+1}B)}{{}^{\gamma}B}.\ \frac{\Delta\,{}^{\gamma+1}A}{{}^{\gamma}A}\ \frac{1}{r} + +\right)$$

$$- \frac{1}{2}.\ \frac{1}{r^{\beta-1}}\ \frac{{}^{\beta}C.\ {}^{\beta}A}{C.\ A}.\left(\frac{({}^{\beta}C - {}^{\beta+1}C)}{{}^{\beta}C}.\ \frac{\Delta\,{}^{\beta}A}{{}^{\beta}A} + \frac{({}^{\beta}C - {}^{\beta+1}C)}{{}^{\beta}C}.\ \frac{\Delta\,{}^{\beta+1}A}{{}^{\beta}A}.\ \frac{1}{r} + +\right)$$

Das erste Stück davon ist *der baare Wehrt einer beym Tode einer Person vom Alter so groſs, als das Älter von A ist, um γ vergröſsert, das ist, vom Alter $a+\gamma$, unter der Bedingung zahlbaren Summe 1, daſs diese eine andere Person vom Alter $\beta+\gamma$ überlebet habe*, multiplicirt mit $\frac{1}{2}.\ \frac{1}{r^{\gamma-1}}.\ \frac{{}^{\gamma}B.\ {}^{\gamma}A}{B.\ A}$. Das zweyte Stück ist

ein

ein solcher Wehrt, wenn die *Summe zahlbar ist beym Tode einer Person, die um β Jahre älter ist als A, das ist vom Alter a + β unter der Bedingung, dass eine andere um β Jahre älter als C, das ist vom Alter c + β vorhergestorben sey,* multiplicirt mit $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^{\beta-1}}\frac{{}^{\overline{\beta}}C.\ {}^{\overline{\beta}}A}{C.\ A.}$

Diess ist die Auflösung der Aufgabe im 65sten Satz. §. 219.

19.

Ohne *Hypothese wird die Wahrscheinlichkeit*, dass von drey Personen C *zuerst*, *dann* B und *zuletzt* A sterbe, auf folgende Weise bestimmt.

Es ist diese Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes unbestimmtes Jahr

$$= \frac{\Delta^{\overline{n-1}}A}{A}\cdot S.\frac{(C - {}^{\overline{n}}C)}{C}\cdot\frac{\Delta^{\overline{n-1}}B}{B}$$

$$= \frac{\Delta^{\overline{n-1}}A}{A}\cdot S.\frac{\Delta^{\overline{n-1}}B}{B} - \frac{\Delta^{\overline{n-1}}A}{A}\cdot S.\frac{{}^{\overline{n}}C.\ \Delta^{\overline{n-1}}B}{C.\ B}$$

$$= \frac{(B - {}^{\overline{n}}B)}{B}\cdot\frac{\Delta^{\overline{n-1}}A}{A}\cdot - \frac{\Delta^{\overline{n-1}}A}{A}S.\frac{{}^{\overline{n}}C.\ \Delta^{\overline{n-1}}B}{C.\ B}$$

Die *Summe dieser Theile ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit* für *alle* Jahre, oder die Wahrscheinlichkeit überhaupt. Diese ist

$$= S.\frac{(B - {}^{\overline{n}}B)}{B}\cdot\frac{\Delta^{\overline{n-1}}A}{A} - S.\frac{\Delta^{\overline{n-1}}A.\ S.{}^{\overline{n}}C.\ \Delta^{\overline{n-1}}B}{A.\ C.\ B}$$

=

$$= S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A} - S.\frac{\overset{n}{-}B.\,\Delta\overset{n-1}{-}A}{B.\,A} - S.\overline{\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A\;S.\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{A.\quad C.\quad B}}$$

Der *erſte* Theil $S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A}$ wird = 1.

Der *zweyte* Theil $S.\frac{\overset{n}{-}B.\,\Delta\overset{n-1}{-}A}{B.\,A}$ iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs B, A überlebe, kann alſo auch als bekannt angeſehen werden.

Um das *dritte* Stück $S.\overline{\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A}.\;\frac{S.\overset{n}{-}C\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B}}$ zu bekommen, nehme man $\Delta\overset{n-1}{-}A$, und $\Delta\overset{n-1}{-}B$ für *augenblickliche Decremente* von $\overset{n-1}{-}A$, und von $\overset{n-1}{-}B$ an, oder rechne für Augenblicke. Dann ſey $\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A} = dy$, und $\frac{\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B} = dz$, ſo iſt das zu ſuchende dritte Stück $= S.\,z\,dy = zy - S.\,y\,dz$ das iſt

$$= \frac{S.\Delta\overset{n-1}{-}A}{A} \times \frac{S.\overset{n}{-}C\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C\quad B} -$$

$$S.\overline{\frac{\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B}.\;S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A}}.$$

Nun iſt $\frac{S.\Delta\overset{n-1}{-}A}{A}$ in jenem einzelnen Theile $\frac{A - \overset{n}{-}A}{A}$. Folglich iſt das zu findende Stück

=

$$= S.\frac{\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\qquad B} - S.\frac{\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B.\;(A - \overset{n}{-}A)}{C.\qquad B.\qquad A}$$

$$= S.\frac{\overset{n}{-}C\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B} - \left(S.\frac{\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B} - S.\frac{\overset{n}{-}A\;\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B.\quad A}\right)$$

$$= + S.\frac{\overset{n}{-}A\;\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{A.\quad C.\quad B},$$ das ist, gleich der *Wahrscheinlichkeit, dass B vor A und C absterbe.*

Diese Gleichheit kann auch aus der Natur der Sache ohne Rechnung gefolgert werden. Denn das dritte Stück oder die $\overline{S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A.\;S.\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{A.\quad C.\quad B}}$ druckt die Wahrscheinlichkeit aus, dass von dreyen *A sterbe*, und *C, B überlebt habe;* übrigens aber mag C schon todt seyn, wenn A stirbt, oder noch leben. Es ist also auch einerley, wie A und C auf einander folgen, wenn nur B *gestorben* ist vor C, zu der Zeit, da A stirbt, das ist, wenn nur *B der erste im Sterben gewesen ist.*

Daher ist nun die obige gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\overline{S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A.\;S.(C - \overset{n}{-}C)\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{A.\qquad C.\qquad B}}$$

$$= 1 - S.\frac{\overset{n}{}B\;\Delta\overset{n-1}{-}A}{B.\quad A} - S.\frac{\overset{n}{-}A\;\overset{n}{-}C.\;\Delta\overset{n-1}{-}B'}{A.\quad C.\quad B}.$$

20. Der

20.

Der Wehrt der Anwartschaft W′ ist

$$\int \frac{\Delta\overset{n-1}{—}A}{Ar^{n-1}} \cdot \frac{S.(C - \overset{n}{—}C)}{C} \cdot \frac{\Delta\overset{n-1}{—}B}{B} =$$

$$\int \frac{\Delta\overset{n-1}{—}A}{Ar^{n-1}} - \int \frac{\overset{n}{—}B}{B} \cdot \frac{\Delta\overset{n-1}{—}A}{Ar^{n-1}} - \int \frac{\Delta\overset{n-1}{—}A}{Ar^{n-1}} \cdot \frac{S.\overset{n}{—}C}{C} \cdot \frac{\Delta\overset{n-1}{—}B}{B}.$$

Die beyden ersten Stücke sind wiederum bekannte Anwartschaften.

Für den Fall, daſs B und C von *gleichem* Alter sey, findet man leicht, daſs der gesuchte Wehrt auch ohne Hypothese so groſs *sey* als *der halbe Wehrt einer Anwartschaft auf den Tod des zuletzt sterbenden A*, gleichviel in welcher Ordnung auch B und C abgehen. Denn für diesen Fall ist

$$\frac{S.\overset{n}{—}C\,\Delta\overset{n-1}{—}B}{C.\;B} = \frac{\overset{n}{—}C.\,(B - \overset{n}{—}B)}{C.\;B} - \frac{S.(B - \overset{n}{—}B)}{B.} \cdot \frac{\Delta\overset{n}{—}C}{C}$$

wenn man $\Delta\overset{n-1}{—}B$ und $\Delta\overset{n}{—}C$ für *augenblickliche Veränderungen*, oder eigentliche *Differentialia* nimmt. Aber alsdenn ist auch $\Delta\overset{n}{—}C = - \Delta\overset{n-1}{—}C$. Denn ΔC in dem letzten Ausdruck ist das *Increment*, wodurch $\overset{n}{—}C$ anwächst zu $\overset{n-1}{—}C$, und $\Delta\overset{n-1}{—}C$ vorher ist das *Decrement*, wodurch $\overset{n-1}{—}C$ abnimmt, und $\overset{n}{}C$ wird.

Daher

Daher $\frac{S.\overset{n}{-}C\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\;B.} = \frac{\overset{n}{-}C}{C} - \frac{\overset{n}{-}C\,\overset{n}{-}B}{C.\;B} + \frac{S.\Delta\overset{n-1}{-}C}{C}$

$- \frac{S.\overset{n}{-}B\,\Delta\,\overset{n-1}{-}C}{B.\;\;C}$.

Nun ist hier auch $\Delta\overset{n-1}{-}C = \Delta\overset{n-1}{-}B$, und $\overset{n}{-}C = \overset{n}{-}B$

Folglich $2\,\frac{S.\overset{n}{-}C\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\;\;B} = \frac{\overset{n}{-}C}{C}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B}\right) +$

$1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B}, = 1 - \frac{\overset{n}{-}C\,\overset{n}{-}B}{C.\;\;B}$, und

$\frac{S.\overset{n}{-}C\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\;\;B} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B\,\overset{n}{-}C}{B.\;C}\right)$

Und

$\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}.\;\frac{S.\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\;\;B} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B\,\overset{n}{-}C}{B.\;C}\right)$

$= \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} + \frac{\overset{n}{-}C}{C} - \frac{\overset{n}{-}B\,\overset{n}{-}C}{B.\;\;C}\right)$

Daher der gesuchte Wehrt W′

$= \frac{S.\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{1}{2} + \frac{\overset{n}{-}B}{2B}\right.$

$\left. - \frac{\overset{n}{-}C}{2C} + \frac{\overset{n}{-}B\,\overset{n}{-}C}{2B\;\;C}\right) = S.\left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B}\right)\left(1 - \frac{\overset{n}{-}C}{C}\right)\frac{1}{2}.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}$

das ist *die Hälfte des Wehrts der Anwartschaft auf den Tod von A*, im Fall A nach B und C stirbt.

Auch

Auch ist überhaupt der Werth der Anwartschaft auf den Tod A, wenn A *zuletzt* stirbt, nach B und C, so groſs als die beyden Wehrte für die besondern Fälle, für den nämlich, daſs *C vor B*, und den, daſs *B vor C* sterbe, zusammengenommen.

Beyde Wehrte zusammen machen

$$S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A\,r^{n-1}}.\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}+1-\frac{\overset{n}{-}C}{C}\right)$$

$$-\int\overline{\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A\,r^{n-1}}\;\frac{S.\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B}}-\int\overline{\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A\,r^{n-1}}\;\frac{S.\overset{n}{-}B.\,\Delta\overset{n-1}{-}C}{C.\quad B}}$$

Nun ist $S.\frac{\overset{n}{-}C\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B}=\frac{\overset{n}{-}C}{C}\,\frac{S.\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}$

$$-\overline{S.\frac{\Delta\overset{n}{-}C.\;S.\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B}}=\frac{\overset{n}{-}C}{C}\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}\right)$$

$$+S.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}C.\,(B-\overset{n}{-}B)}{C.\quad B}=\frac{\overset{n}{-}C}{C}\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}\right)$$

$$+\frac{C-\overset{n}{-}C}{C}-S.\frac{\overset{n}{-}B\,\Delta\overset{n-1}{-}C}{B.\quad C}=1-\frac{\overset{n}{-}C\;\overset{n}{-}B}{C.\quad B}$$

$$-S.\frac{\overset{n}{-}B\;\Delta\overset{n-1}{-}C}{C.\quad B}.$$

Folglich $S.\frac{\overset{n}{-}C\;\Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\quad B}+S.\frac{\overset{n}{-}B.\,\Delta\overset{n-1}{-}C}{B.\quad C}$

$$=1-\frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C}{B.\quad C}.$$

Daher der gesuchte Wehrt der Anwartschaft

$$= \int \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}} \left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B} - \frac{\overset{n}{-}C}{C} + \frac{\overset{n}{-}B\,\overset{n}{-}C}{B\;C}\right)$$

$$= \int \left(1 - \frac{\overset{n}{-}B}{B}\right) \cdot \left(1 - \frac{\overset{n}{-}C}{C}\right) \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}$$, das ist der *Wehrt einer beym Tode von A zahlbaren Summe 1, wenn A nach B und C stirbt.*

Um den Wehrt von W′ ohne Hypothese zu haben, kommt es auf das Stück $\int \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A.\, r^{n-1}}\; \frac{S.\overset{n}{-}C.\, \Delta\overset{n-1}{-}B}{C,\; B}$ an.

Man setze $\frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}} = dy$, und $\frac{\overset{n}{-}C.\; \Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\; B} = dz$,

so ist $\int \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A.\; S.\overset{n}{-}C.\; \Delta\overset{n-1}{-}B}{A r^{n-1}.\; C.\; B} = S z dy = zy - S y dz$

$$= \int \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}} \times S.\frac{\overset{n}{-}C\; \Delta\overset{n-1}{-}B}{C\; B}$$

$$- \overline{S.\frac{\overset{n}{-}C.\; \Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\; B} \int \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A.\, r^{n-1}}} = \left(1 - \frac{\overline{\lambda a}}{p}\right).$$

$$S.\frac{\overset{n}{-}C.\; \Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\; B} - \overline{S.\frac{\overset{n}{-}C\; \Delta\overset{n-1}{-}B}{C.\; B} . \int \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}}.$$

Nun ist $\int \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta\overset{1}{-}A}{A r} + \frac{\Delta\overset{2}{-}A}{A r^2} + + \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A r^{n-1}}$

$$= \frac{A}{A} + \frac{\overset{1}{-}A}{A r} + \frac{\overset{2}{-}A}{A r^2} + + \frac{\Delta\overset{n-1}{-}A}{A.\, r^{n-1}}$$

—

$$-\left(\frac{\overset{1}{-}A}{A}+\frac{\overset{2}{-}A}{Ar}+\frac{\overset{3}{-}A}{Ar^2}++\frac{\overset{n}{-}A}{Ar^{n-1}}\right)$$

$= 1 + \overset{+n-1}{\overline{\quad}}\lambda\,\overline{a} - r.\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a}$, wo nämlich $\overset{+n-1}{\overline{\quad}}\lambda\,\overline{a}$, $\overset{+n}{-}\lambda\,\overline{a}$ aufhörende Leibrenten sind.

Allein auf diese Weise bleibt immer ein Theil des ganzen Wehrts übrig, der auf andere bekannte Anwartschaften sich nicht reduciren läßt. Will man hier aber zur Bestimmung von $\int\frac{\Delta\overset{n-1}{\overline{\quad}}A}{Ar^{n-1}}$ die Hypothese zu Hülfe nehmen, so ist $\int\frac{\Delta\overset{n-1}{\overline{\quad}}A}{Ar^{n-1}}$.

$$=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta A}{Ar}+\frac{\Delta A}{Ar^2}++\frac{\Delta A}{Ar^{n-1}}$$

$$=\frac{\Delta A}{A}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}++\frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\Delta A}{A}\left(1+\frac{1}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^{-1}}\right)\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{r-1}\cdot$$

$\left(1-\frac{1}{r^{n-1}}\right)$, wo α die Altersergänzung für A ist.

Daraus erhält man $\left(\text{p gesetzt für } \frac{1}{r-1}\right)W' = \int\frac{\Delta\overset{n-1}{\overline{\quad}}A}{Ar^{n-1}}$

$$-\int\frac{\overset{n}{-}B.\,\Delta\overset{n-1}{\overline{\quad}}A}{B.\;Ar^{n-1}}-\left(1-\frac{\lambda\,\overline{a}}{p}\right)S.\frac{\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{\overline{\quad}}B}{C.\qquad B}$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{p}{\alpha}\right).\,S.\frac{\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{\overline{\quad}}B}{C.\qquad B}-\frac{p}{\alpha}\int\frac{\overset{n}{-}C.\,\Delta\overset{n-1}{\overline{\quad}}B}{C.\;Br^{n-1}}.$$

Dabey

Dabey aber zu bemerken, daſs die Summe $S.\frac{\overset{n}{-}C}{C}.\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}$ nicht weiter genommen werden darf, als bis $n=\alpha$ wird, im Fall jene ſonſt weiter gehen könnte.

21.

Beweis des 66ſten Satzes §. 222.

Es ſoll A eine Leibrente 1 haben, nach dem Tode von B, davon der erſte Termin zahlbar iſt am Ende des Sterbejahrs; allein unter der Bedingung, daſs B eine dritte Perſon C überlebet habe. Das gegebene Alter von A iſt *a*, das von B, *b*, das von C, *c*, und die dazu gehörigen Altersergänzungen ſind α, β, γ.

Nun iſt, die Hypotheſe vorausgeſetzt, der *Terminus generalis* der Reihe, welche den geſuchten Werth enthält, das iſt der Wehrt der ſo beſtimmten Leibrente von A, auf Ein unbeſtimmtes Jahr *n*

$$=\frac{\overset{n}{-}A}{Ar^{n}}\,S.\frac{C-\overset{n}{-}C}{C}.\,\frac{\Delta\overset{n-1}{-}B}{B}.$$ und die Summe davon

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\overset{n}{-}A}{Ar^{n}}\left(1-\frac{\overset{n}{-}B}{B}-\frac{\overset{n}{-}C}{C}+\frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C}{B.\,C}\right)$$

wenn dazu geleget wird

$$\frac{1}{2}\int\frac{\overset{n+1}{-}A}{Ar^{n-1}}\left(\frac{{}^{\gamma}B-\overset{\gamma+1}{-}B}{B}-\frac{(\overset{\beta}{-}C-\overset{\beta+1}{-}C)}{C}\right)$$

für die über γ oder β hinausgehende Jahre, falls es dergleichen in der Reihe giebt, das iſt, falls A nicht die älteſte

teste oder eine der ältesten Personen ist. Diess erhellet hier völlig auf dieselbige Art, wie in dem vorhergehenden §. 17. in dem Beweise des 65sten Satzes.

Es ist also die ganze Reihe

$$\int \frac{{}^{n}A}{A\,r^{n}} . S. \frac{(C - {}^{n}C)}{C} . \frac{\Delta\,{}^{n-1}B}{B}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{{}^{n}A}{A\,r^{n}} - \int \frac{{}^{n}A\;{}^{n}B}{A.\,B\,r^{n}} - \int \frac{{}^{n}A\;{}^{n}C}{A.\,C\,r^{n}}\right.$$

$$\left. + \int \frac{{}^{n}A\;{}^{n}B\;{}^{n}C}{A\;B\;C\,r^{n}}\right) + \frac{1}{2} . \frac{1}{r^{\gamma}} \frac{{}^{\gamma}A\;{}^{\gamma}B}{A.\,B} .$$

$$\int \frac{({}^{\gamma}B - {}^{\gamma+1}B)}{{}^{\gamma}B} \frac{{}^{\gamma+1}A}{{}^{\gamma}A} - \frac{1}{2} . \frac{1}{r^{\beta}} \frac{{}^{\beta}A.\;{}^{\beta}C}{A.\,C}$$

$$\int \left(\frac{({}^{\beta}C - {}^{\beta+1}C)}{{}^{\beta}C} . \frac{1}{r}\right) \frac{{}^{\beta+1}A}{{}^{\beta}A}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b} - \lambda\overline{a\,c} + \lambda\overline{a\,b\,c}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} . \frac{1}{r^{\gamma}} . \frac{{}^{\gamma}A\;{}^{\gamma}B}{A.\,B}\left(\lambda\overline{a+\gamma} - \lambda\overline{(a+\gamma).\,(b+\gamma)}\right)$$

$$- \frac{1}{2} . \frac{1}{r^{\beta}} . \frac{{}^{\beta}A\;{}^{\beta}C}{A.\;C}\left(\lambda\overline{a+\beta} - (\lambda\overline{a+\beta).\,(c+\beta)}\right)$$

Es ist aber $\frac{1}{2}\left(\lambda\overline{a} - \lambda\overline{a\,b} - \lambda\overline{a\,c} + \lambda\overline{a\,b\,c}\right) =$ der *Hälfte des baaren Wehrts einer Leibrente für A, im Fall A der Längstlebende unter A, B, C ist. Cap. IV. §. 194.*

Wenn A die älteste der gegebenen Personen ist, so ist nichts zu der Hälfte hinzuzulegen, noch davon abzuziehen. Ist etwas *zuzulegen*, wie in dem Fall, wenn B, welcher C überleben soll, jünger ist als C (A nämlich nicht der älteste von allen) folglich β grösser als γ, so wird $\overset{\beta}{-}C = 0$, und das abzuziehende Stück wird $= 0$. Ist hingegen etwas *abzuziehen*, wie in dem Fall, wenn C jünger ist, so ist $\overset{\gamma}{-}B = 0$, und das zuzulegende Stück wird $= 0$, wie vorher im §. 17.

Diess ist die Auflösung des Problems nach der Hypothese. Ohne Hypothese kommt man auf ein ähnliches Verfahren, das bey der nächstvorhergehenden Aufgabe §. 19. und 20. gewiesen ist.

Fünftes Capitel.

Von den Renten auf das längste Leben.

Erster Abschnitt.

Von der Dauer des längsten Lebens aus mehreren Personen.

223.

Grundsatz.

Die Lebensdauer derjenigen Person, die aus mehreren gegebenen zuletzt stirbt, welche man kurz die *Dauer des längsten Lebens*, auch schlechtweg das *längste Leben* nennt, ist *offenbar so gross als die Zeit, in der die gegebenen Personen alle absterben.*

Diess ist wiederum die *mittlere Zeit* für mehrere Fälle. Eine Person für sich allein hat ihre bestimmte *mittlere Lebensdauer;* allein wenn dazu noch eine andere genommen wird von demselben Alter, so wird es schon wahrscheinlicher, dass eine von diesen beyden näher an das höchste Lebensziel hinaufkomme, als diess bey *Einer* allein sich erwarten lässt. Auch wenn diese hinzukommende zwote Person älter ist, als jene erstere, so wird es dennoch wahrscheinlicher, dass von diesen zwoen Eine ein höheres Alter erreiche, als bey der jüngsten allein erwartet werden kann.

224.

Satz 67. Die Dauer des Längſtlebenden aus mehreren Perſonen iſt ſo groſs, als die Alterſergänzung der jüngſten, weniger der Zeit des Ganzausgeſtorbenſeyns aller Perſonen.

Es iſt klar. Berechnet man, wie lange *alle* gegebene Perſonen abgeſtorben geweſen ſind, nach Ablauf der Zeit, in welcher ſie alle geſtorben ſeyn müſſen; ſo erhält man auch die *Zeit, bis wohin noch Eine aus ihnen gelebt hat*, wenn man die erſtere von der Zeit, in welcher ſie alle geſtorben ſeyn müſſen, abzieht. Länger kann keine leben, als die *Alterſergänzung der jüngſten groſs iſt*. Dieſs iſt die Zeit, in der ſie nothwendig geſtorben ſeyn müſſen.

Zuſatz 1. Die mittlere Zeit des Ganzausgeſtorbenſeyns eines Paars, A und B, iſt nach §. 110.

$$= \frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B} + \frac{(A - {}^{2}A)}{A.} \frac{(B - {}^{2}B)}{B} + + \frac{(A - {}^{x}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{x}B)}{B},$$

wo x die Alterſergänzung der jüngſten von beyden iſt; oder

$$\left(\frac{(A - {}^{1}A)}{A} \cdot \frac{(B - {}^{1}B)}{B} + +\right).$$

Man kann ſie kürzer durch $C\overline{-ab}$, auf eine der obigen analoge Art bezeichnen.

Und dann iſt $x - C\overline{-ab}$ die Lebensdauer des Längſtlebenden von zweyen.

225.

Zusatz 2. Und weil ferner $\frac{(A - \overset{1}{-}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overset{1}{-}B)}{B}$

$$= \frac{AB - \overset{1}{-}AB. - A\overset{1}{-}B + \overset{1}{-}A.\overset{1}{-}B}{A.\;B} = 1 - \frac{\overset{1}{-}A}{A} - \frac{\overset{1}{-}B}{B}$$

$+ \frac{\overset{1}{-}A\;\overset{1}{-}B}{A.\;B}$, und so ferner $\frac{(A - \overset{n}{-}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overset{n}{-}B)}{B}$

$$= \frac{A.\,B - \overset{n}{-}A.\,B - A.\overset{n}{-}B + \overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A\;\;B}$$

$$= 1 - \frac{\overset{n}{-}A}{A} - \frac{\overset{n}{-}B}{B} + \frac{\overset{n}{-}A.\overset{n}{-}B}{A.\;B}$$ bis *x* Jahre,

so wird $x - S.\frac{(A - \overset{1}{-}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overset{1}{-}B)}{B}$

$$= x - \left(x - S.\frac{\overset{1}{-}A}{A} - S.\frac{\overset{1}{-}B}{B} + S.\frac{\overset{1}{-}A\;\overset{1}{-}B}{A.\;B}\right)$$

$$= S.\frac{\overset{1}{-}A}{A} + S.\frac{\overset{1}{-}B}{B} - S.\frac{\overset{1}{-}A\;\overset{1}{-}B}{A.\;B}$$

$$= E\overline{a} + E\overline{b} - C\overline{a\;b}.$$

Das heisst: ***Man addire die Dauer der beyden einzelnen Lebenden, und ziehe von dieser Summe die Dauer ihrer Verbindung ab, so ist der Rest die Dauer des Längstlebenden aus ihnen.***

226.

Anmerkung. Dieser Satz wird auch so bewiesen. Die Wahrscheinlichkeit, dass *von zwoen* Personen A,

 und

Die *Wahrſcheinlichkeit, daſs* *A* **allein** lebe, iſt

$= \frac{\overset{1}{A}\,(B - \overset{1}{B})}{A.\ B}$; die, daſs *B* *allein* lebe,

$= \frac{\overset{1}{B}}{B} \cdot \frac{(A - \overset{1}{A})}{A}$; und die, daſs *beyde noch leben*,

$= \frac{\overset{1}{A}\ \overset{1}{B}}{A\ B}$. Dieſe drey zuſammen machen gleichfalls die Wahrſcheinlichkeit des allgemeinen unbeſtimmten Falls aus, daſs noch Eine wenigſtens lebe, denn ſie machen $= \frac{\overset{1}{A}}{A} + \frac{\overset{1}{B}}{B} - 2\frac{\overset{1}{A}\ \overset{1}{B}}{A\ B} + \frac{\overset{1}{A}\ \overset{1}{B}}{A\ B} =$ dem vorhergefundenen $\frac{\overset{1}{A}}{A} + \frac{\overset{1}{B}}{B} - \frac{\overset{1}{A}\ \overset{1}{B}}{A.\ B}$..

Daraus folgt dann wiederum umgekehrt, daſs dieſe Wahrſcheinlichkeit für alle Jahre zuſammengenommen ſo groſs ſey, als die *Lebensergänzung der jüngſten, weniger der mittlern Zeit des Ganzausgeſtorbenſeyns.* Denn es iſt

$$\frac{\overset{1}{A}}{A} + \frac{\overset{1}{B}}{B} - \frac{\overset{1}{A}\ \overset{1}{B}}{A.\ B} = 1 - \left(1 - \frac{\overset{1}{A}}{A} - \frac{\overset{1}{B}}{B} + \frac{\overset{1}{A}\ \overset{1}{B}}{A.\ B}\right)$$

für das erſte Jahr. Für das zweyte

$$= 1 - \left(1 - \frac{\overset{2}{A}}{A} - \frac{\overset{2}{B}}{B} + \frac{\overset{2}{A}\ \overset{2}{B}}{A\ B}\right)$$ und ſo ferner, bis x Jahre, ſo weit als die Altersergänzung der *jüngſten* geht, Alſo die ganze Summe dieſer Theile für die einzelnen Jahre, macht $x - \overline{C - ab}$.

227.

Anmerkung 2. Ungemein fehlerhaft würde folgender Schluſs seyn. Die Wahrscheinlichkeit, daſs A in dem nächsten ersten Jahr noch lebe, ist $= \frac{{}^{1}A}{A}$; die Wahrscheinlichkeit, daſs B alsdenn noch lebe, ist $= \frac{{}^{1}B}{B}$. Also die Wahrscheinlichkeit, daſs einer von beyden alsdenn noch lebe, ist $= \frac{{}^{1}A}{A} + \frac{{}^{1}B}{B}$. Dieſs hieſse, es sey *mehr als gewiſs*, daſs noch Einer lebe. Der Grundsatz, *daſs die Wahrscheinlichkeit eines allgemeinen Falls gleich sey der Summe der Wahrscheinlichkeiten der besondern unter jenen begriffenen Fälle*, kann nicht unrichtig seyn, wenn er seinem wahren Sinn nach angewandt wird. Diese letztern besondern Fälle sind Theile des Umfangs von dem allgemeinen Fall. Daher macht die Summe der besondern Fälle, in denen etwas Statt findet, die Menge aller Fälle aus, die zu dem Allgemeinen gehören. Und aus dem Verhältniſs der Menge der Fälle, in denen sich etwas besonders eräugnet, zu der Menge aller möglichen Fälle, in der sich Eins eräugnen, und auch nicht eräugnen kann, entsteht die Wahrscheinlichkeit des erstern. Allein die Anwendung hievon muſs logisch richtig gemacht werden. Wer so verfahren wollte, wie vorher gedacht, würde die Fälle nicht so nehmen, wie sie bey einer richtigen Abtheilung unterschieden

schieden werden müssen. Soll einer von zweyen noch leben, so ist das nicht vollständig ausgedrückt, wenn man sagt, es lebt entweder A noch, oder B noch. Sie können alle beyde leben. Es muss so heissen: es lebt entweder *A allein*; oder *B allein*, oder A und B *beysammen*, oder keiner von ihnen.

228.

Anmerkung 3. Im Vorbeygehen sey es erlaubt, hiervon eine andere Anwendung auf die Bestimmung der *historischen Wahrscheinlichkeit* zu machen. Sie gehört hier nicht her, als nur der Aehnlichkeit wegen, allein sie schien mir so erheblich zu seyn, dass sie hier einen Platz haben könne. *Die Wahrscheinlichkeit der Aussage eines Zeugen* A, in Hinsicht des Facti F, sey $\frac{a}{n}$. Sie muss *bestimmt werden aus dem Verhältniss der Menge der Fälle, in denen nach der Erfahrung eine solche Aussage*, (eines solchen Zeugen, unter solchen Umständen,) *wahr befunden wird*, zu der Menge aller Fälle, wo sie wahr und falsch befunden wird. Man hat noch solche Aufzählungen nicht gemacht; man begnügt sich mit einem allgemeinen Ueberschlage, da man nämlich jenes Verhältniss nur einigermassen zu schätzen suchet. So lange solcher nicht genauer angegeben werden kann, ist es denn auch nicht möglich, mehr zu thun, als die historische Glaubwürdigkeit zu *schätzen*. Muss es auch auf immer dabey bleiben; so sieht man dennoch, was man

man haben müsse, und was man nicht hat, wenn man bestimmt darüber urtheilen will.

Die *Wahrscheinlichkeit eines andern Zeugen B*, für ein Factum G, sey auf gleiche Weise bestimmt, $\frac{b}{n}$.

Stehen diese Facta, F und G, in keiner logischen Beziehung auf einander, wodurch die Wahrheit oder Falschheit des einen von der Wahrheit oder Falschheit des andern abhängig würde, so ist

1) *die Wahrscheinlichkeit des Facti F für sich allein*, $= \frac{a}{n}$.

2) *Die Wahrscheinlichkeit von G für sich*, $= \frac{b}{n}$.

3) *Die Wahrscheinlichkeit*, dass *F wahr und zugleich G falsch sey*, $= \frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}$.

4) Die, dass *G wahr*, und *zugleich F* falsch sey, $= \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$.

5) Die, *dass beyde wahr* sind, $= \frac{ab}{nn}$.

6) Dass *Eins von beyden wahr* sey,
$= \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$.

7) Dass *keins von beyden wahr sey*,
$= \left(1 - \frac{a}{n}\right)\left(1 - \frac{b}{n}\right) = 1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}$.

Sind

Sind die beyden Facta *einerley*, so ist es *Ein durch zwey Aussagen bezeugtes Factum.* Alsdenn ist die *Wahrscheinlichkeit desselben*, nicht $= \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$, was grösser als die Gewissheit seyn würde, und der Natur der Sache entgegen ist; sondern $= \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$. Ein Ausdruck, der dem für das *längste Leben* ähnlich ist. Diess ist noch jedesmal ein eigentlicher Bruch, weil $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ dergleichen sind, aber es kann der Einheit sehr nahe kommen. Es ist nämlich in diesem Fall nichts mehr erforderlich, als dass nur *nicht beyde Aussagen* falsch sind. Also die Wahrscheinlichkeit, dass *beyde Zeugnisse falsch sind*, von der *Gewissheit* abgezogen, hinterlässt die *Wahrscheinlichkeit des Facti.* Diese ist also

$$1 - \left(1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}\right) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}.$$

Der *Ueberschuss der Wahrscheinlichkeit* des bezeugten Facti über seine *Unwahrscheinlichkeit*, oder der Ueberschuss seiner Wahrscheinlichkeit über die *Wahrscheinlichkeit seines Gegentheils*, den man gewöhnlich ausser der Wissenschaft *unter Wahrscheinlichkeit* versteht, ist $= 2\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}\right) - 1$.

Ist die *Zahl der übereinstimmenden Zeugen noch grösser*, so erhält man gleichfalls einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit der bezeugten Sache, der dem für *die Dauer* des *Längstlebenden* aus *mehreren* Personen ähnlich

ähnlich ist. Die Wahrscheinlichkeit nähert sich immer mehr der völligen Gewissheit, und kann sich ihr über alle Gränzen nähern, je nachdem die Zahl der Zeugen und die Wahrscheinlichkeit der einzelnen grösser ist. Aber ganz erreicht sie solche nicht, noch weniger kann sie über sie hinausgehen. *Mehr als gewiss* kann nichts werden, wenn man eigentlich redet.

Sind die Facta F und G *einander entgegen*, so können die Aussagen 1) *einander gerade widersprechen*, das ist, *weder zugleich wahr*, *noch zugleich falsch* seyn. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, dass *beyde* falsch sind, ein Nichts, eben so, wie die, dass beyde wahr sind. Eins von beyden ist gewiss. Die *ganze Gewissheit liegt also in den zwey Fällen*, in dem, dass die Aussage von A wahr ist, und in dem, dass die andere von B es ist. Es bleiben hier nämlich diese zwey Fälle als möglich zurück. Daher sind alle mögliche Fälle in $\frac{a}{n} + \frac{b}{n}$ begriffen. Daraus ist denn klar, dass *die Wahrscheinlichkeit des Facti F* zur *Gewissheit* sich verhalte wie $\frac{a}{n} : \frac{a+b}{n}$, also $= \frac{a}{a+b}$ sey; und die des *Gegentheils*, oder des Facti G, $= \frac{b}{a+b} = 1 - \frac{a}{a+b}$, das ist gleich der *Unwahrscheinlichkeit von F.* Der Ueberschuss der Wahrscheinlichkeit von F, über die des Gegentheils, das ist, die Erwartung von F ist $= \frac{a-b}{a+b}$..

2) Die

2) Die beyden Ausſagen können *unbeſtehbar* ſeyn mit einander, aber doch *beyde zugleich falſch.* Eine kann z. B. enthalten, daſs jemand zu einer beſtimmten Zeit an einem Orte geweſen ſey; die andere, daſs er zu derſelben Zeit an einem andern weit davon entfernten ſich befunden habe.

Auch 3) iſt es möglich, daſs zwey Ausſagen *nicht zugleich falſch*, obſchon *zugleich wahr* ſeyn können. Z. B. A bezeuget von *Einigen* etwas, welches B *Einigen*, die unter daſſelbe allgemeine Subject gehören, abſpricht. Zwey particuläre einander entgegengeſetzte Ausſagen können beyde zugleich wahr ſeyn, aber nicht beyde zugleich falſch. Dieſs Verhältniſs iſt eine *Entgegenſtehung der zwoten Art.* Einige nennen es *oppoſitiö ſubcontraria.* Sie findet nur Statt, wo Eine oder beyde Ausſagen in *Hinſicht des Subjects* unbeſtimmt ſind.

Wie in dieſen Fällen die Wahrſcheinlichkeit des einen oder des andern Facti zu beſtimmen ſey, fällt nicht ſo leicht auf. Ohne hier weiter in dieſe Materie hineinzugehen, will ich bloſs die Reſultate herſetzen, auf welche ich gekommen bin. Sie ſind Folgen derſelbigen allgemeinen Grundſätze, worauf das Vorhergehende beruhet, und ſtimmen auch mit dieſem, wie unter ſich, völlig überein. Dieſs wird noch deſto mehr einleuchten, je mehr man ſie gebrauchen, und aus ihnen weiter ſchlieſsen wird.

Es giebt überhaupt vier Classen der *an sich* möglichen Fälle.

1) Die *Aussage von A ist wahr*, und *die von B falsch* $= \frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}$.

2) Die *Aussage des B ist wahr*, die *des A falsch*, $= \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$.

3) *Beyde sind zugleich wahr*, $= \frac{ab}{nn}$; und

4) *Keine ist wahr* $= 1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}$.

In der Summe aller Fälle, die zu diesen vier Classen gehören, muss allemal die *Gewissheit* liegen, oder alle unter diesen begriffene Fälle machen alle mögliche Fälle aus. Man kann unter der Wahrscheinlichkeit der Classe sich die Summe der dazu gehörigen Fälle vorstellen. Ihre Summe ist auch $= 1$. Nun aber fällt durch die bestimmte Bedingung, dass beyde Aussagen nicht zugleich wahr seyn können, die *dritte Classe* von Fällen als unmöglich weg. Die Gewissheit liegt also in den übrigen, welche nun als die Summe aller möglichen Fälle anzusehen sind. Diese Summe macht.

$$\frac{a}{n} - \frac{ab}{nn} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn} + 1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn} = 1 - \frac{ab}{nn}.$$

Das *Factum F, was auf der Aussage des A beruhet*, fällt bloss in die eine Classe von Fällen, deren Summe

$= \frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}$ ist. Das zweyte G, bloss in die Classe $\frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$. Die *Wahrscheinlichkeit des ersten F verhält sich also zur Gewissheit, wie die Zahl der Fälle, in denen es Statt findet, zur Zahl aller möglichen*, und ist

$$\text{also} = \frac{\frac{a}{n} - \frac{ab}{nn}}{1 - \frac{ab}{nn}} = \frac{na - ab}{nn - ab}.$$

Die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils ist

$$= 1 - \frac{na - ab}{nn - ab} = \frac{nn - na}{nn - ab} = \frac{1 - \frac{a}{n}}{1 - \frac{ab}{nn}}$$

$$= \frac{\frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}}{1 - \frac{ab}{nn}} + \frac{1 - \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{ab}{nn}}{1 - \frac{ab}{nn}},$$ das ist, *gleich der Wahrscheinlichkeit der beyden entgegengesetzten Fälle*, die zusammengenommen das Gegentheil enthalten.

Wenn die Aussagen auf die zwote Art einander entgegen stehen, das ist, *nicht beyde falsch seyn können* nach der Natur der Sache, so fällt die vierte Classe von Fällen weg, und es bleiben nur $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$ Möglichkeiten.

Diejenigen, in denen die Aussage von A wahr ist, sind die erste und dritte $\frac{a}{n} - \frac{ab}{nn} + \frac{ab}{nn} = \frac{a}{n}$.

Eben so giebt es von Fällen, bey denen die zwote Aussage wahr ist, so viele, also $= \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn} + \frac{ab}{nn} = \frac{b}{n}$.

Daher ist die *Wahrscheinlichkeit des durch die Aussage von A bezeugten Facti F zur Gewißheit*, wie $\frac{a}{n} : \frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn} = \frac{a}{a + b - \frac{ab}{n}}$.

Diese Wahrscheinlichkeit ist grösser als $\frac{a}{n}$, weil $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{ab}{nn}$ kleiner als die *Einheit* ist. Die hinzukommende Aussage von B bestätiget also in etwas die Aussage des A, indem sie die Wahrscheinlichkeit derselben grösser macht, als solche für sich allein gewesen seyn würde. Dieß darf nicht befremden. Beyde Aussagen heben sich nicht nur nicht auf, weil sie beyde wahr seyn können, sondern in so ferne die eine davon nicht falsch seyn kann, ohne daß die andere wahr sey, so liegt in der Wahrscheinlichkeit bey jener, daß sie falsch sey, auch die Wahrscheinlichkeit, daß diese wahr sey. Wenn eine Aussage *Einigen* etwas beylegt, die andre *Einigen*, (unbestimmt, ob denselbigen oder andern) etwas abspricht, so liegt darin, daß die letztere verneinende sich nur auf Einige einschränkt, eine Bestätigung der erstern. Ein anders ist es, wie weit die Voraussetzung, daß nothwendig eine von beyden wahr seyn müsse, wirklich Statt finde. Solche Fälle, wo dieß nicht als schlechthin nothwendig angenommen werden kann, gehören nicht hieher.

Ist die Aussage von B *gewiss falsch*, oder ist $1 - \frac{b}{n} = 1$. oder $b = 0$, so wird die Wahrscheinlichkeit des von A bezeugten Facti $= \frac{a}{a} = 1$. So ist es auch nach der Natur der Sache. Eine muss hier wahr seyn, sobald die andere falsch ist.

229.

Satz 68. Für drey Personen A, B, C, wird die mittlere Zeit *des Ganzausgestorbenseyns*

$$C\overline{-abc} = S. \frac{(A - \overset{1}{-}A)}{A} \cdot \frac{(B - \overset{1}{-}B)}{B} \cdot \frac{(C - \overset{1}{-}C)}{C},$$

$$= S.\Big(1 - \frac{\overset{1}{-}A}{A} - \frac{\overset{1}{-}B}{B} - \frac{\overset{1}{-}C}{C} + \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A.\ B}$$

$$+ \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}C}{A.\ C} + \frac{\overset{1}{-}B\ \overset{1}{-}C}{B\ C} - \frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B\ \overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C}\Big).$$

Also $x - C\overline{-abc} = x - x + S.\frac{\overset{1}{-}A}{A} + S.\frac{\overset{1}{-}B}{B}$

$$+ S.\frac{\overset{1}{-}C}{C} - \Big(S.\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\ B} + S.\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B}{A\ B}$$

$$+ S.\frac{\overset{1}{-}B\ \overset{1}{-}C}{B\ C}\Big) + S.\frac{\overset{1}{-}A\ \overset{1}{-}B\ \overset{1}{-}C}{A.\ B.\ C} = E\overline{a} + E\overline{b}$$

$$+ E\overline{c} - (C\overline{a\,b} + C\overline{a\,c} + C\overline{b\,c}) + C\overline{abc}.$$

Das ist. *Man nehme die Summe der einzelnen Lebensdauern, ziehe davon ab die Coexistenz jeder zwo Personen,*

welche aus dreyen mit einander verbunden werden können, und lege wiederum hinzu die Dauer der Verbindung der dreyen.

230.

Zusatz. 1. Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben, wird für den Fall, daſs alle gegebene Personen *gleich alt* sind, also ihre *gemeinschaftliche Altersergänzung a*, *die Dauer des Längstlebenden* $= \frac{n}{n+1} \cdot a$, wenn *n* die Zahl der Personen ist. Der Beweis steht in den *Zusätzen* zu diesem Capitel. *)

231.

Anmerkung. Nach der Sterblichkeitstafel soll unter einer gewissen Zahl von Lebenden von einem bestimmten Alter, *Einer* das *höchste* Alter erreichen. Nach *Süssmilchs* Tafel kommt von 300 Funfzigjährigen *Einer* dahin. Berechnet man dagegen die Dauer der *Längstlebenden* aus 300 dieses Alters, so wird sie kleiner seyn als die *Altersergänzung* zu 50 Jahren. Dasselbe findet Statt, nach welcher Sterbensordnung man auch rechnet. Mit andern Worten, es wird auch der Längstlebende nicht ganz das höchste Alter erreichen, also keiner von den angenommenen 300 Funfzigjährigen wird dahin kommen. Zwar mag sehr wenig daran fehlen; nach der Hypothese vom gleichförmigen Sterben nicht mehr als $\frac{1}{301}$ der Altersergänzung. Dennoch ist dieſs immer etwas.

Ist

*) §. 2.

Ist es denn nicht erlaubt so zu schliessen: „Von N „Personen des Alters *a*, kommt Einer zu 96 Jahren. „Diess sagt die allgemeine Sterblichkeitstafel. Hier ist „eine solche Zahl solcher Personen. Also wird Einer „aus ihnen dahin kommen?“

Dieser Schluss ist fehlerhaft. Die Sterblichkeitstafel sagt nicht, was man sie sagen läst. Sie sagt, dass aus N Personen des Alters *a*, *im Durchschnitt Eine* das höchste Alter erreiche; *im Durchschnitt*, das heisst hier, man vertheile alle 50 jährige Lebende in Haufen von 300, so wird aus einem Haufen vielleicht Einer, aus einem andern mehrere, aus einem dritten gar keiner dahin kommen. Das *Mittel* aber aus diesen genommen giebt auf jeden solcher Haufen von 300 im Durchschnitt Einen. Das ist es aber nicht, wovon hier die Rede ist, nemlich von *dem bestimmten Haufen* N. Jenes heisst nicht, dass *jeder* bestimmte *Haufen* N Einen Höchstalten liefere. Da man auf die besondere Qualität der Individuen nicht sieht, so kann der Haufe N nach 10 Jahren schon ganz ausgestorben seyn; kann auch Einen nach 20 oder 30 oder 40 Jahren übrig haben, kann mehr als Einen ins höchste Alter bringen, und so ferner. Es giebt viele Möglichkeiten. *Das Mittel, nicht aus den Zahlen derer, die das höchste Alter erreichen*, sondern das *Mittel aus dem Alter, welches die Längstlebende der verschiedenen Haufen erreichen, ist die mittlere Dauer der Längstlebenden.* Wie die mittlere künftige Lebensdauer eines

Einzelnen nicht sagt, dass er so alt werde, sondern dass diess das Mittel aus den verschiedenen Stufen sey, die Einzelne erreichen, so auch hier. Nicht in einem bestimmten Haufen soll der Längstlebende gewiss so alt werden, sondern das Alter der Längstlebenden aus allen Haufen giebt so ein Mittel.

Die allgemeine Sterblichkeitstafel sagt nichts mehr, als dass im *Durchschnitt* von 300 Funfzigjährigen *Einer* das höchste Alter erreiche; sie sagt das nicht von jedem besondern Haufen, worein man die wirklich Lebenden von jenem Alter vertheilen mögte. Es würde widersinnig seyn, sie so zu erklären. So müssten jede 300 Funfzigjährigen, nach allen beliebigen Combinationen Einen haben, der zum 96sten Jahre kommt; man mögte lauter Schwache, oder lauter Starke zusammen nehmen, so gar lauter Kranke oder lauter Gesunde. Aber wenn auch alle Individuen an Gesundheit und Constitution für gleich gehalten werden, *so geht es doch nicht an*, dass jede besondere Combination von 300, das ist, eine solche Zahl von Individuen, wie man sie auch nimmt, Einen enthalte, der 96 Jahr alt wird. Man setze unter den 300, A, B, C, u. s. f. sey so Einer, und unter 300 andern a, b, c, u. s. f. auch Einer. Sollte nun unter jeden 300, wie man sie aus jenen und diesen A, a, B, b, u. s. f. verbinden kann, ein Candidat des höchsten Alters begriffen seyn, so müssten ihrer viel mehr als *zwey* unter den 600 sich befinden. Sollten A und *a*, z. B. die beyden seyn; so

so wird ohngefähr der vierte Theil aller möglichen Verbindungen keinen von diesen beyden in sich enthalten, aus denen doch auch gleichwohl Einer das Ziel erreichen sollte.

Wahr ist es, bey der Anwendung, die man gewöhnlich von der allgemeinen Tabelle macht, scheint angenommen zu werden, sie enthalte wahre *Allgemeinsätze von jedem Haufen* Menschen vom bestimmten Alter. Wir schliessen, von 10 Funfzigjährigen sind fast die Hälfte schon im 67sten Jahre todt, darum weil nach der Tabelle alsdenn nicht mehr als 152 von 300 leben. Wie können wir so schliessen, wenn das nicht wahr ist von jeden 300 ohne Ausnahme?

Das hiesse allerdings sehr übel geschlossen, wenn die Sätze, die wir aus dem Grundsatz ziehen, den Sinn haben sollten, dass z. B. von den bestimmten 10 Lebenden im 50sten Jahr, von A, B, C, u, s. w. gewiss nur Fünf im 67sten Jahr übrig sind. Aber so wissen wir ja, dass die Bestimmung der Lebensdauer und auch der Leibrenten eine Bestimmung dessen sey, was sich nur als ein *Mittel* oder *Durchschnitt* in mehreren Fällen zeiget. Es wird nicht erwartet, dass es bey jedem einzelnen Falle besonders zutreffe, sondern dass wenn in einem Fall, bey einem Individuo oder bey einem Haufen etwas zu viel erfolgt, in dem andern zu wenig geschehen werde. Die Rechnung giebt nicht das Wirkliche bey einzelnen Fällen, sondern *das Mittel aus dem Wahr-*

scheinlichen. Wenn man es erwartet in einem einzelnen Fall, so erwartet man, was man nicht erwarten sollte, was nach grosser Wahrscheinlichkeit nicht erfolgt. Aber wenn man *in mehreren Fällen zusammen* so viel erwartet, als das Mittel für jeden beträgt, so wird der wirkliche Erfolg hier mehr, dort weniger geben, im Ganzen aber mit der Erwartung übereinstimmen.

Auf diese Art, meine ich, fallen alle Zweifel von selbst weg, die hier aufstossen könnten. Ein Mann, wie *d' Alembert* traf dergleichen an. Es muss also wohl Stellen geben, wo längst dem rechten Wege sich Abwege finden, die der grösste Theil der Wanderer und der Nachwanderer vielleicht glücklich vermeidet, die aber den, der auch zu den Seiten hin die Augen wirft, und die rechte Bahn nicht nur halten, sondern auch jedesmal sich versichern will, dass er sie halte, zweifelhaft machen können.

232.

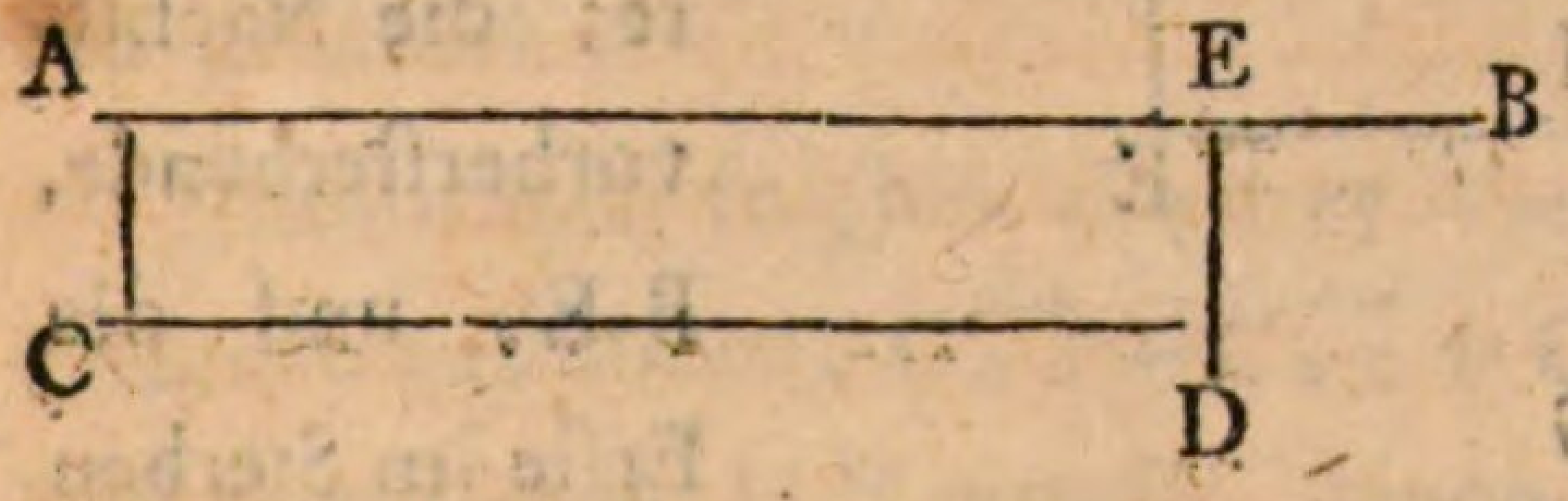
Zusatz 2. Der 68ste Satz im §. 229, kann allgemein für *mehrere* Personen ausgedruckt werden. Man nehme 1) die Summe aller *einzelnen* Lebensdauern, 2) die Summe der *Verbindungsdauer von je zwo und zwo;* 3) die Summe derselben von *dreyen*, so viele dergleichen Verbindungen bey der gegebenen Zahl von Personen möglich sind, und 4) so ferner die Coexistenzen von *mehreren*, bis die letztere die Verbindungsdauer *aller* gegebenen ist.

Von

Von dieſen ſo gefundenen Summen wird die zwote von der *erſten abgezogen;* dann die dritte wiederum *addirt*, und ſo ferner, die folgenden wechſelsweiſe ſubtrahirt und addirt. So bekommt man die Dauer des Längſtlebenden. Siehe die *Zuſätze* zu dieſem Capitel.*)

233.

Anmerkung. Man kann die *Dauer des Längſtlebenden* und die davon abhangenden Gröſsen auch aus andern Grundſätzen herleiten, die in ihrer Anwendung leichter und weiter führen. Es ſey A B die Dauer des Längſtlebenden *unter zwoen Perſonen*, die mittlere Lebensdauer *der zwoten*, mit der längſtlebenden verbundenen Perſon ſey CD; oder *Einer* lebe durch die Zeit AB, der *Andere* durch CD; ſo iſt $AE = CD$ *die Dauer der Verbindung von beyden*.



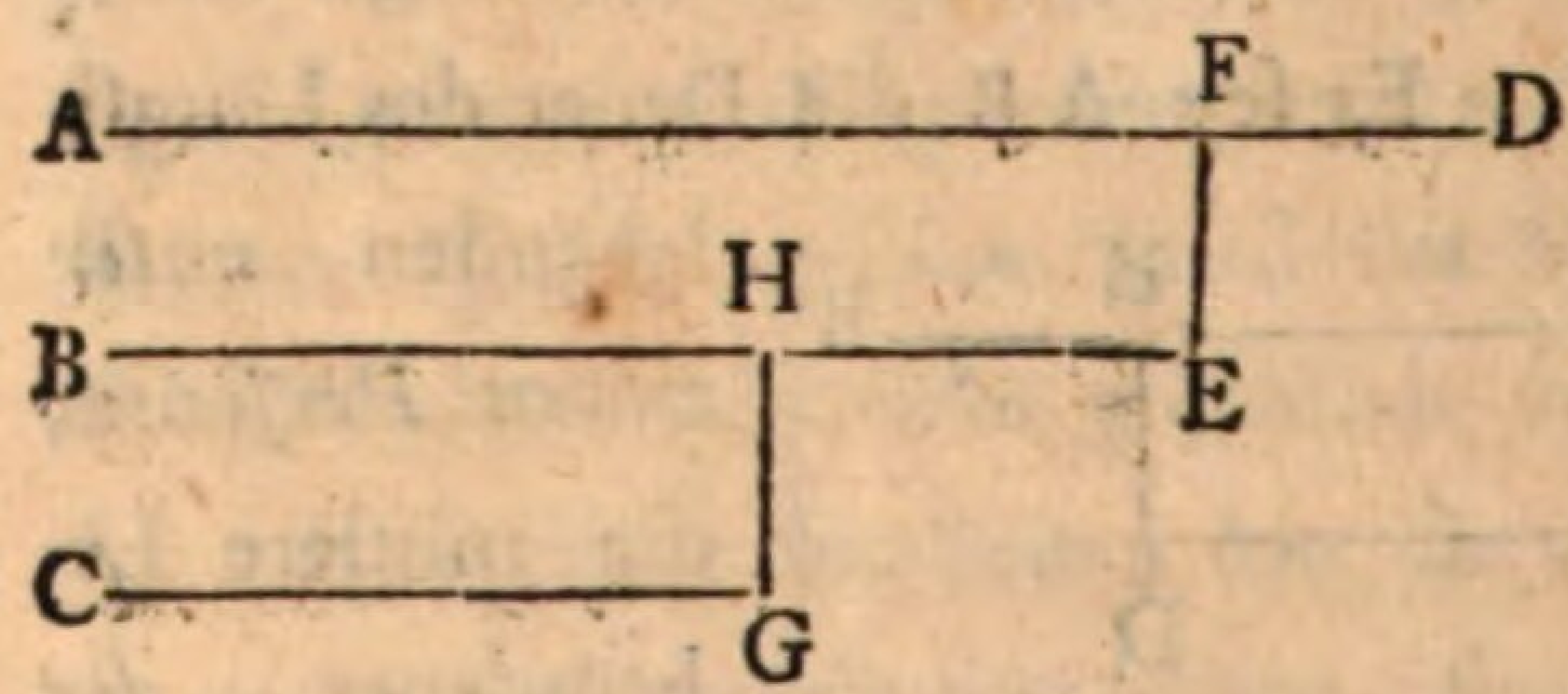
Nun iſt $AB + CD = E\overline{a} + E\overline{b}$, das iſt, ſo groſs als die Summe der einzelnen Lebensdauer der Perſonen. Der Eine lebt länger, der andere weniger, als ſeine mittlere Lebensdauer, allein die beyden Lebenswährungen machen nicht mehr noch weniger als die Summe ihrer mittlern Lebensdauer. Nimmt man alſo dieſe Summe und zieht davon ab die Dauer der Verbindung, ſo bekommt

*) §. 1.

kommt man A B, die Dauer des *Längſtlebenden* $= E_{\overline{a}} + E_{\overline{b}} - C_{\overline{ab}}$.

Dieſs iſt auch ſo klar. Wenn man die einzelne Lebensdauer der beyden addirt, ſo hat man 2. A E, oder die *Dauer der Verbindung* zweymal, und E B, oder die *Dauer des Ueberlebens* des Einen zuſammen. Man ziehe ſo viel Jahre als doppelt gezählet ſind, wiederum ab, ſo bekommt man die Dauer des Längſtlebenden.

Für drey Perſonen nehme man an: die *Längſtlebende* erreiche AD Jahre; die Nächſtvorherſterbende, B E, und die Erſte im Sterben C G.



Die Summe AD + BE + CG muſs der Summe der einzelnen Lebensdauer $E_{\overline{a}} + E_{\overline{b}} + E_{\overline{c}}$ gleich ſeyn.

Allein wenn man dieſe Summe nimmt, ſo hat man CG *dreymal*, und BE *zweymal* gerechnet, da jede doch in dem längſten Leben nur einmal gerechnet werden ſollte: BE iſt aber *die Zeit, bis wohin noch zwey zuſammen gelebet haben*, oder *die Zeit, in der zwey aus dreyen abgegangen ſind*, und CG iſt *die Dauer der Verbindung aller dreyen*, oder *die Zeit, in der Einer von dreyen abgeht.* Daher giebt $E_{\overline{a}} + E_{\overline{b}} + E_{\overline{c}} - BE - CG$ die Dauer des Längſtlebenden. Es iſt $CG = C_{\overline{abc}}$ die *Verbindungsdauer aller dreyen*, wie für ſich klar iſt.

Nur

Nur B E iſt noch zu ſuchen. Dieſs iſt die Zeit, bis wohin immer noch zwey aus dreyen beyſammen leben, nach deren Verlauf *zwey aus dreyen abgeſtorben ſind*, oder auch *die Dauer des längſten Zuſammenlebens zweyer aus dreyen.*

Sie wird ſo gefunden. Drey Perſonen geben drey Verbindungen zu zwoen, nämlich A. B, A. C, B. C. Dieſe drey Verbindungen dauern alle, ſo lange alle drey Perſonen leben, das iſt, durch die Zeit C G. So bald aber Eine aus dreyen abgeht, bleibt auch nur Eine Verbindung übrig. Alſo in der Zeit H E hat nur *Eine* davon gedauert.

Nimmt man folglich alle drey Verbindungen zwoer Perſonen zuſammen, $C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}}$, ſo hat man B H *dreymal* und H E *einmal*, davon alſo 2 B H abgezogen, bleibt B E übrig; das iſt,

$$C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}} - 2\,C_{\overline{abc}} = BE.$$

Daraus wird

$$AD = E_{\overline{a}} + E_{\overline{b}} + E_{\overline{c}} - (C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}}) + 2\,C_{\overline{abc}} - C_{\overline{abc}} = E_{\overline{a}} + E_{\overline{b}} + E_{\overline{c}} - (C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{bc}}) + C_{\overline{abc}}.$$

Es läſst ſich daraus auch die Zeit H E, die *Dauer der bloſsen Verbindung von Zweyen*, das iſt, in der *nur zwo* am Leben ſind, ingleichen F D die Dauer des *Ueberlebens* des *Längſtlebenden* über die andern beſtimmen. Hier habe ich nur die erſten Gründe davon beygebracht. Etwas weiter iſt dieſe Unterſuchung in den *Zuſätzen* ausgeführt. *)

234.

*) §. 4 u. f. f.

234.

Satz 69. Die Dauer des Ueberlebens des Längstlebenden unter zwoen, ist gleich der Summe der einzelnen Lebensdauern weniger der Dauer der Verbindung zweymal genommen; das ist $= E\overline{a} + E\overline{b} - 2\,C\overline{ab}$.

Beweis. Es ist offenbar, dass wenn von der ganzen Dauer des *Längstlebenden* die *Zeit des Zusammenlebens* abgezogen wird, so bleibt die Zeit, die der erstere *allein* nach dem andern noch fortlebet, übrig. Die *Dauer des Längstlebenden* ist $= E\overline{a} + E\overline{b} - C\overline{ab}$ (§. 225.) Daher die Dauer des *Zuletztalleinlebens* $= E\overline{a} + E\overline{b} - 2\,C\overline{ab}$.

235.

Zusatz 1. Sind *drey* Personen gegeben, so ist die Dauer des Längstlebenden

$$= E\overline{a} + E\overline{b} + E\overline{c} - (C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{bc}) + C\overline{abc}.$$

Davon muss die Zeit abgezogen werden, bis wohin noch wenigstens zwey zusammen leben, das ist $C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{bc} - 2\,C\overline{abc}$. (§. 233.) Diess giebt für die Zeit des *Alleinnachlebens* des Längstlebenden $E\overline{a} + E\overline{b} + E\overline{c} - 2(C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{bc}) + 3\,C\overline{abc}$.

236.

Zusatz 2. Die *Wahrscheinlichkeit*, dass von zweyen A und B, *insonderheit* A der *Längstlebende* sey, ist einerley mit der *Wahrscheinlichkeit*, dass A, B überlebe (§. 168).

Und

Und *die Dauer des Ueberlebens*, oder *des Lebens nach der Trennung*, ist $E\overline{a} - C\overline{ab}$.

237.

Zusatz 3. Eben so ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass A insonderheit unter dreyen der *Längstlebende* sey einerley mit der *Wahrscheinlichkeit*, dass A die beyden andern überlebe. Und die *Dauer des Ueberlebens* des A nach dem Tode der beyden andern ist

$$= E\overline{a} - (C\overline{ab} + C\overline{ac}) + C\overline{abc}.$$

Zweyter Abschnitt.

Von Renten auf die Dauer des Längstlebenden.

238.

Satz 70. Der Wehrt des längsten Lebens, oder *der baare Wehrt einer Rente, welche so lange gezogen wird, als noch Einer aus mehreren am Leben ist, wird überhaupt auf dieselbige Art aus den Wehrten der einfachen Leibrenten und der Verbindungsrenten bestimmt, wie die Dauer des längsten Lebens aus der Dauer des einzelnen Lebens und der Verbindungen.*

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, dass im *n*ten Jahr noch Eine Person am Leben sey, ist gleich der Einheit weniger der Wahrscheinlichkeit, dass sie alle gestorben sind. Also

=

$$= \left(\frac{\overset{n}{-}A}{A} + \frac{\overset{n}{-}B}{B} + \frac{\overset{n}{-}C}{C} + + \right) - \left(\frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A.\ B} + \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}C}{A.\ C} + \frac{\overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{B\ C}\right) + \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{A.\ B.\ C} + +$$

Der *baare* Wehrt der Ausgabe für dieses Jahr ist also auch

$$= \left(\frac{\overset{n}{-}A}{A\,r^n} + \frac{\overset{n}{-}B}{B\,r^n} + \frac{\overset{n}{-}C}{C\,r^n} + + \right)$$

$$- \left(\frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B}{A.\ B\,r^n} + \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}C}{A.\ C\,r^n} + \frac{\overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{B.\ C\,r^n} + + \right)$$

$$+ \frac{\overset{n}{-}A\ \overset{n}{-}B\ \overset{n}{-}C}{A.\ B.\ C\,r^n} + +$$

Und die Summe aus allen Jahren $= (\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} + +) - (\lambda\overline{a\,b} + \lambda\overline{a\,c} + \lambda\overline{b\,c} + +) + \lambda\overline{a\,b\,c} + +$.

239.

Zusatz. 1. Daraus folgt dann der *Wehrt der Rente auf das längste Leben* von Zweyen, *a* und *b*, $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - \lambda\overline{a\,b}$.

Zusatz 2. Der *Wehrt der Rente auf das längste Leben aus dreyen*

$$= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - \lambda\overline{a\,b} - \lambda\overline{a\,c} - \lambda\overline{b\,c} + \lambda\overline{a\,b\,c}$$

240.

Zusatz 3. Der *Wehrt einer Leibrente, welche Einer von beyden A oder B zu heben hat, nach dem Tode des andern*, ist $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - 2\,\lambda\overline{a\,b}$. (§. 134.)

Hat

Hat *A allein* die Erwartung, B nicht, ſo iſt der Wehrt $= \lambda\,\overline{a} - \lambda\,\overline{a\,b}$. Cap. III. §. 129.

241.

Zuſatz 4. Die Rente für den *Längſtlebenden aus dreyen* iſt

$$= \lambda\,\overline{a} + \lambda\,\overline{b} + \lambda\,\overline{c} - (\lambda\,\overline{a\,b} + \lambda\,\overline{a\,c} + \lambda\,\overline{b\,c}) + \lambda\,\overline{a\,b\,c}. \text{ §. 233.}$$

Zuſatz 5. Die Rente für den Nachlebenden aus drey Perſonen auf Lebenszeit iſt $= \lambda\,\overline{a} + \lambda\,\overline{b} + \lambda\,\overline{c} - 2(\lambda\,\overline{a\,b} + \lambda\,\overline{a\,c} + \lambda\,\overline{b\,c}) + 3\,\lambda\,\overline{a\,b\,c}$. §. 229.

Zuſatz 6. Hat *A allein* die Erwartung einer Leibrente nach dem Tode von B und C, ſo iſt der Wehrt dieſer Erwartung $= \lambda\,\overline{a} - (\lambda\,\overline{a\,b} + \lambda\,\overline{a\,c}) + \lambda\,\overline{a\,b\,c}$, wie Cap. IV. §. 195.

242.

Anmerkung. Es läſst ſich hier bey den Renten auch dieſelbe Art zu ſchlieſsen anwenden, die vorher §. 233, bey der Beſtimmung der *Dauer* gebraucht iſt. Soll z. B. die Rente des Längſtlebenden unter zweyen A und B, gefunden werden, ſo iſt es offenbar daſſelbe, als wenn jedem inſonderheit, dem A ſowohl als B, eine *Leibrente* bezahlet würde, mit der Bedingung, daſs von dieſen zweyen jährlichen Renten *Eine* jedesmal zurück gegeben werde, ſo lange beyder Verbindung dauert. Auf dieſe Art wird nur *Eine* Rente bezahlet, ſo lange Einer von beyden lebet. Daraus folgt dann von ſelbſt, *der Wehrt*

der Rente des Längstlebenden sey gleich der Summe der Renten für die einzelnen Leben, wenn die Verbindungsrente davon abgezogen wird.

Eben so erhellet, daſs es einerley sey, eine Rente *an Einen von beyden*, an A oder an B, nach dem Tode des andern zu bezahlen; und an *alle beyde von nun an*, an jeden eine zu zahlen, sich aber, so lange A und B beysammen leben, beyde Renten zurück geben zu lassen. Das heiſst so viel, als nichts zahlen, so lange beyde zusammen leben. Daraus folgt dann der Wehrt *der Rente des Nachlebens* $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - 2\,\lambda\overline{ab}$.

So geht man leicht weiter. Soll die Rente an den *Längstlebenden aus dreyen* bezahlet werden, so zahle man an dessen Statt sie an alle drey, an jeden Eine, jedoch mit der Bedingung, daſs so lange alle *drey* in Verbindung sind, *zwo*, und so lange nachher noch zwey in Verbindung sind, *Eine* Rente wieder zurück gegeben werde. Denn auf diese Weise wird jedesmal nur Eine Rente wirklich bezahlet. Dieſs ist aber wiederum so viel, als wenn *Eine* Rente zurückgegeben werden soll, so lange noch zwey beysammen leben, und noch *Eine* dazu, so lange *alle drey* beysammen leben.

Renten aber zu finden für die längste Verbindung *von zweyen aus dreyen*, kann man so schlieſsen. Man zahle so viele Verbindungsrenten für zwey, als Verbindungen der Art aus drey Personen vorhanden sind, das ist, man

zahle

zahle drey solche Renten, weil drey solcher Verbindungen aus drey Personen entstehen. Davon nehme man aber wiederum *zwey* jedesmal zurück, so lange die Verbindung aller *drey* bestehet. Auf diese Art zahlet man nur Eine, so lange eine Verbindung von zweyen da ist. Folglich ist die Rente für die längste Verbindung von zwey aus dreyen $= \lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc} - 2\,\lambda\overline{abc}$. Und weil nun dieser Wehrt nebst der Verbindungsrente aller dreyen, das ist zusammen, $\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc} - \lambda\overline{abc}$ von der Summe der *einzelnen Renten* abgegeben werden soll, um den Wehrt der Rente auf den Längstlebenden zu haben, so wird dieser letztere.

$$= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \lambda\overline{abc}.$$

So folgt auch auf diese Art, daſs der Wehrt der Renten, aus den gegebenen Renten auf dieselbe Art gefunden werde, wie die Dauer aus der gegebenen Dauer der einzelnen Leben und der Verbindungen.

243.

Satz 71. Der Wehrt einer Leibrente für A, die A, so lange B lebet, mit B zur Hälfte theilen soll, ist der ganzen Leibrente von A gleich, wenn davon die Hälfte des Wehrts der Verbindung von A und B abgezogen wird; oder $= \lambda\overline{a} - \dfrac{\lambda\overline{ab}}{2}$.

Beweis. Es ist nämlich klar, daſs man sich die Sache so vorstellen könne. Die Rente werde A ganz gegeben,

nur, ſo lange B mit A lebet, ſollte A jedesmal die Hälfte beym Empfang zurückzahlen. Alsdenn iſt das, was A *haben* ſoll $= \lambda\overline{a}$, und was er *zurück zahlen* ſoll $= \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$. Beydes zuſammen alſo $\lambda\overline{a} - \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$.

Anders. Man kann auch ſo ſchlieſsen: A ſoll gleich von Anfang an empfangen die *Hälfte* ſeiner Leibrente $\frac{\lambda\overline{a}}{2}$, und nach dem Tode von B noch *jährlich* $\frac{1}{2}$ mehr, ſo lange A überlebet, das iſt noch $\frac{\lambda\overline{a} - \lambda\overline{ab}}{2}$ mehr. §. 240.

Folglich zuſammen $\lambda\overline{a} - \frac{\lambda\overline{ab}}{2}$.

244.

Zuſatz. Der Wehrt der Erwartung der Perſon B iſt $= \lambda\overline{b} - \frac{\lambda\overleftarrow{ab}}{2}$; und *beyde Erwartungen* von A und B *zuſammen* $= \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} - \lambda\overline{ab}$, der Wehrt der Rente für den Längſtlebenden oder für zwey Leben nach einander. §. 239.

245.

Satz 72. Der Wehrt einer Leibrente von A, welche ſo lange B und C mit A leben, unter dieſe drey, und ſo lange Einer von beyden, B oder C mit A lebet, unter dieſe zwey gleich vertheilet werden, nach dem Abſterben von B und C aber ganz an A fallen ſoll, iſt

$$= \lambda\overline{a} - \frac{(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac})}{2} + \frac{\lambda\overline{abc}}{3}.$$

Beweis.

Beweis. Es ist in dem angenommenen Fall so, als wenn 1) A die volle Leibrente empfangen, dabey aber 2) so lange entweder B oder C mit ihm leben, jedesmal die Hälfte zurückgeben soll, und 3) ausserdiess noch $\frac{1}{6}$ derselben so lange, als alle drey zusammen leben. Da nun der Wehrt einer Rente auf Eine von den beyden Verbindungen, A mit B, und A mit C, so viel ist als $\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} - \lambda\,\overline{abc}$ (§. 238. 242. und *Zusätze* zu diesem Cap. *)), so geben die obigen Stücke zusammen

$$\lambda\,\overline{a} - \frac{(\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac})}{2} + \frac{\lambda\,\overline{abc}}{2} - \frac{1}{6}\,\lambda\,\overline{abc}$$

$$= \lambda\,\overline{a} - \frac{(\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac})}{2} + \frac{1}{3}\,\lambda\,\overline{abc}.$$

Anders. A soll $\frac{1}{3}$tel der Rente gleich geniessen, diess macht $\frac{1}{3}\,\lambda\,\overline{a}$, dazu noch $\frac{1}{6}$tel mehr, nachdem die Verbindung aller drey aufhöret, das ist $\frac{1}{6}\,\lambda\,\overline{a} - \frac{1}{6}\,\lambda\,\overline{abc}$; und endlich noch $\frac{1}{2}$ nachdem die Verbindungen, A mit B, oder A mit C, erloschen sind, das ist, noch $\frac{1}{2}\,\lambda\,\overline{a} - \frac{1}{2}\,(\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac} - \lambda\,\overline{abc})$.

Folglich zusammen $\frac{1}{3}\,\lambda\,\overline{a} + \frac{1}{6}\,\lambda\,\overline{a} - \frac{1}{6}\,\lambda\,\overline{abc}$
$+ \frac{1}{2}\,\lambda\,\overline{a} - \frac{1}{2}\,(\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac}) + \frac{1}{2}\,\lambda\,\overline{abc}$
$= \lambda\,\overline{a} - \frac{1}{2}\,(\lambda\,\overline{ab} + \lambda\,\overline{ac}) + \frac{1}{3}\,\lambda\,\overline{abc}.$

246.

Zusatz 1. So wie für zwo Personen, A und B, der Wehrt der Erwartung *beyder zusammen* so gross ist als die

*) *Zusätze* §. 11.

die Erwartung des Längſtlebenden, ſo iſt auch, wenn drey Perſonen genommen werden, die Erwartung von A

$= \lambda\overline{a} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac}) + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc};$

Die von B

$= \lambda\overline{b} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{bc}) + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc};$

Die von C

$= \lambda\overline{c} - \frac{1}{2}(\lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \frac{1}{3}\lambda\overline{abc}.$

Die Summe davon macht

$\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} + \lambda\overline{c} - (\lambda\overline{ab} + \lambda\overline{ac} + \lambda\overline{bc}) + \lambda\overline{abc},$

das iſt die Erwartung des Längſtlebenden aus dreyen.

Zuſatz 2. Sollen die gegebenen zwo oder drey Perſonen, ſo lange mehrere von ihnen zuſammen leben, nach verſchiedenen Verhältniſſen die Rente theilen, bis der Ueberlebende ſie endlich ganz oder auch nur einen Theil davon erhält, ſo läſst ſich der Wehrt der Erwartung nach denſelben Grundſätzen berechnen.

247.

Satz 73. „Wenn die Zahl der gegebenen Perſonen „N iſt, die ſo lange *alle* oder *einige* von ihnen beyſammen leben, die Rente zu gleichen Theilen genieſsen, „davon der Längſtlebende ſie aber *allein* bekommt, ſo iſt „der Wehrt der Erwartung für eine beſtimmte Perſon „A ſo groſs als die Leibrente derſelben, wenn davon die „Summe aller Verbindungsrenten auf zwo Perſonen, „worunter A iſt, halbirt, abgezogen, und wiederum „$\frac{1}{3}$tel der Summe aller Verbindungsrenten auf *drey*,

„worun-

„worunter A ist, addiret; dann $\frac{1}{4}$tel der Summe der „Renten der nächsthöhern Verbindungen, worin *A* ist, „*abgezogen*, und nach dieser Regel fortgefahren wird, „bis zuletzt $\frac{1}{N}$tel der Verbindungsrente *aller gegebenen* „Personen abgezogen oder addirt ist, je nachdem die „Zahl N *gerade* oder *ungerade* ist.“

Den Beweis siehe in den Zusätzen zu diesem Capitel. *)

Zusatz. Wenn alle gegebene Personen von gleichem Alter sind, so ist der Wehrt der *Erwartung von A*

$$= \lambda \overline{a} - \frac{N-1}{2} \cdot \lambda \overline{aa} + \frac{\overline{N-1}. \overline{N-2}}{1. \quad 2} \cdot \lambda \overline{a^3}$$
$$- \frac{1}{N} \lambda \overline{aaa} \ldots$$

248.

Anmerkung. Diess ist der Grundsatz bey *Tontinen*, wenn der Wehrt der Erwartung für einzelne Interessenten bestimmt werden müsste. Bekanntlich sind *Tontinen gesellschaftliche Renten*, die unter den Interessenten, welche gewöhnlich von gleichem oder doch fast gleichem Alter genommen werden, nach Kopfzahl zu vertheilen sind, bis endlich der zuletztlebende sie allein ganz empfängt. Diess ist das Wesentliche. Das Uebrige lässt sich nach Willkühr auf verschiedene Art einrichten. Der Hauptpunct ist auf Seiten des Entrepreneurs, zu wissen, wie hoch er die Renten setzen könne? Nun ist

*) §. 17. 18.

aus dem obigen klar, daſs der Wehrt der an die Geſellſchaft bis zu ihrem gänzlichen Ausſterben zu zahlenden Rente ſo groſs ſey, als der *Rentenwehrt für den Längſtlebenden* aus den gegebenen Mitgliedern. Dafür kann, wo die Zahl der Perſonen groſs iſt, der Wehrt einer Zeitrente *auf die Dauer des Längſtlebenden*, und weil dieſe Dauer, bey einer groſsen Anzahl von Perſonen, wenig von der *Alterſergänzung* verſchieden iſt, der Wehrt *der Zeitrente auf die Alterſergänzung* genommen werden. Etwas zu Gunſten der Caſſe darf man rechnen. Niedriger darf ſie aber auch, um ein Erhebliches nämlich, nicht angeſchlagen werden, es ſey denn die Zahl der Perſonen geringer als die Alterſergänzung; denn in dieſem Fall wird ſie auf die obige Art merklich zu hoch geſchätzt. Höher aber gar nicht, als etwa um ſo viel, als für die Verwaltung in Anſchlag zu bringen iſt. Sonſt werden die Intereſſenten vervortheilt.

Das zweyte, worauf es nächſtdem ankommt, iſt die Beſtimmung der Wehrte der Erwartung eines *Tontiniſten*. Hierzu dient der Satz in dem nächſtvorhergehenden §. Iſt die Zahl der noch lebenden Theiler ſehr groſs, ſo kann man ſeinen Wehrt nahe genug finden, wenn der Wehrt der ganzen Rente, wie vorher, einer Zeitrente auf die Alterſergänzung gleich geſetzet, und dann durch die Zahl der Perſonen dividirt wird. Es wird vorausgeſetzet, daſs dieſe letztern *alle* ſehr nahe von gleichem Alter ſind. *)

Näher

*) *Zuſ* §. 20.

Näher wird es doch in jedem Fall zutreffen, wenn man ſich bey den Verbindungsrenten auf mehr als zwo Perſonen, einer Vorausſetzung bedient, die eine Art von Näherung iſt, wenn man nämlich annimmt, daſs ſie in einer geometriſchen Proportion abnehmen, ſo daſs $\lambda\overline{a} : \lambda\overline{aa} = \lambda\overline{aa} : \lambda\overline{aaa}$, und ſo ferner die Rente auf n verbundene Perſonen zu der auf $n+1$ ſich verhalte wie $\lambda\overline{a} : \lambda\overline{aa}$. Dieſs vorausgeſetzt ſey $\frac{\lambda\overline{a}}{\lambda\overline{aa}} = t$, ſo wird der *Wehrt der Erwartung für eine einzelne Perſon der Geſellſchaft* durch $\left(1 - \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n\right) \cdot \frac{t}{n} \cdot \lambda\overline{a}$ gegeben, *wo n die Zahl der Perſonen* iſt.

Aber $1 - \frac{1}{t}$ iſt ein eigentlicher Bruch, und wenn alſo n ſehr groſs iſt, ſo kann $\frac{t}{n}\,\lambda\overline{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)^n$ als ein ganz unbeträchtliches Stück weggelaſſen werden, und der geſuchte Wehrt wird $\frac{t}{n} \cdot \lambda\overline{a}$ ſeyn. Iſt n aber klein, ſo iſt auch $\left(1 - \frac{1}{t}\right)^n$ leicht zu berechnen, und darf in dieſem Fall nicht weggelaſſen werden. Z. B. Es ſey $n = 2$, und $a = 40$ Jahr, ſo iſt $\lambda\overline{a} = 13,1565$, und $\lambda\overline{a}^2 = 9,9484$; daher $t = 1,3$, und $\frac{1}{t} = 0,74$. Daraus wird $\frac{t}{n}\,\lambda\overline{a}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^2$ $= \frac{13,1565 \cdot 1,3}{2} \cdot 0,0676 = 8,55 \cdot 0,0676 = 0,57798.$

Alſo $\frac{t}{n}\ \lambda\overline{a} - 0,57798 = 7,9737$. Der genaue Wehrt iſt iſt $\lambda\overline{a} - \frac{1}{2}\ \lambda\overline{a\,a} = 8,1822$. Der Unterſchied alſo $= 0.2085$.

Zusätze
zum fünften Capitel.
Von der Dauer des Längstlebenden.

I.

Beweis des Zusatzes im §. 232.

Die mittlere *Zeit* des *Ganzausgestorbenseyns* einer Verbindung von mehreren Personen $(C\,\overline{-abc\ldots})$ ist überhaupt in der Reihe

$$\int\left(\frac{A-\overset{n}{-}A}{A}\cdot\frac{B-\overset{n}{-}B}{B}\cdot\frac{C-\overset{n}{-}C}{C}\cdots\right)$$

enthalten, wenn diese bis zu dem letzten Lebensjahr, das ist, so viel Jahre durchgenommen wird, als die Altersergänzung der *jüngsten* Person x beträgt. Nun ist das allgemeine Glied dieser *Summe*

$$=1-\left(\frac{\overset{n}{-}A}{A}+\frac{\overset{n}{-}B}{B}+\frac{\overset{n}{-}C}{C}++\right)$$

$$+\left(\frac{\overset{n}{-}A\;\overset{n}{-}B}{A.\;B}+\frac{\overset{n}{-}A\;\overset{n}{-}C}{A.\;C}+\frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C}{B\;\;C}++\right)$$

$-\frac{\overset{n}{-}A\;\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C}{A.\;B.\;C}$ Wenn für $\frac{\overset{n}{-}A}{A}$, y, für $\frac{\overset{n}{-}B}{B}$, y', für $\frac{\overset{n}{-}C}{C}$, y'', und so weiter y''', y^{IV} gesetzet wird; so ist der vorige *Terminus generalis* $(1-y).(1-y').(1-y'').(1-y''').(1-y^{IV})$ woraus nach den bekannten Eigenschaften der *Gleichung* entstehet

$1-(y+y'+y''+y''')+(yy'+yy''+yy'''+y'y''+y'y'''+y''y''')-yy'y''-yy'y'''-y'y''y'''-yy''y'''+yy'y''y'''$. Diefs Glied enthält in feinem zweyten Theil die Summe *aller einzelnen Wehrte*, in dem *dritten* die *Summe aller Producte* aus *zweyen*, in dem *vierten* die *Summe aller Producte von dreyen;* und fo ferner. Gleichfalls ift es klar, dafs die Theile wechfelsweife negativ und pofitiv find.

Folglich ift die Summe der Reihe, wozu diefs allgemeine Glied gehört, $S\overline{1+1++}$ bis x, (das ift x), weniger der *Summe* aller einzelnen Exiftenzen, dazu *addirt* die *Summe aller Coexiftenzen* von *zwey* und *zwey*, fo viel dergleichen aus der gegebenen Zahl der Perfonen fich machen. Dann wiederum abgezogen die Summe aller Verbindungen zu drey u. f. f.

Lafs die mittlere Lebensdauer einer *einzelnen* Perfon im allgemeinen bezeichnet werden durch $E\overline{I}$; die Dauer der Verbindung von *zwoen* durch $C.\overline{II}$; die von *dreyen* durch $C.\overline{III}$, und fo ferner, und die *Summe* derfelben durch $S.E\overline{I}$; $S.C.\overline{II}$; $S.C.\overline{III}$ u. f. f. Dann ift zufolge des obigen die Zeit des *Ganzausgeftorbenfeyns* mehrerer Perfonen, oder

$$C\overline{-abc} = x - S.E\overline{I} + S.C.\overline{II} - S.C.\overline{III} + S.C.\overline{IV} - +$$

Unmittelbar folgt daraus die *Dauer des Längftlebenden*

$$= x - C\overline{-abc\ldots} = S.E\overline{I} - S.C\overline{II} + S.C\overline{III} + -$$

2.

Beweis des §. 230.

Nach der Hypothese *vom gleichförmigen Absterben*, ist, wenn *alle* gegebene *Personen gleich alt* sind, die Dauer des Längstlebenden $= \frac{n}{n+1}x$, wenn x die *Altersergänzung* ist, und n die *Zahl der Personen*.

Es ist nämlich alsdenn die Zeit des *Ausgestorbenseyns aller* $= Sx^n dx = \frac{x^n}{n+1}$. Also $x - \frac{x^n}{n+1} = \frac{n}{n+1}x^n$ die Dauer des *Längstlebenden*.

Dazu führet auch der obige allgemeine Ausdruck $S.E\overline{I} - S.C\overline{II} + S.C\overline{\overline{III}} - +$

Denn in dem angenommenen Fall ist die Dauer jeder einzelnen Person $= \frac{1}{2}x$; die Dauer jeder Verbindung von *zweyen*, $= \frac{1}{3}x$; jeder von *dreyen* $= \frac{1}{4}x$, und jeder von $n = \frac{1}{n+1}x$.

Nun ist die Zahl der *einzelnen* Existenzen aus n Personen $= n$; die Zahl der Verbindungen zu *zweyen* $= \frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2.}$; der zu *dreyen*, $= \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3}$; der zu $n-1 = \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}....2}{1.\ 2.\ 3....n-1.} = n$; und der zu $n = 1$.

Daraus

Daraus wird die Dauer der Längstlebenden

$$= \frac{n}{2} x - \frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2.} \cdot \frac{1}{3} \cdot x.$$

$$+ \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{1}{4} \cdot x - + = S.$$

Man setze $r - 1 = n$, so wird

$$S = x\left(\frac{\overline{r-1}}{2} - \frac{\overline{r-1}.\overline{r-2}}{2.\ 3} + \frac{\overline{r-1}.\overline{r-2}.\overline{r-3}}{2.\ 3.\ 4} - +\right)$$

und $\frac{r}{1} S = x. \left(\frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} - \frac{r.\ r-1.\ r-2}{1.\ 2.\ 3.} + -\right)$

$= \left((1-1)^r - 1 + r\right) x$, weil der Factor von x gleich ist der Summe der Coefficienten des binomii, ausser dem ersten, und also, $= (1-1)^r - (1-r)$.

Daher $S = \frac{r-1}{r} \cdot x = \frac{n}{n+1} \cdot x$.

3.

Anmerkung. Man kann noch auf eine andere Art zu diesen Sätzen kommen. Sie ist derjenigen ähnlich, die in den *Zusätzen* zum zweyten Cap. §. 7, bey den einfachen Leibrenten gebraucht ist. Die Zahl der verbundenen Personen sey n, die Frage ist, wie lange *Eine* aus ihnen übrig seyn wird? Nun ist das Product aus den Gestorbenen für jedes mte Jahr

$= (1 - \overset{m}{-}y). (1 - \overset{m}{-}y'). (1 - \overset{m}{-}y'') - - - =$

$\overset{m}{-}z. \overset{m}{-}z'. \overset{m}{-}z'' - - - =$ der Summe der nach m Jahren *ganz ausgestorbenen* Verbindungen zu n, wenn das

Product

Product der Anfangszahlen in einander A. B. C — — — die *anfängliche Zahl dieſer Verbindungen* iſt. Ferner iſt auch das *Increment der ganz ausgeſtorbenen* Verbindungen, in dem *m*+*1*ten Jahre, nämlich $\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z''.)$, (was aber mit *dem Increment der aufhörenden Verbindungen*, wohin auch die *bloſs getrennten* gehören, nicht verwechſelt werden muſs) gleich der Zahl der Verbindungen zu *n*, welche im *m*+*1*ten Jahre (und zwar im Anfang deſſelben) *ganz ausſterben.* Aber eben, weil ſie dann erſt ganz ausſterben, ſo iſt bis dahin immer *Eine* der verbunden geweſenen Perſonen am Leben geweſen.

Alſo haben die im *m*+*1* ten Jahr ganz ausſterbende Verbindungen $\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z'')$, und zwar jede für ſich *m* Jahre durch, eine oder mehrere Perſonen aus ſich übrig gehabt, das iſt, *die Dauer des Längſtlebenden aus jenen Verbindungen iſt m Jahre geweſen.* Das Product $m.\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'\overset{m}{-}Z'')$ iſt alſo das Product *der Dauer des Längſtlebenden, in die Zahl der Verbindungen*, in denen der Längſtlebende dieſe Dauer gehabt hat. Man nehme dieſe Producte aus allen Jahren zuſammen, und dividire ſie durch *die Summe aller Verbindungen*, das iſt, man dividire die Summe $S.m.\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z'')$ wo *m* nach und nach für jedes Jahr genommen wird, durch die Summe $S.\Delta(\overset{m}{-}Z.\overset{m}{-}Z'.\overset{m}{-}Z'')$, ſo kommt die mittlere *Länge der Dauer des Längſtlebenden heraus* für *Eine ganz ausgegangene Verbindung* zu *n* Perſonen.

Das

Das kann so eingekleidet werden. In *Fig. 5* sey A F eine *krumme Linie*, bey der A E, A P, die *Abscissen* sind, davon die gröſste die *Altersergänzung* des jüngsten Lebens ist; die *Ordinaten*, *y* stellen die obigen Incremente der ganz ausgehenden Verbindungen vor, so ist $\frac{S.\,x\,v\,d\,x}{S\,y\,d\,x}$ die Dauer des Längstlebenden aus der Verbindung der gegebenen Personen.

Dieſs ist die allgemeine Auflösung des Hrn. *Fontana* *). Die Aehnlichkeit dieser Formel mit dem bekannten mechanischen Ausdruck für den *Abstand des Schwerpuncts einer Fläche von einer gegebenen Linie*, schien *Fontana* merkwürdig zu seyn. Aber so etwas kann auch in die einfache Lebensdauer gebracht werden, wenn man die Curve darnach nimmt. Uebrigens ist diese Auflösung weder kürzer noch einleuchtender als die vorhergegebene.

Bey der *Hypothese vom gleichförmigen Sterben* verhalten sich die Producte der *Todtenzahlen*, $\overset{m}{-}Z.\ \overset{m}{-}Z'.\ \overset{m}{-}Z''$, wie x^r, wenn *r* die Zahl der verbundenen Personen ist; jedoch nur bis *x* der kleinsten Altersergänzung gleich wird. Denn von da an wird eine von den Zahlen Z, oder mehrere, und nach und nach alle, *beständige* Gröſsen.

Sind

*) *In Dottrina degli Azzardi di Abramo Moivre*, ins Italiänische übersetzt, und mit Zusätzen versehen von *Gregorius Fontana*. *Milano* 1776. p. 50. 51. in *Discorso Preliminare*.

Sind die verbundenen Personen am *Alter alle gleich*, so ist ganz durch jenes Product in dem Verhältniss wie x^r. Und dann ist *y* in der vorigen Formel wie $r x^{r-1}$.

$$\text{Also } \frac{S.\, x y d x}{S.\, y\, d\, x} = \frac{S.\, x^r\, d x}{S x^{r-1}.\, d x} = \frac{r}{r+1} \cdot x.$$

Diese letzte Gleichung ist blos eingeschränkt auf die Gleichförmigkeit des Sterbens. Herr *Fontana* leitet sie aus der Lehre von den *Combinationen* her, ohne zu erinnern, dass sie nicht allgemein sey. Mich deucht aus der Hypothese folge sie von selbst sehr leicht.

4.

Zu §. 233.

Bestimmung der Zeiten, in denen mehrere Personen nach und nach abgehen.

Es sollen *vier* Personen von bestimmtem Alter, was *einerley* oder *verschieden* seyn kann, gegeben seyn, A, B, C, D. Man setze, sie leben alle vier beysammen durch die Zeit A M (Fig. 4.), so ist A M = B M′ = C M″ = D M‴, so gross als die *Verbindungsdauer von allen vieren.* Hernach leben noch drey davon durch die Zeit M N = M′ N′ = M″ N″, an deren Ende wiederum Einer abgeht. So ist A N die Zeit, bis wohin noch *Eine Verbindung von dreyen* übrig ist, und M N ist die Zeit, in der nur diese Eine Verbindung dreyer, $C.\overline{III}$ gewesen ist. Von N bis O leben noch *zwey* Personen, von O bis P nur *Eine;* so ist A O *die Dauer der längstblei-*

benden Verbindung von zweyen; und NO die Zeit, während der nur Eine Verbindung zu zwey gewesen ist. OP ist die *Dauer des Ueberlebens des Längstlebenden* über alle übrigen, AP *die Dauer des Längstlebenden selbst.*

Nun ist $AM = C\overline{abcd}$, oder hier unbestimmt, die Verbindungsdauer von vieren, $C.\overline{IV}$.

AN wird so gefunden. Weil bey *vier* Personen vier Verbindungen zu dreyen da sind, so haben durch die Zeit AM *vier Verbindungen zu dreyen* bestanden. Lass diese bezeichnet werden durch AM, BM′, CM″, DM‴. *Eine* davon hat noch fortgedauert durch MN.

Die Summe der Dauer der Verbindungen zu dreyen oder $S.C\overline{III}$ ist also

$= AN + BM' + CM'' + DM'''$.

$= AN + 3.\ C.IV$.

Folglich ist $AN = S.C\overline{III}. - 3.\ C\overline{IV}$.

Ferner ist AO *die Dauer der längstbestehenden Verbindung zu zweyen.* Es bestehen aber durch die Zeit AM *sechs* Verbindungen zu zweyen, denn so viele sind in der Zahl von vier Personen enthalten. Von diesen bleiben durch MN, noch *drey*, so viel nämlich als bey drey Personen statt finden, durch NO aber ist noch Eine davon übrig.

Daher ist *die Summe der Dauer aller Verbindungen zu zweyen*, oder $S.\ C\overline{II}. = 6.\ AM + 3.\ MN + NO.$

$= AO + 2.\ AN + 3.\ AM.$

Also

Also $AO = S.C\overline{II} - 2\,AN - 3\,AM$
$= SC.\overline{II}. - 2.\,SC.\overline{III}. + 6\,C.\overline{IV}. - 3\,C.\overline{IV}.$
$= SC.\overline{II}. - 2\,S.C.\overline{III}. + 3\,C.\overline{IV}.$

Endlich ist noch $AP = S.E\overline{I} - S.C\overline{II}. + S.C\overline{III}$
$- C\overline{IV}.$ (§. 1.)

Daraus bekommt man
$OP = AP - AO = S.E\overline{I} - 2\,S.C.\overline{II}. + 3\,S.C\overline{III} - 4\,C\overline{IV}.$
$NO = AO - AN = SC\overline{II}. - 3\,SC\overline{III} + 6.\,C\overline{IV}.$
$MN = AN - AM = S.C\overline{III} - 4\,C\overline{IV}.$
$AM = C\overline{IV}.$

Es zeiget sich hieraus das Gesetz des Fortgangs in diesen Formeln für mehrere Personen. Das Allgemeine in allen ist, dass *Plus* und *Minus* bey den Theilen abwechseln.

Der Ausdruck für *das längste Leben eines Einzelnen*, für AP, besteht aus den Summen der Dauer der Verbindungen, die Lebensdauer der Einzelnen eingeschlossen. Die *Coefficienten* der Glieder sind die Einheiten. Die Reihe fängt sich an mit S.EI. oder mit der Summe der einzelnen Lebensdauer, und ihr *allgemeines Glied* ist $\pm\,S.C\,\overline{I+N}$, wo das obere Zeichen (+) gilt, wenn N eine *gerade* Zahl ist, das untere *negative*, wenn N ungerade ist.

In dem Ausdruck für *die Dauer des Ueberlebens des Längstlebenden*, oder für OP, sind die *Coefficienten* der Glieder die *natürlichen Zahlen*. Uebrigens ist diese

Reihe dieselbe wie vorher bey dem längsten Leben. Das allgemeine Glied der Reihe ist $\pm \overline{N+1}$. S. C $\overline{1+N}$. Wiederum gilt das *positive* Zeichen, wenn N *gerade*, das *negative*, wenn N *ungerade ist.*

5.

Für *die längste Dauer der Verbindungen zu zweyen*, aus einer gegebenen Zahl von *P* Personen, oder für AO, bekommt man eine Reihe, die sich mit S. C. $\overline{II}$, das ist *der Summe der Verbindungen zu zweyen* anfängt, und in der die *Coefficienten* die natürlichen Zahlen sind. Der *Terminus generalis* ist $\pm \overline{N+1}$ SC $\overline{II+N}$.

Die Reihe geht fort bis II+N=P wird.

Und für *die Zeit des Ueberlebens der letztern Verbindung zu zweyen*, über die übrigen Verbindungen zu zweyen, die anfangs darinnen waren, das ist, für NO, *wird der Terminus generalis* $\pm$ S $\overline{N+1}$. SC. $\overline{II+N}$, ebenfalls bis II+N=P wird. Die Summe S $\overline{N+1}$ *ist* hier die *Summe der natürlichen Zahlen*, das ist, die *Trigonalzahl.* Für das erste Glied ist N=o. Sonst gilt das obere Zeichen, wenn N *gerade*, und das *untere*, wenn es *ungerade* ist.

6.

Noch für die *längste Dauer der Verbindung von dreyen*, AN, entsteht eine Reihe, die sich mit S. C. $\overline{III}$. anfängt, und zum *Terminus generalis* hat

$$\pm \text{S.} \overline{N+1} \text{ S.C.} \overline{III+N}.$$

Für

Für die Dauer des Ueberlebens der letzt bestehenden Verbindung zu dreyen, nach den vorher abgegangenen, oder für MN, erhält man das *allgemeine Glied der Reihe*

$$\pm\ S.S\overline{N+1}.\ S.C\overline{III+N}.$$

Hier ist $SS.\overline{N+1}$ *die Summe der Trigonalzahlen*, das ist, eine *Pyramidalzahl*, dafür man schreiben kann S^2. Auch ferner für die Summe von S^2, setze man S^3, und so fort.

7.

Alsdenn ist im Allgemeinen für die *längste Dauer der Verbindung von Q Personen*, das *erste Glied der Reihe* $S.\overline{CQ}$, und das *allgemeine Glied*

$$\pm\ S^{Q-2}.\overline{N+1}.\ S.C.\overline{Q+N}.$$

Wiederum (+) wenn N *gerade*, und (—) wenn es *ungerade* ist. Das letzte Glied ist da, wo $\overline{Q+N} = P$ der gegebenen Anzahl der Personen ist.

Für die Dauer des Ueberlebens der längstbestehenden Verbindung zu Q, über die vorher abgegangenen, ist der *Terminus generalis* $\pm\ S^{Q-1}.\ \overline{N+1}.\ S.C.\overline{Q+N}.$

Da aber $S.^{Q-1}.\overline{N+1}$ und $S.^{Q-2}.\ \overline{N+1}.$ *figurirte Zahlen* sind, so setze man $\overline{N+1} = m.$ Alsdenn ist

$$S.\overline{N+1} = \frac{m(m+1)}{1.\quad 2.};$$

$$S.^2\overline{N+1} = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.\quad 2.\quad 3.};\ \text{und}$$

$$S.^{Q-2}.\ m = \frac{m.(m+1)(m+2)\ldots(m+Q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad Q-1}$$

Also wird der *Terminus generalis* für die längste Dauer der Coexistenz $C\overline{Q}$,

$$\pm \frac{m.(m+1)(m+2)\ldots(m+Q-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad (Q-1)} \cdot S.C.\overline{Q+m-1}$$

Und *für die Dauer des Ueberlebens* derselben

$$\pm \frac{m.(m+1)(m+2)\ldots(m+Q-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ Q} \cdot S.C.\overline{Q+m-1}$$

Folglich die ganze Reihe, welche die *längste Dauer der Coexistenz* $\overline{C.Q}$ bestimmt

$$= S.C.\overline{Q} - Q.S.\overline{CQ+1.} + \frac{Q\ \overline{Q+1}}{1.\ 2} \cdot S.C.\overline{Q+2}$$

$$- \frac{Q.(Q+1)(Q+2)}{1.\quad 2.\quad 3} \cdot S.C.\overline{Q+3.} + -.$$

Die Reihe für die Dauer des Ueberlebens derselben ist

$$= S.\overline{CQ} - \overline{Q+1.}S.C.\overline{Q+1} + \frac{\overline{Q+1}.\overline{Q+2}}{1.\quad 2} \cdot S.C.\overline{Q+2}$$

$$- \frac{\overline{Q+1}.\overline{Q+2}.\overline{Q+3}}{1.\quad 2\quad 3} \cdot S.C.\overline{Q+3} + -$$

8.

Wie viele Verbindungen zu 2, 3 und so weiter zu Q aus der gegebenen Zahl der Personen P gemacht werden können, wird durch den bekannten Ausdruck

$$\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}\ldots\overline{(P-(Q-1))}}{1.\quad 2.\quad 3\ \ldots\ Q}$$ bestimmt.

Wenn alle gegebene Personen *von gleichem Alter* sind, so sind auch die einzelnen Verbindungen zu Q Personen, die aus der Zahl P gemacht werden können,

einander gleich; so ist $S.C\overline{Q}$, aus P gegebenen Personen so grofs, als das Product aus dem eben vorher angeführten Factor durch die Verbindungsdauer von Q Personen gleichen Alters, multiplicirt, das ist

$$= \frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}\ldots\overline{P-(Q-1)}}{1.\;2.\;3\ldots\;Q}.\;C.\overline{Q}$$

Ist aber das Alter der Personen verschieden, so giebt der vorige Factor doch die Anzahl der Verbindungen C. Q, welche in der gegebenen Zahl der Personen P enthalten sind.

9.

Sind die gegebenen Personen *alle* von gleichem Alter, so ist nach der *Hypothese vom gleichförmigen Absterben* $C.\overline{P} = \frac{1}{P+1}\alpha$, wenn α die Altersergänzung ist. Diess ist die Zeit, die sie alle beysammen leben. Die Zeit, in der noch P — 1 beysammen bleiben, oder die Periode, in deren Ende die *zwote* abgeht, ist die Dauer des Ueberlebens von P — 1 über das Zusammenleben aller.

Dieser Zeitraum ist

$= S.C.\overline{P-1} - P.C.\overline{P}.$ nach §. 7.

Denn wenn man in dem dortigen Ausdruck für den Terminus generalis statt Q, setzet P — 1; und P hier die höchste Anzahl von Personen ist, so hat die Reihe für die Dauer des Ueberlebens der letzten Verbindung P — 1 nicht mehr als die angegebenen zwey Glieder.

Die Zahl der Verbindungen zu P — 1 aus P, ist

$$\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}\ldots\overline{P-(P-2)}}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ P-1} = P$$

Nun ist die Dauer in allen Verbindungen zu P — 1 gleich.

Folglich $S.C.\overline{P-1} - P.C.\overline{P} = P.C.\overline{P-1} - P.\overline{C P}.$

$$= P(C.\overline{P-1} - C.\overline{P}) = P.\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P+1}\right)\alpha = \frac{1}{P+1}.\ \alpha.$$

Also eben so groſs als die Zeit der Verbindungen von allen P.

Es geht demnach eine zwote Person ab, nach einer gleichen Zeit, in welcher die erste abgegangen ist.

Ferner ist die Zeit des *Ueberlebens* der Verbindung von P — 2 über die Verbindung von P — 1

$$= S.C.\overline{P-2}. - (P-1)\ S.C.\overline{P-1} + \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2}.\ C.\overline{P}.$$

Die Zahl der Verbindungen $C.\overline{P-2}$. aus P Personen ist

$$= \frac{P.\overline{P-1}\ldots\overline{P-(P-3)}}{1.\ 2.\ \ldots\ P-2} = \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2},$$

Also $S.C.\overline{P-2} = \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2}.\ C.\overline{P-2}.$

Daher wird die Zeit des Ueberbestehens von $C.\overline{P-2}$ über die höhern Verbindungen, oder die Zeit, welche die Längstbestehende von den Verbindungen $C.\overline{P-2}$ noch dauret, nach dem Abgang der Uebrigen, die Anfangs in der Zahl P enthalten waren,

$$= \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2}\ C.\overline{P-2} - P.\overline{P-1}.C.\overline{P-1} + \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2}.C.\overline{P}$$

=

$$= \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2.} \cdot \frac{1}{P-1} \alpha - \frac{P.\overline{P-1}}{P} \cdot \alpha + \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2} \cdot \frac{1}{P+1} \alpha$$

$$= \frac{1}{P+1} \cdot \alpha.$$

So geht es weiter. Die Zeiten, in denen Einer aus dem gegebenen Alter abgeht, sind alle einander gleich, das ist, *auch bey einer bestimmten Zahl von Personen erfolgt das Absterben gleichförmig nach der Hypothese.*

Daraus folgt dann, daſs die Zeit, während welcher von P Personen, deren Altersergänzung α gleich ist, N abgestorben sind, $= \frac{N}{P+1} \alpha$ sey.

10.

Nach jeder andern Hypothese ist

1) Die Zeit, in der aus P Personen *Eine* abgeht $= C\,\overline{P}$.

2) Die Zeit, in der eine *zwote* abgeht

$$= P.\,(C.\overline{P-1} - C.\overline{P})$$

3) Die Zeit, in der *die dritte* abgeht

$$= \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2} \cdot C\overline{P-2} - P.\overline{P-1}\ C.\overline{P-1}$$

$$+ \frac{P.\,P-1}{1.\ 2} \cdot C.\,\overline{P} = \frac{P.\overline{P-1}}{1.\ 2}\,(C.\overline{P-2} + C.\overline{P})$$

$$- P.\overline{P-1}.\ C.\overline{P-1}.$$

4) Die Zeit, während welcher die *vierte* abgeht

$$= S.\,C.\,\overline{P-3} - \overline{P-2}.\ S.C.\overline{P-2}$$

 +

$$+\frac{\overline{P-2}.\overline{P-1}}{1.\ 2}\cdot S.C.\overline{P-1}-\frac{\overline{P-2}.\overline{P-1}.P}{1.\ 2.\ 3}\cdot S.C\overline{P}.\ §.\ 7.$$

$$=\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}}{1.\ 2}\cdot C.\overline{P-3}-\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}}{1.\ 2.\ 3}\cdot C.\overline{P-2}$$

$$+\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}}{1.\ 2}\cdot C.\overline{P-1}-\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}}{1.\ 2.\ 3}\cdot C.P.$$

$$=\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}}{1.\ 2.\ 3}\cdot(C.\overline{P-3}-C.\overline{P})-\frac{P.\overline{P-1}.\overline{P-2}}{1.\ 2}\cdot(C.\overline{P-2}-C.\overline{P-1}).$$

So läſst ſich weiter gehen, da das Geſetz des Fortganges ſich deutlich zeiget.

II.

Zu §. 245.

Iſt das Ueberleben einer *beſtimmten* Perſon A aus den gegebenen A, B, C, über die andern zu beſtimmen, ſo hat man für *die Wahrſcheinlichkeit, daſs in dem n ten Jahre A noch am Leben, B und C aber todt ſind,*

$$\frac{\overset{n}{-}A}{A}\cdot\frac{(B-\overset{n}{-}B)}{B}\cdot\frac{(C-\overset{n}{-}C)}{C}=\frac{\overset{n}{-}A}{A}-\frac{\overset{n}{-}A\,\overset{n}{-}B}{A.\ B}$$

$$-\frac{\overset{n}{-}A\,\overset{n}{-}C}{A\quad C}+\frac{\overset{n}{-}A\,\overset{n}{-}B\,\overset{n}{-}C}{A\quad B\quad C}.$$

Die Summe dieſer Wahrſcheinlichkeiten aus *allen* Jahren iſt

$$=E\,\overline{a}-(C\,\overline{a\,b}+C\,\overline{a\,c})+C\,\overline{a\,b\,c}.$$

Wird

Wird noch die *vierte* Person D hinzugesetzet, so hat man

$$\frac{\overset{n}{-}A}{A}\cdot\frac{(B-\overset{n}{-}B)}{B}\cdot\frac{(C-\overset{n}{-}C)}{C}\cdot\frac{(D-\overset{n}{-}D)}{D}\cdot$$

$$=\frac{\overset{n}{-}A}{A}\left(\left(1-\left(\frac{\overset{n}{-}B}{B}+\frac{\overset{n}{-}C}{C}+\frac{\overset{n}{-}D}{D}\right)\right)+\frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C}{B\;\;C}+\frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}D}{B.\;D}+\frac{\overset{n}{-}C\;\overset{n}{-}D}{C.\;D}-\frac{\overset{n}{-}B\;\overset{n}{-}C\;\overset{n}{-}D}{B.\;C.\;D}\right);$$

und die Summe davon giebt

$$=E_{\overline{a}}-(C_{\overline{ab}}+C_{\overline{ac}}+C_{\overline{ad}})+C_{\overline{abc}}$$

$$+C_{\overline{abd}}+C_{\overline{acd}}-C_{\overline{abcd}}.$$

Diese Formel ist der obigen für die *Dauer des Längstlebenden* ähnlich, nur dass an statt *der Summe aller* einfachen Lebensdauer hier bloss die *Lebensdauer von A vorkommt*; *auch statt* $S.C_{\overline{II}}$, $S.C_{\overline{III}}$, *nur die Summen solcher Verbindungen, worinn A begriffen ist.*

12.

Bey Einer bestimmten Person aus mehreren kann nur *das Ueberleben derselben über die andern berechnet werden*, denn die Frage von der *Dauer der Längstlebenden* fällt weg. Diese letzte müsste hier einerley seyn mit *der mittlern Lebensdauer.* In diesem Sinn sie genommen, ist sie so gross als *die Dauer des Ueberlebens von A über die übrigen*, *§. 11.*, *wenn dazu die längste Dauer der Verbindungen zu zweyen, unter denen sich A befindet, zugesetzet wird.*

Allein

Allein wenn von der längſten Dauer der Verbindungen zu zwey die Rede iſt, in denen nämlich A ſich befindet, ſo kommen dafür Ausdrücke, die in Hinſicht der Coefficienten von den obigen unterſchieden ſind. Es ſey AP (Fig. 4.) *die Dauer des Längſtlebenden A* aus dreyen A, B, C; dann AO die Dauer der längſtbeſtehenden Verbindung zu zwey, worinnen A mit einem der übrigen vorkommt; und AN, die Dauer der Verbindung aller dreyen, ſo iſt

$AN = C_{\overline{abc}}$; $AO = C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} - C_{\overline{abc}}$.

Denn in den drey gegebenen Perſonen liegen zwey Verbindungen zu zwey, worin A vorkommt. Davon fällt Eine weg, wenn $C_{\overline{abc}}$ aufhöret, und die zwote bleibet, weil vorausgeſetzet wird, daſs A am Leben bleibe, wenn dieſs letztere geſchieht.

Und $AP = AP - AO + AO = OP + AO = E_{\overline{a}}$.

Folglich auch $OP = AP - AO$

$= E_{\overline{a}} - (C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}}) + C_{\overline{abc}}$.

Und $NO = AO - AN = C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} - 2\,C_{\overline{abc}}$.

Man nehme vier Perſonen A, B, C, D, und es ſey wiederum AP, AO, AN, AM, die längſte Dauer *von A allein*, von den *Verbindungen zu zwey*, zu *drey*, *vier*, aber jedesmal nur die gerechnet, in denen ſich A befindet, ſo hat man

$AM = C_{\overline{abcd}}$

$AN = C_{\overline{abc}} + C_{\overline{abd}} + C_{\overline{acd}} - 2\,C_{\overline{abcd}}$,

Denn

Denn es giebt drey Verbindungen $C.\overline{III}$, worinnen A vorkommt, davon aber zwey aufhören mit $C\overline{abcd}$. *Eine* von jenen $C\overline{III}$ dauert durch AN, zwo (die durch B M′, C M″ vorgeſtellet werden können) nicht länger als durch AM. Daraus folgt der angegebene Wehrt für AN.

Auch iſt $AO = C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad} - (C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd} - 2\,C\overline{abcd}) + C\overline{abcd}.$
$= C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad} - (C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd}) + C\overline{abcd}.$

Dieſes daher. Es ſind nur drey Verbindungen *zu zwey*, worin A iſt, unter den gegebenen vieren. Eine von dieſen dauert durch AO. Eine hört ſchon auf mit $C\overline{abcd}$, dauert alſo nur durch C M″ oder AM; und eine dauert durch BN′ oder AN, und hört alsdenn auf, wenn aus der noch übrigen Verbindung zu drey, worin A iſt, Einer abſtirbt, das iſt, wenn dieſe längſtdaurende Verbindung zu drey wegfällt. Daher iſt die Dauer der längſtbeſtehenden Verbindung zu zwey, worin A iſt, ſo groſs als die Summe aller ſolcher weniger AN, und weniger A M.

Endlich $AP = E\overline{a}.$

Daraus hat man für *die Dauer des Ueberlebens von A nach den übrigen*, oder OP, $= AP - AO$
$= E\overline{a} - (C\overline{ab} + C\overline{ac} + C\overline{ad}) + C\overline{abc} + C\overline{abd} + C\overline{acd} - C\overline{abcd}.$

und

und $NO = AO - AN = C_{\overline{ab}} + C_{\overline{ac}} + C_{\overline{ad}}$
$- 2\,(C_{\overline{abc}} + C_{\overline{abd}} + C_{\overline{acd}}) + 3\,C_{\overline{abcd}}$.
Das ist die Fortdauer einer Verbindung *zu zwey*, worinnen A ist, nachdem die Verbindungen zu drey, worin A ist, schon aufgehört haben. Ferner
$MN = AN - AM = C_{\overline{abc}} + C_{\overline{abd}} + C_{\overline{acd}} - 3\,C_{\overline{abcd}}$,
für die Dauer der Verbindungen *zu drey* nach der Verbindung zu vier.

13.

Die Verbindungen, worin A vorkommt, können im allgemeinen bezeichnet werden durch $C_{\overline{a.\mathrm{I}}}$, A mit *Einem* andern; $C_{\overline{a.\mathrm{II}}}$, A mit *zwey* andern; $C_{\overline{a.\mathrm{III}}}$, A mit *drey* andern, unbestimmt welchen.

Dann bekommt man für die Dauer Ausdrücke, die das Gesetz des Fortgangs bey mehreren Personen kenntlich machen.

$AP = E_{\overline{a}}$
$AO = S.C_{\overline{a.\mathrm{I}}} - S.C_{\overline{a.\mathrm{II}}} + S.C_{\overline{a.\mathrm{III}}}$
$AN = S.C_{\overline{a.\mathrm{II}}} - 2\,S.C_{\overline{a.\mathrm{III}}}$.
$AM = S.C_{\overline{a.\mathrm{III}}}$.

Und *für die Dauer des Ueberlebens*

$OP = E_{\overline{a}} - S.C_{\overline{a.\mathrm{I}}} + S.C_{\overline{a.\mathrm{II}}} - S.C_{\overline{a.\mathrm{III}}}$.
$NO = S.C_{\overline{a.\mathrm{I}}}. - 2\,S.C_{\overline{a.\mathrm{II}}} + 3\,S.C_{\overline{a.\mathrm{III}}} - 4\,S.C_{\overline{a.\mathrm{III}}}$.
$MN = S.C_{\overline{a.\mathrm{III}}} - 3\,S.C_{\overline{a.\mathrm{IIII}}}$.

Diese Formeln mit den obigen verglichen, zeigen, dass die Coefficienten der Summen eben so wie vorher

zu

zu den *figurirten* Zahlen gehören, und dass diejenigen, die bey dem *Ueberleben* vorkommen, von einer höhern Ordnung sind, als die zu *der Dauer* selbst gehören, wie es auch oben war. Der Unterschied ist, dass sie für den gegenwärtigen Fall um eine Ordnung niedriger sind, als sie es dorten waren, in §. 4. z. B. Für das Ueberleben des Längstlebenden sind sie im §. 4. die natürlichen Zahlen, auch so für die längste Dauer der Verbindungen zu zwey: hier hingegen sind sie die Einheit. Für die längste Dauer der Verbindung von drey, auch für das Ueberleben der Verbindung zu zwey, waren sie dorten die Summen der natürlichen Zahlen; hier sind sie die natürlichen Zahlen selbst.

Daher kann hier auch auf dieselbige Art, wie vorher, der *Terminus generalis* der Reihe für die Dauer und für das Ueberleben angegeben werden. Der allgemeine Coefficient wird aus der nächstniedrigen Ordnung der figurirten Zahlen genommen, das ist, er richtet sich nach der Zahl der verbundenen Personen, die ausser A in den Verbindungen sind.

Wird also wiederum wie in §. 7. $N + 1 = m$ gesetzet, so ist der *Terminus generalis für die längste Dauer der Coexistenz*

$$C.\overline{a.Q} = \pm \frac{m.(m+1).(m+2)\ldots(m+Q-2)}{1.\;2.\;3.\;\ldots\;Q-1}\, S\,C\overline{a(Q+m-1)}$$

Und für *die Dauer des Ueberlebens* derselben über die höhern Coexistenzen

$$= \pm \frac{\overline{m}.\ \overline{m+1}.\ \overline{m+2} \ldots (m+Q-1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ Q}\ S.\ C.\ \overline{a(Q+m-1)}.$$

Völlig dieselbigen Ausdrücke wie vorhero, wenn die Person A unter den Verbundenen nicht mit gezählet wird.

Diese Reihen gehen so weit bis $a+Q+m-1 = P$, das ist, der gegebenen Anzahl der Personen gleich ist.

14.

Wenn alle gegebene Personen am Alter gleich sind, so ist $C.\ \overline{a.\ N} = \frac{1}{N+1}\alpha$, nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben, wo wiederum α die Altersergänzung ist.

Ist die Zahl der Personen P, so ist $C.\ \overline{a\,(P-1)} = C.\ \overline{a\ P} = \frac{1}{P+1}\alpha$. Diess ist die Zeit, in der *Einer* abgeht, und nur Eine Verbindung zu $P-1$, worunter A ist, oder Eine $C\ \overline{a.\,(P-1)}$ übrig bleibt.

Für die Zeit, in der diese letztere überlebet, das ist, *an deren Ende wiederum Einer der Lebenden abgehet*, ist $= S.\ C.\ \overline{a.\,(P-2)} - \overline{(P-1)}\ C.\ \overline{a.\,(P-1)}$.

Nun giebt es aber aus der Zahl P so viele Verbindungen zu $P-1$, in denen die bestimmte Person A ist, das ist, so viele $C.\ \overline{a.\,(P-2)}$, als es aus der Zahl $P-1$ überhaupt Verbindungen zu $P-2$ giebt, das ist $P-1$.

Also

Also $S.C.\overline{a.(P-2)} - \overline{(P-1)}\ C.\overline{a.(P-1)}$

$$= \overline{P-1}\cdot (C.\overline{a(P-2)} - C.\overline{a(P-1)}).$$

$$= \overline{P-1}.\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P+1}\right)\alpha = \frac{\overline{P-1}}{P(P+1)}\ \alpha$$

Geht man auf die nämliche Art weiter, so findet man für *die Zeit des Ueberlebens einer Verbindung zu* $\overline{P-2}$, *worin A ist*, über die höhern,

$$= S.C.\overline{a.(P-3)} - \overline{(P-2)}\ S.\ C.\overline{a.(P-2)}$$

$$+ \frac{\overline{P-2}.\ \overline{P-1}}{1.\quad 2}.\ C.\overline{a.(P-1)}.$$

Diese Coefficienten findet man aus dem obigen allgemeinen Ausdruck. Nun sind aber in der Zahl P so viele Verbindungen von P — 2, worunter A ist, enthalten, das ist so viele $C.\overline{a.(P-3)}$, als es überhaupt Verbindungen von P — 3 giebt aus der Zahl P — 1, nämlich $\frac{\overline{P-2}.\ \overline{P-1}}{1.\quad 2}$.

Dazu ist $C.\overline{a.(P-3)} = \frac{1}{P-1}\cdot\ \alpha.$

Daraus bekommt man für den gesuchten Wehrt

$$= \frac{\overline{P-1}.\ \overline{P-2}}{1.\quad 2}.\ \frac{1}{P-1}\cdot\ \alpha - \overline{P-2}\cdot\overline{P-1}.\frac{1}{P}\cdot\ \alpha$$

$$+ \frac{\overline{P-1}.\ \overline{P-2}}{1.\quad 2}.\ \frac{1}{P+1}\cdot\ \alpha = \frac{\overline{P-2}}{P(P+1)}\cdot\ \alpha.$$

Die folgenden Wehrte des Ueberlebens der Verbindungen von wenigern Personen, in denen aber A sich befindet, sind $\frac{P-3}{P(P+1)}\cdot\ \alpha$, $\frac{P-4}{P(P+1)}\cdot\ \alpha$, bis zuletzt solche für das Ueberleben von A allein nach allen jenen

Verbindungen $\frac{P-(P-1)}{P.(P+1)}\alpha = \frac{1}{P(P+1)}\cdot\alpha$ wird. *Dieſs ſind die auf einander folgende Theile der Altersergänzung von A, während welchen die Verbindungen von A mit andern nach und nach aufhören.* Die Summe aller dieſer Theile iſt alsdenn

$$=\frac{1}{P+1}\cdot\alpha\left(1+\frac{P-1}{P}+\frac{P-2}{P}+\ldots+\frac{1}{P}\right)=\frac{1}{2}\cdot\alpha$$

das iſt der *künftigen Lebensdauer von A* gleich.

15.

Zum 70ſten Satz §. 238.

Es iſt für ſich klar, daſs die nämlichen Schlüſſe, wodurch die Gröſsen der Dauer gefunden ſind, auch zu den *Renten* führen, die auf jene Dauer gegeben werden. Die Ausdrücke für die letzten ſind jenen für die Dauer ähnlich, auch in Hinſicht der Coefficienten; nur daſs ſtatt der *Dauer* dorten, hier jedesmal die zu derſelben gehörige *Rente* gebrauchet wird.

Iſt wiederum die Anzahl der gegebenen Perſonen P, ſo iſt (wie in §. 7.) *der Wehrt der Rente auf die längſte Dauer einer Verbindung von Q Perſonen, in einer Reihe enthalten, deren allgemeines Glied*

$$\frac{(m+1)}{1.}\frac{(m+2)}{2.}\frac{(m+3)}{3.}\cdots\frac{(m+Q-2)}{(Q-1)}\cdot S.\lambda\overline{Q+m-1}$$

iſt. Hier iſt $S.\lambda\overline{Q+m-1}$ die Summe der Verbindungsrenten für alle Verbindungen zu Q+m−1 Perſonen, die aus einer gegebenen Zahl von Perſonen P gemacht werden können.

Die

Die Reihe selbst hat folgende Form:

$$S.\lambda\overline{Q} - Q.\ S.\lambda\overline{Q+1} + \frac{Q.\overline{Q+1}}{1.\ \ 2.}.\ S.\lambda\overline{Q+2}$$

$$-\ \frac{Q.\overline{Q+1}\ \overline{Q+2}}{1.\ \ 2.\ \ \ 3}\ S.\lambda\overline{Q+3} + -\ \text{bis}\ Q+m-1$$

der gegebenen Zahl von Personen P gleich wird. §. 7.

Der *Terminus generalis der Reihe, welche den Renten-Wehrt für das Ueberleben der längstbestehenden Verbindung von Q Personen, nach dem Abgang der übrigen bestimmt*, ist

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+Q-1)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ \ Q}\ S.\lambda\overline{Q+m-1}.$$

Die Reihe selbst ist diese

$$S.\lambda.\overline{Q} - (Q+1)\,S.\lambda.\overline{Q+1} + \frac{\overline{Q+1}.\ \overline{Q+2}}{1.\ \ \ 2}.\ S.\lambda\overline{Q+2}$$

$$-\ \frac{(Q+1)(Q+2)(Q+3)}{1.\ \ \ 2.\ \ \ 3}.\ S.\lambda.\overline{Q+3} + -$$

bis Q+m−1 so groß wird als die gegebene Zahl der Personen P.

16.

Imgleichen hat man für *die Rente auf die Dauer einer bestimmten Person A, und der Verbindungen, in denen diese sich befindet*, in Gemäßheit mit dem Ausdruck im §. 14. auch hier

$$\pm\ \frac{m.\overline{(m+1)}\ \overline{(m+2)}\ldots\overline{(m+Q-2)}}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ldots\ \ Q-1}.\ S.\lambda\overline{(a+Q+m-1)}$$

als den *Terminus generalis* der Reihe durch den der gedachte Wehrt gegeben wird.

Für *die Rente des Ueberlebens* des A, *und der Verbindungen, worin A ist,* über die andern einzelnen Personen und Verbindungen, ist *der Terminus generalis der Reihe*

$$\pm \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}\ldots\overline{(m+Q-1)}}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ Q}.\ S.\lambda\overline{a+Q+m}.$$

17.

Zum 73sten Satz in §. 247.

Wenn P Personen von gegebenen gleichem Alter eine Rente 1 unter sich zu *gleichen* Theilen geniessen, so lange sie beysammen leben, und dieselbige Rente ferner nach dem Absterben einer oder mehrerer unter die Nachbleibenden *gleichförmig* vertheilet wird, bis der Längstlebende sie endlich ganz erhält, so ist der *Wehrt der Erwartung einer bestimmten Person A*

$$=\lambda \overline{a} - \tfrac{1}{2} S\lambda\overline{a.I} + \tfrac{1}{3} S\lambda\overline{a.II} + + \frac{1}{P}\ \lambda\overline{a.(P-1)}$$

Diese Gleichung ist unabhängig von jeder besondern Hypothese der Sterblichkeit.

Beweis. Der gesuchte Wehrt ist so gross als der Wehrt der Leibrente, wenn davon Folgendes abgezogen wird. So lange nämlich zwo zusammen leben, worunter A ist, muss A jährlich $\frac{1}{2}$ zurück geben. Es sey wie vorher, A P (Fig. 4.) die Dauer von A; A O die Dauer der längsten Verbindung von *zweyen*, worunter A ist; A N die von *dreyen;* A M von *vieren*, und so ferner. Nun muss A zurückgeben $\frac{1}{2}$ des Wehrts durch A O; ferner $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

für

für AN. Denn so lange drey beysammen sind, geniesset A nur $\frac{1}{3}$tel der Rente, giebt also ausser der schon abgerechneten Hälfte, noch $\frac{1}{6}$tel mehr zurück. Weiter für die Dauer AM muss noch $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ zurück gegeben werden, weil während AM nur ein *Viertel* gehoben wird, also ausser dem schon abgerechneten noch $\frac{1}{12}$tel mehr zurück zu geben ist. So weiter. Das folgende abzuziehende Stück für die Dauer der Coexistenzen von fünf Personen würde $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ seyn, bis das letzte $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n.(n-1)}$ wird.

Daraus wird der ganze Wehrt der Erwartung des A;

$$= \lambda\overline{a} - \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.I} + \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.II} - \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.III} + \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.IV} - +$$

$$- \tfrac{1}{6}\int\lambda\overline{a.II} + \tfrac{1}{6}\cdot 2.\int\lambda\overline{a.III} - \tfrac{3}{6}\int\lambda\overline{a.IV} + -$$

$$- \tfrac{1}{12}\int\lambda\overline{a.III} + \tfrac{3}{12}\int\lambda\overline{a.IV} -$$

$$- \tfrac{1}{20}\int\lambda\overline{a.IV} +$$

$$= \lambda\overline{a} - \tfrac{1}{2}\int\lambda\overline{a.I} + \tfrac{1}{3}\int\lambda\overline{a.II} - \tfrac{1}{4}\int\lambda\overline{a.III} + \tfrac{1}{5}\int\lambda\overline{a.IV} - +$$

18.

Dass diess Gesetz allgemein sey, kann mittelst des *Termini generalis für die Rente auf die längste Dauer in* §. 16. gezeiget werden. Man suche den *Coefficienten* des *rten Termins* in der gegenwärtigen Reihe. Es ist $\int\lambda\overline{a\,(r-1)}$, wozu selbiger gehört. Er besteht aber aus einer Summe von Factoren, deren Zeichen abwechseln, davon der letztere allemal verneinend ist; der erste aber abwechselnd positiv und negativ. Diese Factores sind einzeln für sich betrachtet, zusammen gesetzt aus zwey

andern, nämlich aus einer von den Zahlen $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2.3}$; $\frac{1}{3.4}$; $\frac{1}{4.5}$ u. s. f. bis $\frac{1}{(r-1)r}$; und dann aus dem Coefficienten von $\int \lambda\, \overline{a.(r-1)}$ oder nach der Formel in §. 16. von $\int. \lambda. a. \overline{(Q+m-1)}$ das ist aus

$$\pm \frac{m.(m+1)(m+2)\ldots \overline{m+Q-2}}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ Q-1}.$$

Dieser letzte Coefficient verändert sich, nachdem Q und *m* anders werden. Nun ist jedesmal $r = Q + m$ wenn *r* der Numerus des Gliedes ist; allein Q was in der ersten Reihe, die für zwo Personen gehört, $= 1$ ist, wird nachher 2, 3 u. s. f. bis $Q = r - 1$. Dagegen nimmt *m*, was zuerst $r - 1$ ist, ab, bis $m - 1 = 0$ wird. Also ist zuerst $m = r - 1$, und im letzten Gliede $m = 1$; überhaupt ist $m = r - Q$.

Wo $Q = 1$ ist, ist der zweyte Factor der Coefficienten $= 1$; der erste $= \frac{1}{2}$, damit fängt sich die Reihe der Factoren an, deren Summe den gesuchten Coefficienten ausmacht. Es wird also dieser letzte, man setze dafür $\pm C$, seyn

$$= \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3}\cdot\frac{r-2}{1} + \frac{1}{3.4}\cdot\frac{\overline{r-2}.\ \overline{r-3}}{1.\ \ 2} - \frac{1}{4.5}\,\frac{\overline{r-2}.\ \overline{r-3}.\ \overline{r-4}}{1.\ \ 2.\ \ 3} + - + - \frac{1}{(r-1)r}\right);$$

Also $\pm (r-1) r. C = \pm\left(\frac{r.\ \overline{r-1}}{1\ \ 2} - \frac{r.\ \overline{r-1}.\ \overline{r-2}}{1.\ \ 2.\ \ 3}\right.$

$$\left. + \frac{r.\ \overline{r-1}.\ \overline{r-2}.\ \overline{r-3}}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4} - \frac{r.\ \overline{r-1}.\ \overline{r-2}.\ \overline{r-3}.\ \overline{r-4}}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5} + - 1\right)$$

$$= \pm (1-1)^r - \left(1 - \frac{r}{1}\right) = \pm (r-1);$$

Folglich $\pm rC = \pm 1$, und $C = \frac{1}{r}$.

19.

Sind alle Personen gleichen Alters, und ihre Zahl *n*, so wird der Ausdruck für *den Wehrt der Erwartung einer einzelnen*, das ist $\lambda\overline{a} - \frac{1}{2}\int\lambda\overline{a^2} + \frac{1}{3}\int\lambda\overline{a^3} - +$ verändert in folgenden:

$$\lambda\overline{a} - \frac{n-1}{1.\ 2}\lambda\overline{a^2} + \frac{\overline{n-1}.\ \overline{n-2}}{2.\ 3}.\ \lambda\overline{a^3} - \frac{\overline{n-1}.\ \overline{n-2}.\ \overline{n-3}}{2.\ 3.\ 4}.\ \lambda\overline{a^4} + -.$$

Denn es giebt so viele $\lambda\overline{a^2}$, als in der Zahl von Personen $n-1$ einzelne sind, das ist $n-1$. Ferner so viele $\lambda\overline{a^3}$, als aus der Zahl $n-1$, Verbindungen zu zweyen; so viele $\lambda\overline{a^4}$ als aus $n-1$, sich Verbindungen zu dreyen, und so ferner machen lassen, wie oben in §. 14.

Daher wird die *Erwartung*, sie sey W,

$$= \lambda\overline{a} - \frac{n-1}{1}.\frac{1}{2}.\ \lambda\overline{a^2} + \frac{\overline{n-1}.\ \overline{n-2}}{1.\ 2}\frac{1}{3}.\ \lambda\overline{a^3} - +$$

$$= \lambda\overline{a} - \frac{n-1}{2}\lambda\overline{a^2} + \frac{\overline{n-1}.\ \overline{n-2}}{2.\ 3}.\ \lambda\overline{a^3} - +$$

Dieß ist wiederum ein Ausdruck, der bey jedweder Ordnung des Sterbens statt findet.

20.

Zu §. 243.

Nimmt man an, daß $\lambda\overline{a} : \lambda\overline{a^2} = \lambda\overline{a^2} : \lambda\overline{a^3} = \lambda\overline{a^n} : \lambda\overline{a^{n+1}}$ und setzet $\frac{\lambda\overline{a^2}}{\lambda\overline{a}} = t$, so erhält man W

$$= \lambda\overline{a} - \frac{n-1}{2}.\ t\lambda\overline{a} + \frac{\overline{n-1}.\ \overline{n-2}}{2.\ 3}t^2\lambda\overline{a} - \frac{\overline{n-1}.\ \overline{n-2}.\ \overline{n-3}}{2.\ 3.\ 3}.\ t^3\lambda\overline{a} + -.$$

Also t n W =

$$= \lambda \overline{a} \left(nt - \frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2} \cdot t^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3} \cdot t^3 - + \right)$$

und $\lambda \overline{a} - t n W = (1-t)^n \lambda \overline{a}$.

Alſo $W = \frac{1}{nt} \cdot (1 - (1-t)^n) \lambda \overline{a}$.

$$= (1 - (1-t)^n) \frac{(\lambda \overline{a})^2}{n. \lambda \overline{a^2}}.$$

Es iſt t ein eigentlicher Bruch und iſt dazu *n* ſehr groſs, ſo kann $W = \frac{(\lambda \overline{a})^2}{n. \lambda \overline{a^2}}$ genommen werden, weil $\frac{(1-t)^n}{n}$ als eine hohe Potenz eines eigentlichen Bruchs durch *n* dazu dividirt, unbeträchtlich wird.

Nach der Northamptoner Tabelle iſt $\frac{\lambda \overline{a^3}}{\lambda \overline{a^2}}$ ſo nahe $= \frac{\lambda \overline{a^2}}{\lambda \overline{a}}$, daſs die gröſste Abweichung in dem Wehrt von *t* nur 0, 1 beträgt. Nimmt man alſo $n = 3$, ſo kann der auf dieſe abgekürzte Art geſuchte Wehrt von dem wahren nur um $\frac{t. \lambda \overline{a}}{100}$, wo *t* ein eigentlicher *Bruch* iſt, unterſchieden ſeyn.

Tabelle

Tabelle I.

Wehrte, wozu ein Capital 1. nach Jahren durch Zinsen und Zinsen von Zinsen anw chst. Oder, Wehrte von r^x.

Jahre	2 pr. C.	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.
1	1,02000	1,03000 00000	1,04000 00000	1,05000 00000
2	1,04040	1,06090 00000	1,08160 00000	1,10250 00000
3	1,06120	1,09272 70000	1,12486 40000	1,15762 50000
4	1,08243	1,12550 88100	1,16985 85600	1,21550 62500
5	1,10408	1,15927 40743	1,21665 29024	1,27628 15625
6	1,12616	1,19405 22965	1,26531 90185	1,34009 56406
7	1,14868	1,22987 38654	1,31593 17792	1,40710 04227
8	1,17165	1,26677 00814	1,36856 90504	1,47745 54438
9	1,19509	1,30477 31838	1,42331 18124	1,55132 82160
10	1,21899	1,34391 63793	1,48024 42849	1,62889 46268
11	1,24337	1,38423 38707	1,53945 40563	1,71033 93581
12	1,26824	1,42576 08868	1,60103 22186	1,79585 63260
13	1,29360	1,46853 37135	1,66507 35073	1,88564 91423
14	1,31947	1,51258 97249	1,73167 64476	1,97993 15994
15	1,34586	1,55796 74166	1,80094 35055	2,07892 81794
16	1,37278	1,60470 64391	1,87298 12457	2,18287 45884
17	1,40024	1,65284 76323	1,94790 04956	2,29201 83178
18	1,42824	1,70243 30612	2,02581 65154	2,40661 92337
19	1,45681	1,75350 60531	2,10684 91760	2,52695 01954
20	1,48594	1,80611 12347	2,19112 31430	2,65329 77051
21	1,51566	1,86029 45717	2,27876 80688	2,78596 25904
22	1,54597	1,91610 34089	2,36991 87915	2,92526 07199
23	1,57689	1,97358 65111	2,46471 55432	3,07152 37559
24	1,60843	2,03279 41065	2,56330 41649	3,22509 99437
25	1,64060	2,09577 79297	2,66583 63315	3,38635 49409
26	1,67341	2,15659 12675	2,77246 97847	3,55567 26879
27	1,70688	2,22128 90056	2,88336 85761	3,73345 63223
28	1,74102	2,28792 76757	2,99870 33192	3,92012 91385
29	1,77584	2,35656 55060	3,11865 14519	4,11613 55954
30	1,81136	2,42726 24712	3,23339 75100	4,32194 23751

Jahre	2 pr. C.	3 pr. C.	4 pr. C	5 pr. C.
31	1,84758	2,50008 03453	3,37313 34104	4,53803 94939
32	1,88454	2,57508 27557	3,50895 87468	4,76494 14686
33	1,92223	2,65233 52384	3,64838 10967	5,00318 85420
34	1,96067	2,73190 52955	3,79431 63406	5,25334 79691
35	1,99988	2,81386 24544	3,94608 89942	5,51601 53676
36	2,03988	2,89827 83280	4,10393 25540	5,79181 61360
37	2,08068	2,98522 66778	4,26808 98561	6,08140 69428
38	2,12229	3.07478 34782	4,43881 34504	6,38547 72899
39	2,16474	3,16702 69825	4,61636 59884	6,70475 11544
40	2,20803	3.26203 77920	4.80102 06279	7,03998 87121
41	2,25220	3,35989 89258	4,99306 14530	7,39198 81477
42	2,29724	3,46069 58935	5,19278 39112	7,76158 75551
43	2,34318	3,56451 67703	5.40049 52676	8,14966 69329
44	2,39005	3,67145 22734	5,61651 50783	8,55715 02795
45	2,43785	3.78159 58417	5,84117 56814	8.98500 77935
46	2,48661	3,89504 37169	6,07482 27087	9.43425 81832
47	2,53634	4,01189 50284	6,31781 56171	9.90597 10923
48	2,58707	4,13225 18793	6,57052 82417	10,40126 96469
49	2,63881	4,25621 94356	6,83334 93714	10,92133 31293
50	2,69158	4,38390 60187	7,10668 33463	11,46739 97858
51	2,74541	4.51542 31993	7,39095 06801	12,04076 97750
52	2,80032	4.65088 58925	7,68658 87073	12,64280 82638
53	2,85633	4,79041 24721	7,99405 22556	13,27494 86770
54	2,91346	4,93412 48463	8,31381 43458	13,93869 61108
55	2,97173	5,08214 85917	8.64636 69197	14,63563 09164
56	3,03116	5,23461 30494	8,99222 15965	15,36741 24622
57	3,09178	5,39165 14409	9,35191 04603	16,13578 30853
58	3,15362	5,55340 09841	9,72598 68787	16,94257 22396
59	3,21669	5,72000 30136	10,11502 63539	17,78970 08515
60	3.38105	5,89160 31040	10,51962 74080	18.67918 58941
61	3,34665	6,06835 11972	10,94741 25744	19,61314 51888
62	3,41358	6,25040 17331	11,37802 90045	20,59380 24483
63	3,48185	6,43791 37851	11,83315 01647	21,62349 25707
64	3,55149	6,63105 11986	12,30647 61713	22,70466 71992
65	3,62252	6,82998 27346	12,79873 52182	23,83990 05592
66	3,69497	7,03488 22166	13,31068 46269	25.03189 55871
67	3,76887	7,24592 86831	13,84311 20120	26,28349 03665
68	3,84425	7,46330 65436	14,39683 64924	27,59766 48848
69	3,92113	7,68720 57399	14,97270 99521	28,97754 81291
70	3,99955	7,91782 19121	15,57161 83502	30,42642 55355

Jahre	2 pr. C.	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.
71	4,07954	8,15535 65695	16,19448 30842	31,94774 68123
72	4,16114	8,40001 72660	16,84226 24076	33,54513 41529
73	4,24436	8,65201 77846	17,51595 29039	35,22239 08605
74	4,32925	8,91157 83181	18,21659 10201	36,98351 04036
75	4,41583	9,17892 56670	18,94525 46605	38,83268 59238
76	4,50415	9,45429 34377	19,70306 48473	40,77432 02199
77	4,59423	9,73792 22408	20,49118 74412	42,81303 62309
78	4,68611	10,03005 99080	21,31083 49388	44,95368 80425
79	4,77984	10,33096 17053	22,16326 83364	47,20137 24446
80	4,87543	10,64089 05564	23,04979 90699	49,56144 10668
81	4,97294	10,96011 72731	23,97179 10326	52,03951 31202
82	5,07240	11,28892 07913	24,93066 26740	54,64148 87762
83	5,17385	11,62758 84151	25,92788 91809	57,37356 32150
84	5,27733	11,97641 60675	26,96500 44481	60,24224 13757
85	5,38287	12,33570 85495	28,04360 49381	63,25435 34445
86	5,49053	12,70577 98060	29,16534 91356	66,41707 11168
87	5,60034	13,08695 32002	30,33196 31010	69,73792 46726
88	5,71235	13,47956 17962	31,54524 16251	73,22482 09062
89	5,82660	13,88394 86501	32,80705 12901	76,88606 19515
90	5,94313	14,30046 71096	34,11933 33417	80,73036 50491
91	6,06199	14,72948 11229	35,48410 66753	84,76688 33016
92	6,18323	15,17136 55566	36,90347 09423	89,00522 74667
93	6,30690	15,62650 65233	38,37960 97800	93,45548 88400
94	6,43373	16,09530 17190	39,91479 41712	98,12826 32820
95	6,56169	16,57816 07705	41,51138 59381	103,03467 64461
96	6,69293	17,07550 55936	43,17184 13756	108,18641 02684
97	6,82679	17,58777 07615	44,89871 50306	113,59573 07818
98	6,96332	18,11540 38843	46,69466 36319	119,27551 73209
99	7,10259	18,65886 60008	48,56245 01771	125,23929 31869
100	7,24464	19,21863 19809	50,50494 81842	131,50125 78463

Tabelle II.

Baarer Wehrt einer nach Jahren zahlbaren Summe 1.

Oder Wehrte von $\frac{1}{r^x}$.

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
1	0,97087 37864	0,96153 84615	0,95238 09524	0,943396
2	0,94259 59091	0,92455 62130	0,90702 94785	0,889996
3	0,91514 16594	0,88899 63587	0.86383 75985	0,839619
4	0,88848 70479	0,85480 41910	0,82270 24748	0,792094
5	0,86260 87844	0,82192 71068	0,78352 61665	0,747258
6	0,83748 42567	0,79031 45257	0,74621 53966	0.704961
7	0,81309 15113	0,75991 78132	0,71068 13301	0.665057
8	0,78940 92343	0,73069 02050	0,67683 93620	0,627412
9	0,76641 67323	0,70258 67356	0,64460 89162	0,591898
10	0,74409 39149	0.67556 41688	0,61391 32535	0,558395
11	0,72242 12766	0,64958 09316	0,58467 92891	0,526788
12	0.70137 98802	0.62459 70496	0,55683 74182	0,496969
13	0,68095 13400	0,60057 40862	0,53032 13506	0,468839
14	0,66111 78058	0,57747 50828	0,50506 79530	0,442301
15	0,64186 19474	0,55526 45027	0,48101 70981	0,417265
16	0,62316 69392	0,53390 81757	0,45811 15220	0,393646
17	0,60501 64458	0,51337 32458	0,43629 66876	0,371364
18	0,58739 46076	0,49362 81210	0,41552 06549	0,350344
19	0,57028 60268	0,47464 24240	0,39573 39570	0,330513
20	0,55367 57542	0,45638 69462	0,37688 94829	0,311805
21	0,53754 92759	0.43883 36021	0,35894 23646	0,294155
22	0.52189 25009	0.42195 53866	0,34184 98711	0,277505
23	0,50669 17484	0,40572 63333	0,32557 13058	0,261797
24	0,49193 37363	0,39012 14743	0,31006 79103	0,246979
25	0,47760 55693	0,37511 68022	0,29530 27717	0,232999
26	0.46369 47274	0,36068 92329	0,28124 07349	0,219810
27	0,45018 90558	0,34681 65701	0,26784 83190	0,207368
28	0,43707 67532	0,33347 74713	0,25509 36371	0,195630
29	0,42434 63623	0,32065 14147	0,24294 63211	0,184557
30	0,41198 67595	0,30831 86680	0,23137 74487	0,174110

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
31	0,39998 71452	0,29646 02576	0,22035 94749	0,164255
32	0,38833 70341	0,28505 79400	0,20986 61666	0,154957
33	0,37702 62467	0,27409 41731	0,19987 25396	0,146186
34	0,36604 48997	0,26355 20895	0,19035 47996	0,137912
35	0,35538 33978	0,25341 54707	0,18129 02854	0,130105
36	0,34503 24251	0,24366 87218	0,17265 74146	0,122741
37	0,33498 29369	0,23429 68479	0,16443 56330	0.115793
38	0,32522 61524	0,22528 54307	0,15660 53647	0,109239
39	0,31575 35460	0,21662 06064	0,14914 79664	0,103056
40	0,30655 68408	0,20828 90446	0,14204 56823	0.097222
41	0,29762 80008	0,20027 79275	0,13528 16022	0,091719
42	0,28895 92240	0,19257 49303	0,12883 96211	0,086527
43	0,28054 29360	0,18516 82022	0,12270 44011	0,081630
44	0,27237 17825	0,17804 63483	0,11686 13344	0,077009
45	0,26443 86238	0,17119 84118	0,11129 65089	0,072650
46	0,25673 65279	0,16461 38575	0,10599 66752	0,068538
47	0,24925 87050	0,15828 25553	0,10094 92144	0,064658
48	0,24199 88009	0,15219 47647	0,09614 21090	0,060998
49	0,23495 02922	0,14634 11199	0,09156 39133	0,057546
50	0,22810 70798	0,14071 26153	0,08720 37270	0,054228
51	0,22146 31843	0,13530 05917	0,08305 11685	0,051215
52	0,21501 28003	0,13009 67228	0,07909 63510	0,048316
53	0,20875 02915	0,12509 30026	0,07532 98581	0,045582
54	0,20267 01859	0,12028 17333	0,07174 27220	0,043001
55	0,19676 71708	0,11565 55128	0,06832 64019	0,040567
56	0,19103 60882	0,11120 72238	0,06507 27637	0,038271
57	0,18547 19303	0,10693 00229	0,06197 40607	0,036105
58	0,18006 98352	0,10281 73297	0,05902 29149	0,034061
59	0,17482 50827	0,09886 28171	0,05621 22999	0,032133
60	0,16973 30900	0,09506 04010	0,05353 55237	0,030310
61	0,16478 94078	0,09140 42317	0,05098 62131	0,028598
62	0,15998 97163	0,08788 86844	0,04855 82982	0,026989
63	0,15532 98216	0,08450 83504	0,04624 59983	0,025453
64	0,15080 56521	0,08125 80292	0,04404 38079	0,024012
65	0,14641 32544	0,07813 27204	0,04194 64837	0,022653
66	0,14214 87907	0,07512 76157	0,03994 90321	0,021370
67	0,13800 85347	0,07223 80921	0,03804 66972	0,020161
68	0,13398 88686	0,06945 97039	0,03623 49497	0,019020
69	0,13008 62802	0,06678 81768	0,03450 94759	0,017943
70	0,12629 73594	0,06421 94008	0,03286 61676	0,016927

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
71	0,12261 87956	0,06174 94238	0,03130 11120	0,015969
72	0,11904 73743	0,05937 44460	0,02981 05828	0,015065
73	0,11557 99751	0,05709 08135	0,02839 10313	0,014212
74	0,11221 35680	0,05489 50130	0,02703 90774	0,013408
75	0,10894 52117	0,05278 36663	0,02575 15023	0,012649
76	0,10577 20502	0,05075 35253	0,02452 52403	0,011933
77	0,10269 13109	0,04880 14666	0,02335 73717	0,011258
78	0,09970 03018	0,04692 44871	0,02224 51159	0,010620
79	0,09679 64095	0,04511 96992	0,02118 58247	0,010019
80	0,09397 70966	0,04338 43261	0,02017 69759	0,009452
81	0,09123 98996	0,04171 56982	0,01921 61675	0,008917
82	0,08858 24268	0,04011 12483	0,01830 11119	0,008412
83	0,08600 23561	0,03856 85080	0,01742 96304	0,007936
84	0,08349 74332	0,03708 51038	0,01659 96480	0,007487
85	0,08106 54691	0,03565 87537	0,01580 91885	0,007063
86	0,07870 43389	0,03428 72631	0,01505 63700	0,006663
87	0,07641 19795	0,03296 85222	0,01433 94000	0,006286
88	0,07418 63879	0,03170 05022	0,01365 65715	0,005930
89	0,07202 56193	0,03048 12521	0,01300 62585	0,005595
90	0,06992 77857	0,02930 88962	0,01238 69129	0,005278
91	0,06789 10541	0,02818 16310	0,01179 70599	0,004979
92	0,06591 36448	0,02709 77221	0,01123 52951	0,004697
93	0,06399 38299	0,02605 55020	0,01070 02811	0,004432
94	0,06212 99319	0,02505 33673	0,01019 07439	0,004181
95	0,06032 03223	0,02408 97763	0,00970 54704	0,003944
96	0,05856 34197	0,02316 32464	0,00924 33051	0,003721
97	0,05685 76890	0,02227 23523	0,00880 31477	0,003510
98	0,05520 16398	0,02141 57234	0,00838 39502	0,003312
99	0,05359 38250	0,02059 20417	0,00798 47145	0,003124
100	0,05203 28399	0,01980 00401	0,00760 44900	0,002057

Tabelle III.

Baarer Wehrt einer Jahrrente 1. auf gewisse Jahre.

(Wehrte von $S.\ \frac{1}{r^x}$*)*

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
1	0,97087 37864	0,96153 84615	0,95238 09524	0,9433
2	1,91346 96955	1,88609 46745	1,85941 04309	1,8333
3	2,82861 13549	2,77509 10332	2,72324 80294	2,6730
4	3,71709 84028	3,62989 52242	3,54595 05042	3,4651
5	4,57970 71872	4,45182 23310	4,32947 66707	4,2123
6	5,41719 14439	5,24213 68567	5,07569 20073	4,9173
7	6,23028 29552	6,00205 46699	5,78637 33974	5,5823
8	7,01969 21895	6,73274 48749	6,46321 27594	6,2097
9	7,78610 89218	7,43533 16105	7,10782 16756	6,8016
10	8,53020 28367	8,11089 57793	7,72173 49291	7,3600
11	9,25262 41133	8,76047 67109	8,30641 42182	7,8868
12	9,95400 39935	9,38507 37605	8,86325 16364	8,3838
13	10,63495 53335	9,98564 78466	9,39357 29870	8,8526
14	11,29607 31393	10,56312 29294	9,89864 09400	9,2949
15	11,93793 50867	11,11838 74321	10,37965 80381	9,7122
16	12,56110 20259	11,65229 56078	10,83776 95601	10,1058
17	13,16611 84717	12,16566 88536	11,27406 62477	10,4772
18	13,75351 30793	12,65929 69746	11,68958 69026	10,8276
19	14,32379 91061	13,13393 93986	12,08532 08596	11,1581
20	14,87747 48603	13,59032 63448	12,46221 03425	11,4699
21	15,41502 41362	14,02915 99469	12,82115 27071	11,7640
22	15,93691 66371	14,45111 53336	13,16300 25782	12,0415
23	16,44360 83855	14,85684 16669	13,48857 38840	12,3033
24	16,93554 21218	15,24696 31413	13,79864 17943	12,5503
25	17,41314 76911	15,62207 99435	14,09394 45660	12,7833
26	17,87684 24185	15,98276 91765	14,37518 53009	13,0031
27	18,32703 14743	16,32958 57466	14,64303 36199	13,2105
28	18,76410 82275	16,66306 32179	14,89812 72570	13,4061
29	19,18845 45898	16,98371 46325	15,14107 35781	13,5907
30	19,60044 13493	17,29203 33005	15,37245 10268	13,7648

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
31	20,00042 84945	17,58849 35582	15,59281 05017	13,9290
32	20,38876 55286	17,87355 14982	15,80267 66683	14,0840
33	20,76579 17763	18,14764 56713	16,00254 92079	14,2302
34	21,13183 66750	18,41119 77609	16,19290 40075	14,3681
35	21,48722 00728	18,66461 32316	16,37419 42929	14,4982
36	21,83225 24979	18,90828 19534	16,54685 17075	14,6209
37	22,16723 54348	19,14257 88013	16,71128 73405	14,7367
38	22,49246 14872	19,36786 42320	16,86789 27052	14,8460
39	22,80821 51332	19,58448 48384	17,01704 06716	14,9490
40	23,11477 19740	19,79277 38831	17,15908 63539	15,0462
41	23,41239 99748	19,99305 18106	17,29436 79561	15,1380
42	23,70135 91988	20,18562 67410	17,42320 75772	15,2245
43	23,98190 21348	20,37079 49432	17,54591 19783	15,3061
44	24,25427 39173	20,54884 12916	17,66277 33127	15,3831
45	24,51871 25411	20,72003 97034	17,77406 98216	15,4558
46	24,77544 90690	20,88465 35610	17,88006 64968	15,5243
47	25,02470 78340	21,04293 61163	17,98101 57112	15,5890
48	25,26670 66349	21,19513 08810	18,07715 78202	15,6500
49	25,50165 69271	21,34147 20010	18,16872 17335	15,7075
50	25,72976 40069	21,48218 46163	18,25592 54605	15,7618
51	25,95122 71912	21,61748 52080	18,33897 66290	15,8130
52	26,16623 99915	21,74758 19308	18,41807 29800	15,8613
53	26,37499 02830	21,87267 49334	18,49340 28381	15,9069
54	26,57766 04689	21,99295 66667	18,56514 55601	15,9499
55	26,77442 76397	22,10861 21795	18,63347 19620	15,9905
56	26,96546 37279	22,21981 94033	18,69854 47257	16,0288
57	27,15093 56582	22,32674 94262	18,76051 87864	16,0649
58	27,33100 54934	22,42956 67559	18,81954 17013	16,0989
59	27,50583 05761	22,52842 95730	18,87575 40012	16,1311
60	27,67556 36661	22,62348 99740	18,92928 95249	16,1614
61	27,84035 30739	22,71489 42058	18,98027 57380	16,1900
62	28,00034 27902	22.80278 28902	19,02883 40362	16,2170
63	28,15567 26118	22,88729 12406	19,07508 00345	16,2424
64	28,30647 82639	22,96854 92698	19,11912 38424	16,2664
65	28,45289 15183	23,04668 19902	19,16107 03261	16,2891
66	28,59504 03090	23,12180 96059	19,20101 93582	16,3104
67	28,73304 88437	23,19404 76980	19,23906 60554	16,3306
68	28,86703 77123	23,26350 74019	19,27530 10051	16,3496
69	28,99712 39925	23,33029 55787	19,30981 04810	16,3676
70	29,12342 13519	23,39451 49795	19,34267 66486	16,3845

Jahre	3 pr. C.	4 pr. C.	5 pr. C.	6 pr. C.
71	29,24604 01475	23,45626 44034	19,37397 77606	16,4005
72	29,36508 75218	23,51563 88494	19,40378 83434	16,4155
73	29,48066 74969	23,57272 96629	19,43217 93747	16,4297
74	29,59288 10649	23,62762 46759	19,45921 84521	16,4431
75	29,70182 62766	23,68040 83422	19,48496 99544	16,4558
76	29,80759 83268	23,73116 18676	19,50949 51947	16,4677
77	29,91028 96377	23,77996 33342	19,53285 25664	16,4790
78	30,00998 99395	23,82688 78213	19,55509 76823	16,4896
79	30,10678 63490	23,87200 75205	19,57628 35070	16,4996
80	30,20076 34456	23,91539 18466	19,59646 04829	16,5091
81	30,29200 33452	23,95710 75448	19,61567 66504	16,5180
82	30,38058 57720	23,99721 87931	19,63397 77623	16,5264
83	30,46658 81281	24,03578 73011	19,65140 73927	16,5343
84	30,55008 55613	24,07287 24049	19,66800 70407	16,5418
85	30,63115 10304	24,10853 11586	19,68381 62292	16,5489
86	30,70985 53693	24,14281 84217	19,69887 25992	16,5556
87	30,78626 73488	24,17578 69439	19,71321 19992	16,5618
88	30,86045 37367	24,20748 74461	19,72686 85707	16,5678
89	30,93247 93560	24,23796 86982	19,73987 48292	16,5734
90	31,00240 71417	24,26727 75944	19,75226 17421	16,5786
91	31,07029 81958	24,29545 92254	19,76405 88020	16,5836
92	31,13621 18406	24,32255 69475	19,77529 40971	16,5883
93	31,20020 56705	24,34861 24495	19,78599 43782	16,5928
94	31,26233 56024	24,37366 58168	19,79618 51221	16,5969
95	31,32265 59247	24,39775 55931	19,80589 05925	16,6009
96	31,38121 93444	24,42091 88395	19,81513 38976	16,6045
97	31,43807 70334	24,44319 11918	19,82393 70453	16,6081
98	31,49327 86732	24,46460 69152	19,83232 09955	16,6114
99	31,54687 24982	24,48519 89569	19,84030 57100	16,6145
100	31,59890 53381	24,50499 89970	19,84791 02000	16,6175

Tabelle IV.

Die Süßmilchische Sterblichkeits-Tafel, nach der Berichtigung des Hrn. Baumanns, in der vierten Ausgabe der göttl. Ordn. 1775.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0—1	1000	250	26—27	461	5
1—2	750	89	27—28	456	5
2—3	661	43	28—29	451	6
3—4	618	25	29—30	445	6
4—5	593	14	30—31	439	6
5—6	579	12			
6—7	567	11	31—32	433	6
7—8	556	9	32—33	427	6
8—9	547	8	33—34	421	6
9—10	539	7	34—35	415	6
10—11	532	5	35—36	409	7
11—12	527	4	36—37	402	7
12—13	523	4	37—38	395	7
13—14	519	4	38—39	388	7
14—15	515	4	39—40	381	7
15—16	511	4	40—41	374	7
16—17	507	4	41—42	367	7
17—18	503	4	42—43	360	7
18—19	499	4	43—44	353	7
19—20	495	4	44—45	346	7
20—21	491	5	45—46	339	7
21—22	486	5	46—47	332	8
22—23	481	5	47—48	324	8
23—24	476	5	48—49	316	8
24—25	471	5	49—50	308	8
25—26	466	5	50—51	300	9

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
51—52	291	9
52—53	282	9
53—54	273	9
54—55	264	9
55—56	255	9
56—57	246	9
57—58	237	9
58—59	228	9
59—60	219	9
60—61	210	9
61—62	201	9
62—63	192	10
63—64	182	10
64—65	172	10
65—66	162	10
66—67	152	10
67—68	142	10
68—69	132	10
69—70	122	10
70—71	112	9
71—72	103	9
72—73	94	9
73—74	85	8
74—75	77	8
75—76	69	7
76—77	62	7
77—78	55	6
78—79	49	6
79—80	43	6
80—81	37	5
81—82	32	4
82—83	28	4
83—84	24	4
84—85	20	3
85—86	17	3
86—87	14	2
87—88	12	2
88—89	10	2
89—90	8	2
90—91	6	1
91—92	5	1
92—93	4	1
93—94	3	1
94—95	2	1
95—96	1	1
96—97	0	

Tabelle V.

Die Northamptoner Sterblichkeits - Tafel. Aus Dr. Price vierten Ausgabe der Observations on reversion. Paym. Vol. II.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0	11650	1340
3Monat	10310	554
6Monat	9756	553
9Monat	9203	553
1-2Jahr	8650	1367
2—3	7283	502
3—4	6781	335
4—5	6446	197
5—6	6249	184
6—7	6065	140
7—8	5925	110
8—9	5815	80
9—10	5735	60
10—11	5675	52
11—12	5623	50
12—13	5573	50
13—14	5523	50
14—15	5473	50
15—16	5423	50
16—17	5373	53
17—18	5320	58
18—19	5262	63
19—20	5199	67
20—21	5132	72
21—22	5060	75
22—23	4985	75
23—24	4910	75
24—25	4835	75
25—26	4760	75
26—27	4685	75
27—28	4610	75
28—29	4535	75
29—30	4460	75
30—31	4385	75
31—32	4310	75
32—33	4235	75
33—34	4160	75
34—35	4085	75
35—36	4010	75
36—37	3935	75
37—38	3860	75
38—39	3785	75
39—40	3710	75
40—41	3635	76
41—42	3559	77
42—43	3482	78
43—44	3404	78
44—45	3326	78
45—46	3248	78
46—47	3170	78
47—48	3092	78
48—49	3014	78
49—50	2936	79
50—51	2857	81
51—52	2776	82
52—53	2694	82
53—54	2612	82
54—55	2530	82
55—56	2448	82

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
56—57	2366	82	76—77	752	77
57—58	2284	82	77—78	675	73
58—59	2202	82	78—79	602	68
59—60	2120	82	79—80	534	65
60—61	2038	82	80—81	469	63
61—62	1956	82	81—82	406	60
62—63	1874	81	82—83	346	57
63—64	1793	81	83—84	289	55
64—65	1712	80	84—85	234	48
65—66	1632	80	85—86	186	41
66—67	1552	80	86—87	145	34
67—68	1472	80	87—88	111	28
68—69	1392	80	88—89	83	21
69—70	1312	80	89—90	62	16
70—71	1232	80	90—91	46	12
71—72	1152	80	91—92	34	10
72—73	1072	80	92—93	24	8
73—74	992	80	93—94	16	7
74—75	912	80	94—95	9	5
75—76	832	80	95—96	4	3
			96—97	1	1

Tabelle VI.

Die Schwedische Sterblichkeits-Tafel von Wargentin. Aus Dr. Price vierten Ausgabe der Observations etc. Vol. II.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
Gebohren 10249		
0—1	10000	2195
1—2	7805	509
2—3	7296	344
3—4	6952	245
4—5	6707	143
5—6	6564	122
6—7	6442	105
7—8	6337	87
8—9	6250	73
9—10	6177	62
10—11	6115	54
11—12	6061	45
12—13	6916	42
13—14	5974	38
14—15	5936	37
15—16	5899	37
16—17	5862	40
17—18	5822	40
18—19	5782	42
19—20	5740	43
20—21	5697	47
21—22	5650	47
22—23	5603	48
23—24	5555	48
24—25	5567	50
25—26	5457	50

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
Todtgebohren 249		
26—27	5407	52
27—28	5355	54
28—29	5301	55
29—30	5246	55
30—31	5191	59
31—32	5132	60
32—33	5072	62
33—34	5010	63
34—35	4947	63
35—36	4884	59
36—37	4825	58
37—38	4767	58
38—39	4709	58
39—40	4651	60
40—41	4591	65
41—42	4526	73
42—43	4453	78
43—44	4375	78
44—45	4297	78
45—46	4219	76
46—47	4143	74
47—48	4069	72
48—49	3997	73
49—50	3924	78
50—51	3846	85

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
51—52	3761	87
52—53	3674	90
53—54	3584	90
54—55	3494	91
55—56	3403	91
56—57	3312	92
57—58	3220	95
58—59	3125	95
59—60	3030	100
60—61	2930	108
61—62	2822	114
62—63	2708	118
63—64	2590	118
64—65	2472	118
65—66	2354	118
66—67	2236	118
67—68	2118	121
68—69	1997	124
69—70	1873	124
70—71	1749	127
71—72	1622	133
72—73	1489	135
73—74	1354	140
74—75	1214	130
75—76	1084	121
76—77	963	115
77—78	848	105
78—79	743	95
79—80	648	90
80—81	558	90
81—82	468	84
82—83	384	75
83—84	309	65
84—85	244	55
85—86	189	45
86—87	144	35
87—88	109	27
88—89	82	20
89—90	62	15
90—91	47	14
91—92	33	12
92—93	21	10
93—94	11	6
94—95	5	3
95—96	2	1
96—97	1	1

Tabelle VII.

Die Sterbensordnung der Rentenirer, nach Deparcieux, wie Hr. Florencourt sie eingerichtet hat.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0—1	10000	2550
1—2	7450	362
2—3	7088	265
3—4	6823	205
4—5	6618	150
5—6	6468	123
6—7	6345	102
7—8	6243	91
8—9	6154	81
9—10	6073	69
10—11	6004	58
11—12	5946	49
12—13	5897	43
13—14	5854	39
14—15	5815	37
15—16	5778	38
16—17	5740	41
17—18	5699	44
18—19	5655	47
19—20	5608	50
20—21	5558	52
21—22	5506	53
22—23	5453	54
23—24	5399	55
24—25	5344	56
25—26	5288	57
26—27	5231	58
27—28	5173	57
28—29	5116	56
29—30	5060	55
30—31	5005	54
31—32	4951	54
32—33	4897	53
33—34	4844	52
34—35	4792	52
35—36	4740	52
36—37	4688	51
37—38	4637	50
38—39	4587	49
39—40	4538	48
40—41	4490	49
41—42	4441	49
42—43	4392	50
43—44	4342	51
44—45	4291	52
45—46	4239	53
46—47	4186	54
47—48	4132	55
48—49	4077	56
49—50	4021	57
50—51	3964	59
51—52	3905	62
52—53	3843	66
53—54	3777	70
54—55	3707	76
55—56	3631	81
56—57	3550	85
57—58	3465	88
58—59	3377	91
59—60	3286	95
60—61	3191	99

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61—62	3092	102	81—82	697	107
62—63	2990	105	82—83	590	98
63—64	2885	107	83—84	492	88
64—65	2778	109	84—85	404	77
65—66	2669	110	85—86	327	66
66—67	2559	111	86—87	261	55
67—68	2448	112	87—88	206	47
68—69	2336	113	88—89	159	42
69—70	2223	114	89—90	117	37
70—71	2109	116	90—91	80	30
71—72	1993	119	91—92	50	22
72—73	1874	125	92—93	28	14
73—74	1749	132	93—94	14	8
74—75	1616	138	94—95	6	3
75—76	1479	142	95—96	3	2
76—77	1337	139	96—97	1	1
77—78	1198	134	97—98	0	0
78—79	1064	128			
79—80	936	122			
80—81	812	115			

Tabelle VIII.

Die Halleysche Sterblichkeits-Tafel aus Breslau.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0	1000	145
1	855	57
2	798	38
3	760	28
4	732	22
5	710	18
6	692	12
7	680	10
8	670	9
9	661	8
10	653	7
11	646	6
12	640	6
13	634	6
14	628	6
15	622	6
16	616	6
17	610	6
18	604	6
19	598	6
20	592	6
21	586	7
22	579	6
23	573	6
24	567	7
25	560	7
26	553	7
27	546	7
28	539	8
29	531	8
30	523	8
31	515	8
32	507	8
33	499	9
34	490	9
35	481	9
36	472	9
37	463	9
38	454	9
39	445	9
40	436	9
41	427	10
42	417	10
43	407	10
44	397	10
45	387	10
46	377	10
47	367	10
48	357	11
49	346	11
50	335	11
51	324	11
52	313	11
53	302	10
54	292	10
55	282	10
56	272	10
57	262	10
58	252	10
59	242	10
60	232	10

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61	222	10	76	68	10
62	212	10	77	58	9
63	202	10	78	49	8
64	192	10	79	41	7
65	182	10	80	34	6
66	172	10	81	28	5
67	162	10	82	23	4
68	152	10	83	19	4
69	142	11	84	15	4
70	131	11	85	11	3
71	120	11	86	8	3
72	109	11	87	5	2
73	98	10	88	3	2
74	88	10	89	1	1
75	78	10	90		

Tabelle IX.

Die Londoner Sterblichkeits-Tafel, nach Simpson.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
0	1000	320	11	405	5
1	680	133	12	400	5
2	547	51	13	395	5
3	496	27	14	390	5
4	469	17	15	385	5
5	452	12	16	380	5
6	440	10	17	375	5
7	430	8	18	370	5
8	422	7	19	365	5
9	415	5	20	360	5
10	410	5			

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
21	355	5	51	153	6
22	350	5	52	147	6
23	345	6	53	141	6
24	339	6	54	135	6
25	333	6	55	129	6
26	327	6	56	123	6
27	321	6	57	117	5
28	315	7	58	112	5
29	308	7	59	107	5
30	301	7	60	102	5
31	294	7	61	97	5
32	287	7	62	92	5
33	280	7	63	87	5
34	273	7	64	82	5
35	266	7	65	77	5
36	259	7	66	72	5
37	252	7	67	67	5
38	245	8	68	62	4
39	237	8	69	58	4
40	229	7	70	54	4
41	222	8	71	50	4
42	214	8	72	46	4
43	206	7	73	42	3
44	199	7	74	39	3
45	192	7	75	36	3
46	185	7	76	33	3
47	178	7	77	30	3
48	171	6	78	27	2
49	165	6	79	25	
50	159	6			

Tabelle X.

Die Sterbensordnung nach Kersebohm aus Holland und Westfriesland.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahres.	Jährlicher Abgang.
0	1400	275
1	1125	50
2	1075	45
3	1030	37
4	993	29
5	964	17
6	947	17
7	930	17
8	913	9
9	904	9
10	895	9
11	886	8
12	878	8
13	870	7
14	863	7
15	856	7
16	849	7
17	842	7
18	835	9
19	826	9
20	817	9
21	808	8
22	800	8
23	792	9
24	783	11
25	772	12
26	760	13
27	747	12
28	735	12
29	723	12
30	711	12

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
31	699	12
32	687	12
33	675	10
34	665	10
35	655	10
36	645	10
37	635	10
38	625	10
39	615	10
40	605	9
41	596	9
42	587	9
43	578	9
44	569	9
45	560	10
46	550	10
47	540	10
48	530	12
49	518	11
50	507	12
51	495	13
52	482	12
53	470	12
54	458	12
55	446	12
56	434	13
57	421	13
58	408	13
59	395	13
60	382	13

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61	369	13	81	87	12
62	356	13	82	75	11
63	343	14	83	64	9
64	329	14	84	55	10
65	315	14	85	45	9
66	301	14	86	36	8
67	287	14	87	28	7
68	273	14	88	21	6
69	259	14	89	15	5
70	245	14	90	10	3
71	231	14	91	7	2
72	217	14	92	5	2
73	203	14	93	3	1
74	189	14	94	2	1
75	175	15	95	1	1
76	160	15			
77	145	15			
78	130	15			
79	115	15			
80	100	13			

Tabelle

Tabelle XI.

Die Sterbensordnung nach Hrn. Baumanns Tafel aus der Churmarck.

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs	Jährlicher Abgang.
0	1000	241
1	759	70
2	689	38
3	651	26
4	625	22
5	603	19
6	584	14
7	570	10
8	560	8
9	552	5
10	547	4
11	543	4
12	539	4
13	535	4
14	531	4
15	527	4
16	523	4
17	519	4
18	515	4
19	511	4
20	507	5
21	502	5
22	497	5
23	492	5
24	487	5
25	482	6
26	476	6
27	470	6
28	464	6
29	458	6
30	452	6
31	446	6
32	440	6
33	434	6
34	428	6
35	422	7
36	415	7
37	408	7
38	401	7
39	394	7
40	387	7
41	380	7
42	373	7
43	366	7
44	359	7
45	352	7
46	345	7
47	338	7
48	331	7
49	324	7
50	317	8
51	309	8
52	301	8
53	293	9
54	284	9
55	275	10
56	265	10
57	255	10
58	245	11
59	234	11
60	223	11

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
61	212	11
62	201	11
63	190	11
64	179	11
65	168	11
66	157	11
67	146	11
68	135	11
69	124	11
70	113	10
71	103	10
72	93	10
73	83	10
74	73	9
75	64	8
76	56	7
77	49	6
78	43	6
79	37	5
80	32	5

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.
81	27	4
82	23	4
83	19	3
84	16	3
85	13	2
86	11	2
87	9	2
88	7	1
89	6	1
90	5	1
91–93	4	1
93–95	3	1
95–99	2	1
100	1	1
	0	

Tabelle

Tabelle XII und XIII.

Die Ordnung des Sterbens für die beyden Geschlechter, jedes besonders, nach Wargentin, nebst der mittlern Lebensdauer.

	Fürs männliche Geschlecht.			*Fürs weibliche Geschlecht.*		
Alter.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
	Gebohren in allen 10,282, todt gebohren 282.			Gebohren in allen 10,277, todt gebohren 277.		
0	10000	2300	33,20	10000	2090	35,70
1.	7700	500	42,45	7910	518	44,00
2	7200	337	43,83	7392	350	46,05
3	6863	240	44,96	7042	250	47,31
4	6623	150	45,57	6792	135	48,04
5	6473	125	45,62	6657	120	48,00
6	6348	105	45,50	6537	105	47,87
7	6243	90	45,26	6432	85	47,64
8	6153	75	44,91	6347	70	47,28
9	6078	65	44,46	6277	60	46,80
10	6013	55	43,94	6217	52	46,25
11	5958	45	43,26	6165	46	45,55
12	5913	45	42,58	6119	40	44,85
13	5868	40	41,91	6079	35	44,15
14	5828	40	41,24	6044	35	43,46
15	5788	39	40,56	6009	35	42,76
16	5749	39	39,83	5974	40	42,04
17	5710	39	39,11	5934	40	41,31
18	5671	44	38,39	5894	42	40,59
19	5627	44	37,67	5852	43	39,87
20	5583	50	36,95	5809	43	39,15
21	5533	50	36,28	5766	43	38,43
22	5483	50	35,62	5723	43	37,72
23	5433	55	34,96	5680	44	37,01
24	5378	55	34,30	5636	45	36,29
25	5323	55	33,63	5591	45	35,58

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Fürs weibliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
26	5268	55	32,98	5546	50	34,90
27	5213	55	32,32	5496	52	34,21
28	5158	55	31,66	5444	55	33,53
29	5103	56	31,00	5389	55	32,85
30	5049	59	30,34	5334	60	32,17
31	4988	60	29,69	5274	60	31,54
32	4928	60	29,04	5214	65	30,91
33	4868	60	28,39	5149	65	30,28
34	4808	60	27,74	5084	65	29,66
35	4748	60	27,09	5019	60	29,03
36	4688	60	26,43	4959	56	28,26
37	4628	60	25,76	4903	56	27,50
38	4568	60	25,09	4847	56	26,74
39	4508	60	24,42	4791	58	25,97
40	4448	65	23,75	4733	65	25,21
41	4383	72	23,15	4668	75	24,68
42	4311	80	22,54	4593	76	24,75
43	4231	80	21,93	4517	76	23,62
44	4151	80	21,32	4441	75	23,10
45	4071	80	20,71	4366	72	22,57
46	3991	80	20,12	4294	67	21,91
47	3911	80	19,52	4227	65	21,24
48	3831	80	18,92	4162	65	20,58
49	3751	85	18,32	4097	70	19,92
50	3666	95	17,72	4027	75	19,26
51	3571	95	17,17	3952	80	18,64
52	3476	95	16,63	3872	85	18,01
53	3381	95	16,08	3787	85	17,39
54	3286	95	15,53	3702	85	16,77
55	3191	95	14,98	3617	85	16,15
56	3096	95	14,43	3532	85	15,53
57	3001	100	13,87	3447	90	14,92
58	2901	100	13,33	3357	90	14,31
59	2801	100	12,79	3267	100	13,69
60	2701	105	12,24	3167	101	13,08

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	Fürs weibliche Geschlecht. Lebende im Anfang des Jahrs	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
61	2586	110	11,72	3057	118	12,56
62	2486	115	11,21	2939	120	12,04
63	2371	115	10,73	2819	120	12,52
64	2256	115	10,26	2699	120	11,01
65	2141	115	9,78	2579	120	10,49
66	2026	115	9,30	2459	120	9,97
67	1911	120	8,84	2339	120	9,46
68	1791	125	8,40	2219	120	8,94
69	1666	125	7,99	2099	120	8,42
70	1541	125	7,60	1979	130	7,91
71	1416	125	7,22	1849	140	7,53
72	1291	120	6,87	1709	150	7,16
73	1171	120	6,53	1559	160	6,78
74	1051	110	6,22	1399	150	6,40
75	941	105	5,89	1249	140	6,03
76	836	100	6,56	1109	130	5,78
77	736	90	5,25	979	120	5,43
78	646	85	4,92	859	110	5,11
79	561	80	4,59	749	100	4,79
80	481	75	4,27	649	95	4,47
81	406	70	3,96	554	90	4,13
82	336	65	3,69	464	85	3,84
83	271	60	3,45	379	80	3,59
84	211	50	3,30	299	75	3,42
85	161	40	3,16	224	55	3,40
86	121	30	3,04	169	40	3,34
87	91	22	2,88	129	30	3,22
88	69	17	2,64	99	23	3,05
89	52	14	2,34	76	18	2,82
90	38	12	2,02	58	15	2,55
91	26	9		43	12	
92	17	7		31	10	
93	10	6		21	8	
94	4	3		13	6	
95	1	1		7	4	
96	0	0		3	2	
97	0	0		1	1	

Tabelle XIV.

Sterbensordnung für jedes der beyden Geschlechter besonders, nach Hrn. Kritter, mit der mittlern Lebensdauer.

(Diese Tabelle ist aus einem von Hrn. Kritter bey der Administration der Calenbergischen Wittwen-Casse übergebenen Plan genommen.)

Alter.	*Für Ehemänner.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	*Für Ehefrauen und Wittwen.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
20	496	5	36	496	5	37,3
21	491	5	35,4	491	5	36,6
22	486	5	34,7	486	5	35,9
23	481	5	34,1	481	5	35,3
24	476	5	33,4	476	5	34,7
25	471	5	32,8	471	5	34,1
26	466	5	32,1	466	5	33,4
27	461	5	31,5	461	5	32,7
28	456	5	30,8	456	5	32,1
29	451	5	30,1	451	5	31,5
30	446	6	29,4	446	6	30,8
31	440	6	28,8	440	6	30,2
32	434	6	28,2	434	6	29,6
33	428	6	27,6	428	6	29
34	422	6	27	422	6	28,4
35	416	6	26,4	416	6	27,8
36	410	6	25,8	410	6	27,2
37	404	6	25,2	404	6	26,6
38	398	6	24,6	398	6	26
39	392	7	24	392	7	25,4
40	385	7	23,3	385	7	24,9
41	378	7	22,7	378	7	24,3
42	371	7	22,1	371	7	23,7
43	364	7	21,5	364	7	23,1
44	357	7	20,9	357	7	22,5
45	350	8	20,3	350	7	22

Alter.	*Für Ehemänner.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	*Für Ehefrauen und Wittwen.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
46	342	8	19,7	343	7	21,4
47	334	8	19,1	336	7	20,8
48	326	8	18,6	329	7	20,3
49	318	8	18	322	7	19,7
50	310	9	17,5	315	7	19,1
51	301	9	16,9	308	7	18,5
52	292	9	16,4	301	7	17,9
53	283	9	15,9	294	7	17,3
54	274	9	15,4	287	7	16,7
55	265	10	14,9	280	8	16,2
56	255	10	14,4	272	8	15,6
57	245	10	14	264	8	15
58	235	10	13,5	256	8	14,5
59	225	10	13,1	248	8	14
60	215	10	12,7	240	9	13,4
61	205	10	12,2	231	10	12,9
62	195	10	11,8	221	10	12,4
63	185	10	11,4	211	10	11,9
64	175	9	11	201	10	11,4
65	166	9	10,6	191	10	11
66	157	9	10,1	181	10	10,5
67	148	9	9,7	171	10	10,1
68	139	9	9,2	161	10	9,7
69	130	9	8,8	151	10	9,3
70	121	9	8,4	141	10	8,9
71	112	9	8	131	9	8,4
72	103	8	7,4	122	9	7,9
73	95	8	7	113	9	7,5
74	87	8	6,6	104	9	7,1
75	79	8	6,2	95	9	6,7
76	71	8	6	86	9	6,3
77	63	8	5,7	77	9	6
78	55	8	5,4	68	9	5,8
79	47	8	5,1	59	9	5,4
80	39	7	4,8	50	8	5

Alter.	*Für Ehemänner.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.	*Für Ehefrauen und Wittwen.* Lebende im Anfang des Jahrs.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
81	32	6	4,7	42	8	5
82	26	5	4,5	34	7	5
83	21	4	4,3	27	6	5
84	17	3	4,2	21	5	5
85	14	3	3,9	16	4	5
86	11	2	3,6	12	3	5,3
87	9	2	3,2	9	2	6
88	7	2	2,9	7	1	6
89	5	2	2,6	6	1	6
90	3	1	2,6	5	0	6
91	2	1	2,5	5	0	5
92	1	0	3	5	0	4
93	1	0	2	5	1	3
94	1	1	1	4	1	2,5
95				3	1	2
96				2	1	1,5
97				1	1	1
98				0	0	

Tabelle XV.

Die mittlere Lebensdauer nach den vornehmsten Sterblichkeits-Tafeln.

(In der letzten Spalte dieser Tabelle ist, was nach dem Comma steht, die Zahl der Monate, z. B. 40,11 heisst 40 Jahr 11 Mon.)

Alter.	Süssmilch.	Northampton.	Wargentin.	Deparcieux.	Kerseboom.
0	28,49	25,18	34,42	34,79	34,6
1	36,72	32,74	42,95	45,52	41,9
2	40,71	37,79	44,92	46,82	42,8
3	42,50	39,55	46,11	47,62	43,6
4	43,28	40,58	46,78	48,09	44,2
5	43,31	40,84	46,79	48,19	44,5

Alter.	Süſsmilch.	Northampt.	Wargent.	Deparc.	Kerſeb.
6	43,22	41,07	46,66	48,11	44,3
7	43,06	41,03	46,43		44,0
8	42,76	40,79	46,67		43,9
9	42,39	40,36	45,61		43,3
10	41,94	39,78	45,07	46,74	42,8
11	41,33	39,14	44,38	46,19	42,2
12	40,65	38,49	43,70		41,7
13	39,96	37,83	43,01		40,11
14	39,26	37,17	42,33		40,3
15	38,56	36,51	41,64	43,46	39,7
16	37,86	35,85	40,92	42,77	38,11
17	37,16	35,20	40,10		38,3
18	36,46	34,58	39,47		37,7
19	35,75	33,99	38,74		36,11
20	35,03	33,43	38,02	40,08	36,3
21	34,39	32,90	37,33	39,29	35,7
22	33,74	32,39	36,64		35,0
23	33,09	31,88	35,96		34,5
24	32,44	31,36	35,27		33,10
25	31,78	30,85	34,58	37,01	33,3
26	31,12	30,33	33,91	36,41	32,8
27	30,45	29,82	33,23		32,1
28	29,79	29,30	32,56		31,6
29	29,18	28,79	31,88		31,0
30	28,57	28,27	31,21	33,96	30,6
31	27,96	27,76	30,57	33,33	30,1
32	27,35	27,24	29,94		29,8
33	26,73	26,72	29,30		29,3
34	26,11	26,20	28,67		28,10
35	25,49	25,68	28,03	30,73	28,4
36	24,92	25,16	27,31	30,06	27,10
37	24,35	24,64	26,68		27,3
38	23,78	24,12	26,01		26,8
39	23,21	23,60	25,33		26,1
40	22,64	23,08	24,66	27,3	25,6
41	22,06	22,56	24,05	26,60	24,10
42	21,48	22,04	23,44		24,2
43	20,89	21,54	22,83		23,6
44	20,31	21,03	22,22		22,11
45	19,72	20,52	21,61	23,77	22,4

Alter.	Süſsmilch.	Northampt.	Wargent.	Deparc.	Kerſeb.
46	19,12	20,02	20,98	23,06	21,9
47	18,58	19,51	20,35		22,2
48	18,04	19,00	19,72		20,7
49	17.49	18,49	19,09		20,0
50	16,95	17,99	18,46	20,24	19,5
51	16,46	17,50	17,87	19,54	18,10
52	15,96	17,02	17,29		18,4
53	15,48	16,54	16,70		17,10
54	14,98	16,06	16,12		17,3
55	14,50	15,58	15.53	16,88	16,9
56	14,01	15,10	14,95	16,26	16,2
57	13,52	14,63	14,37		15,8
58	13,04	14,15	13,79		15,2
59	12,55	13,68	13,21		14,7
60	12,07	13,21	12,63	13,86	14,1
61	11,58	12,75	12,12	13,29	13,7
62	11,10	12,28	11,62		13,1
63	10,69	11,81	11,11		12,7
64	10,28	11,35	10,61		12,1
65	9,88	10,88	10,10	11,07	11,7
66	9,50	10,42	9,62	10,52	11,1
67	9,13	9,96	9,15		10,7
68	8,79	9,50	8,67		10,1
69	8,47	9,05	8,20		9,7
70	8,18	8,60	7,72	8,34	9,2
71	7,85	8,17	7,32	7,80	8,8
72	7,55	7,74	6,89		8,2
73	7,30	7,33	6,53		7,9
74	7,01	6,92	6,23		7,3
75	6,76	6,54	5,91	5,79	6,10
76	6,47	6,18	5,95	5,35	6,5
77	6,23	5,83	5,28		6,0
78	5,93	5,48	4,96		5,8
79	5,69	5,11	4,61		5,4
80	5,53	4,75	4,28	3,78	5,0
81	5,31	4,41	4,01	4,49	4,9
82	5,00	4,09	3,80		4,5
83	4,75	3,80	3,57		4,1
84	4,60	3,58	3,39		3,8
85	4,32	3,37	3,25	3,45	3,4

Alter.	Süſsmilch.	Northampt.	Wargent.	Deparc.	Kerſeb.
86	4,14	3,19	3,09	3,2	3,1
87	3,75	3,01	3,92		2,10
88	3,40	2,86	2,71		2,7
89	3,12	2,66	2,43		2,5
90	3,00	2,41	2,65	1,79	2,2
91		2,09	1,71	1,54	2,0
92		1,75	1,40	1,36	1,9
93		1,37		1,21	1,6
94		1,05		1,16	1,0
95		0,75		0,83	0,6
96		0,50		0,5	

Tabelle XVI.

Leibrenten nach der Süſsmilchiſchen Tafel.

Alter.	3 Procentfuſs. Leibrente.	3 Procentfuſs. In Procenten.	4 Procentfuſs. Leibrente.	4 Procentfuſs. In Procenten.	5 Procentfuſs. Leibrente.	5 Procentfuſs. In Procenten.
0	13,6601	7,32	11,4315	8,75	9,7823	10,22
1	17,7598	5,63	14,8517	6,73	12,6952	7,88
2	19,7556	5,06	16,5255	6,05	14,1247	7,08
3	20,7641	4,82	17,3823	5,75	14,8629	6,73
4	21,2887	4,70	17,8397	5,61	15,2640	6,55
5	21,4576	4,66	18,0017	5,56	15,4147	6,49
6	21,5690	4,64	18,1182	5,52	15,5280	6,44
7	21,6556	4,62	18,2157	5,49	15,6270	6,40
8	21,6723	4,61	18,2560	5,48	15,6783	6,38
9	21,6538	4,62	18,2681	5,47	15,7066	6,37
10	21,5969	4,63	18,2488	5,48	15,7089	6,37
11	21,4558	4,66	18,1588	5,51	15,6508	6,39
12	21,2685	4,70	18,0296	5,55	15,5590	6,43
13	21,0754	4,74	17,8953	5,59	15,4629	6,47
14	20,8763	4,79	17,7556	5,63	15,3622	6,51
15	20,6709	4,84	17,6104	5,68	15,2565	6,55

Alt.	3 p. C. Fuss. Leibrente.	In Proc.	4 p. C. Fuss. Leibrente.	In Proc.	5 p. C. Fuss. Leibrente.	In Proc.
16	20,4590	4,89	17,4593	5,73	16,1457	6,60
17	20,2403	4,94	17,3020	5,78	15,0295	6,65
18	20,0146	5,00	17,1383	5,83	14,9075	6,71
19	19,7817	5,06	16,9681	5,89	14,7793	6,77
20	19,5411	5,12	16,7905	5,96	14.6447	6.83
21	19,3344	5,17	16,6417	6,01	14.5352	6,88
22	19,1214	5,23	16,4872	6,07	14,4206	6,93
23	18,9020	5,29	16,3268	6,12	14,3006	6,99
24	18,6757	5,35	16,1601	6,19	14,1751	7,05
25	18,4424	5,42	15,9870	6,26	14,0435	7,12
26	18.2017	5,49	15,8068	6.33	13,9056	7,19
27	17,9533	5,57	15,6193	6,40	13,7610	7,27
28	17,6969	5,65	15,4242	6,48	13,6092	7,35
29	17,4736	5,72	15,2575	6,55	13,4824	7,42
30	17,2438	5,80	15,0847	6,63	13,3500	7.49
31	17,0072	5,88	14,9055	6.71	13,2117	7,57
32	16,7636	5,97	14,7195	6,79	13,0672	7,65
33	16,5125	6.06	14,5265	6,88	12,9161	7,74
34	16.2538	6,15	14,3260	6,98	12,7580	7,84
35	15,9870	6,26	14,1175	7,08	12,5924	7,94
36	15,7534	6,35	13,9379	7,19	12,4523	8,03
37	15,5135	6,45	13,7523	7,27	12,3066	8,13
38	15,2672	6,55	13,5604	7,37	12,1551	8,23
39	15,0141	6,66	13,3619	7,48	11,9973	8,34
40	14.7540	6,78	13,1565	7.60	11,8330	8,45
41	14,4865	6,90	12,9437	7,73	11,6616	8,58
42	14,2112	7,04	12,7233	7,86	11,4827	8,71
43	13,9278	7,18	12,4946	8,00	11,2960	8,87
44	13,6359	7,33	12,2572	8,16	11,1007	9,01
45	13,3349	7,50	12,0108	8,33	10,8964	9,18
46	13,0246	7,68	11,7546	8,51	10,6825	9,36
47	12,7466	7,85	11,5266	8,68	10,4936	9,53
48	12,4613	8,02	11,2912	8,86	10,2972	9,71
49	12,1686	8,22	11,0478	9,05	10,0928	9,91
50	11,8679	8,43	10.7961	9,26	9,8802	10,12
51	11,6020	8,62	10,5752	9,46	9,6950	10,31
52	11,3314	8.83	10,3492	9.66	9,5047	10,52
53	11,0561	9,04	10,1180	9,88	9,3089	10,74
54	10,7760	9,28	9,8815	10,12	9,1076	10,98
55	10,4910	9,53	9,6394	10,37	8,9005	11,24

Alter.

Alt.	3 p. C. Fuſs. Leibrente.	In Proc.	4 p. C. Fuſs. Leibrente.	In Proc.	5 p. C. Fuſs. Leibrente.	In Proc.
56	10,2011	9,80	9,3918	10,65	8,6874	11,51
57	9,9061	10,09	9,1384	10,94	8,4682	11,81
58	9,6061	10,41	8,8790	11,26	8,2425	12,13
59	9,3009	10,75	8,6137	11,61	8,0104	12,48
60	8,9905	11,12	8,3422	11,99	7,7714	12,87
61	8,6748	11,53	8,0643	12,40	7,5253	13,29
62	8,3539	11,97	7,7800	12,85	7,2719	13,75
63	8,0773	12,38	7,5358	13,27	7,0551	14,17
64	7,8033	12,82	7,2929	13,71	6,8385	14,62
65	7,5335	13,27	7,0528	14,18	6,6237	15,10
66	7,2700	13,76	6,8175	14,67	6,4124	15,59
67	7,0155	14,25	6,5895	15,18	6,2072	16,11
68	6,7733	14,76	6,3722	15,69	6,0113	16,64
69	6,5484	15,27	6,1703	16,21	5,8292	17,16
70	6,3470	15,76	5,9901	16,69	5,6672	17,65
71	6,1087	16,37	5,7740	17,32	5,4705	18,28
72	5,8944	16,97	5,5799	17,92	5,2940	18,89
73	5,7140	17,50	5,4176	18,46	5,1472	19,43
74	5,4969	18,19	5,2197	19,16	4,9661	20,14
75	5,3183	18,80	5,0578	19,77	4,8192	20,75
76	5,0963	19,62	4,8541	20,60	4,6315	21,59
77	4,9173	20,34	4,6907	21,32	4,4821	22,31
78	4,6850	21,34	4,4757	22,34	4,2824	23,35
79	4,4989	22,23	4,3043	23,23	4,1239	24,25
80	4,3853	22,80	4,2023	23,80	4,0323	24,80
81	4,2226	23,68	4,0532	24,67	3,8955	25,67
82	3,9706	25,19	3,8175	26,20	3,6746	27,21
83	3,7713	26,52	3,6319	27,53	3,5014	28,56
84	3,6613	27,31	3,5326	28,31	3,4117	29,31
85	3,4367	29,10	3,3222	30,10	3,2145	31,11
86	3,2983	30,32	3,1957	31,29	3,0985	32,27
87	2,9634	33,75	2,8775	34,75	2,7956	35,77
88	2,6628	37,55	2,5911	38,59	2,5225	39,64
89	2,4284	41,18	2,3684	42,22	2,3108	43,27
90	2,3350	42,83	2,2841	43,78	2,2351	44,74

Tabelle.

Tabelle XVII.

Leibrenten nach der Northamptoner Tafel.

Alter.	3 Procentfuſs.	4 Procentfuſs.	5 Procentfuſs.
0		10,327	8,863
½		13,008	11,274
1	16,021	13,465	11,563
2	18,599	15,633	13,420
3	19,575	16,462	14,135
4	20,210	17,010	14,613
5	20,473	17,248	14,827
6	20,727	17,482	15,041
7	20,853	17,611	15,166
8	20,885	17,662	15,226
9	20,812	17,625	15,210
10	20,663	17,523	15,139
11	20,480	17,393	15,043
12	20,283	17,251	14,937
13	20,081	17,103	14,826
14	19,872	16,950	14,710
15	19,657	16,791	14,588
16	19,435	16,625	14,460
17	19,218	16,462	14,334
18	19,013	16,309	14,217
19	18,820	16,167	14,108
20	18,638	16,033	14,007
21	18,470	15,912	13,917
22	18,311	15,797	13,833
23	18,148	15,680	13,746
24	17,983	15,560	13,658
25	17,814	15,438	13,567
26	17,642	15,312	13,473
27	17,467	15,184	13,377
28	17,289	15,053	13,278
29	17,107	14,918	13,177
30	16,922	14,781	13,072

Alter.	3 Procentfuss.	4 Procentfuss.	5 Procentfuss.
31	16,732	14,639	12,965
32	16,540	14,495	12,854
33	16,343	14,347	12,740
34	16,142	14,195	12,623
35	15,938	14,639	12,502
36	15,729	13,880	12,377
37	15,515	13,716	12,249
38	15,298	13,548	12,116
39	15,075	13,375	11,979
40	14,848	13,197	11,835
41	14,620	13,018	11,695
42	14,391	12,838	11,551
43	14,162	12,657	11,407
44	13,929	12,472	11,258
45	13,692	12,283	11,105
46	13,450	12,089	10,947
47	13,203	11,890	10,784
48	12,951	11,685	10,616
49	12,693	11,475	10,445
50	12,436	11,264	10,269
51	12,183	11,057	10,097
52	11,930	10,849	9,925
53	11,674	10,637	9,748
54	11,414	10,421	9,567
55	11,150	10,201	9,382
56	10,826	9,977	9,139
57	10,611	9,749	8,999
58	10,337	9,516	8,801
59	10,058	9,280	8,599
60	9,777	9,039	8,392
61	9,493	8,795	8,181
62	9,205	8,547	7,966
63	8,910	8,291	7,742
64	8,611	8,030	7,514
65	8,304	7,761	7,276
66	7,994	7,488	7,034
67	7,682	7,211	6,787
68	7,367	6,930	6,536
69	7,051	6,647	6,281
70	6,734	6,361	6,023

Alter.	3 Procentfuſs.	4 Procentfuſs.	5 Procentfuſs.
71	6,418	6,075	5,764
72	6,103	5,790	5,504
73	5,794	5,507	5,245
74	5,491	5,230	4990
75	5,199	4,962	4,744
76	4,925	4,710	4,511
77	4,652	4,457	4,277
78	4,372	4,197	4,035
79	4,077	3,921	3,776
80	3,781	3,643	3,515
81	3,499	3,377	3,263
82	3,229	3,122	3,020
83	2,982	2,887	2,797
84	2,792	2,708	2,627
85	2,620	2,543	2,471
86	2,461	2,393	2,328
87	2,312	2,251	2,193
88	2,185	2,131	2,080
89	2,015	1,967	1,924
90	1,794	1,758	1,723
91	1,501	1,474	1,447
92	1,190	1,171	1,153
93	0,839	0,827	0,816
94	0,536	0,530	0,524
95	0,242	0,240	0,238
96	0,000	0,000	0,000

Tabelle XVIII.

Leibrente nach der Wargentinischen Tafel.

Alter.	4 Procent.	5 Procent.	Alter.	4 Procent.	5 Procent.
1	16,661	14,161	11	18,820	16,128
2	17,537	14,906	12	18,721	16,062
3	18,139	15,425	13	18,609	15,986
4	18,554	15,787	14	18,476	15,891
5	18,715	15,937	15	18,336	15,792
6	18,833	16,052	16	18,191	15,686
7	18,912	16,134	17	18,046	15,582
8	18,943	16,178	18	17,897	15,473
9	18,933	16,186	19	17,752	15,369
10	18,891	16,169	20	17,603	15,260

Alter.	4 Procent.	5 Procent.
21	17,458	15,153
22	17,307	15,045
23	17,150	14,930
24	16,997	14,818
25	16,839	14,701
26	16,675	14,579
27	16,512	14,459
28	16,346	14,335
29	16,178	14,210
30	16,006	14,080
31	15,839	13,956
32	15,668	13,827
33	15,497	13,700
34	15,321	13,566
35	15,138	13,427
36	14,939	13,274
37	14,726	13,107
38	14,504	12,932
39	14,272	12,749
40	14,034	12,558
41	13,805	12,376
42	13,595	12,209
43	13,391	12,048
44	13,179	11,880
45	12,959	11,704
46	12,724	11,514
47	12,472	11,309
48	12,217	11,090
49	11,930	10,860
50	11,658	10,654
51	11,399	10,418
52	11,138	10,201
53	10,875	9,981
54	10,603	9,751
55	10,320	9,510
56	10,025	9,258
57	9,718	8,994
58	9,416	8,732
59	9,101	8,458
60	8,789	8,184
61	8,490	7,922
62	8,201	7,668
63	7,917	7,418
64	7,626	7,160
65	7,328	6,893
66	7,022	6,619
67	6,709	6,337
68	6,398	6,055
69	6,093	5,777
70	5,783	5,494
71	5,491	5,285
72	5,220	4,976
73	4,969	4,744
74	4,758	4,551
75	4,534	4,345
76	4,310	4,136
77	4,084	3,927
78	3,840	3,699
79	3,590	3,463
80	3,331	3,218
81	3,081	2,981
82	2,848	2,759
83	2,649	2,569
84	2,576	2,441
85	2,461	2,391
86	2,399	2,334
87	2,292	2,238
88	2,124	2,074
89	1,903	1,864
90	1,645	1,612
91	1,391	1,366
92	1,092	1,074
93	0,774	0,762
94	0,519	0,513

Tabelle XIX.

Leibrenten nach Deparcieux.

5 p. C.

Alter.	Leibrente.	Alter.	Leibrente.	Alter.	Leibrente.
1		36	14,19	71	6,10
2		37	14,07	72	5,84
3	15,57	38	13,94	73	5,58
4	15,82	39	13,79	74	5,32
5	16,00	40	13,62	75	5,06
6	16,13	41	13,44	76	4,80
7	16,20	42	13,24	77	4,55
8	16,24	43	13,04	78	4,31
9	16,27	44	12,84	79	4,08
10	16,25	45	12,64	80	3,86
11	16,22	46	12,43	81	3,65
12	16,17	47	12,22	82	3,45
13	16,10	48	12,01	83	3,24
14	16,02	49	11,80	84	3,01
15	15,94	50	11,58	85	2,78
16	15,86	51	11,36	86	2,56
17	15,78	52	11,14	87	2,34
18	15,71	53	10,91	88	1,10
19	15,65	54	10,68	89	1,84
20	15,58	55	10,45	90	1,58
21	15,51	56	10,22	91	1,32
22	15,44	57	9,99	92	1,05
23	15,37	58	9,75	93	0,71
24	15,30	59	9,50	94	0,47
25	15,23	60	9,24	95	0
26	15,16	61	8,98		
27	15,08	62	8,71		
28	15,00	63	8,43		
29	14,92	64	8,14		
30	14,84	65	7,84		
31	14,75	66	7,52		
32	14,64	67	7,22		
33	14,51	68	6,93		
34	14,42	69	6,64		
35	14,31	70	6,36		

Tabelle XX.

Leibrente für die verschiedenen Geschlechter nach Wargentin.

	Fürs männliche Geschlecht.		*Fürs weibliche Geschlecht.*	
Alter.	4 p. C.	5 p. C.	4 p. C.	5 p. C.
1	16,503	14,051	16,820	14,271
2	17,355	14,178	17,719	15,034
3	17,935	15,279	18,344	15,571
4	18,328	15,624	18,780	15,951
5	18,503	15,786	18,927	16,088
6	18,622	15,901	19,045	16,203
7	18,693	15,977	19,131	16,291
8	18,725	16,021	19,162	16,335
9	17,715	16,030	19,151	16,343
10	18,674	16,014	19,109	16,325
11	18,600	15,970	19,041	16,286
12	18,491	15,896	18,952	16,229
13	18,378	15,819	18,840	16,153
14	18,246	15,724	18,707	16,059
15	18,105	15,624	18,568	15,960
16	17,958	15,517	18,424	15,856
17	17,803	15,404	18,290	15,761
18	17,643	15,285	18,151	15,662
19	17,492	15,175	18,013	15,563
20	17,335	15,059	17,872	15,462
21	17,192	14,955	17,725	15,356
22	17,042	14,846	17,573	15,245
23	16,887	14,732	17,414	15,129
24	16,742	14,627	17,252	15,009
25	16,592	14,517	17,087	14,886
26	16,436	14,402	16,915	14,757
27	16,274	14,282	16,751	14,636
28	16,105	14,156	16,588	14,515
29	15,930	14,024	16,427	14,396
30	15,751	13,889	16,261	14,272

	Fürs männliche Geschlecht.		*Fürs weibliche Geschlecht.*	
Alter.	4 p. C.	5 p. C.	4 p. C.	5 p. C.
31	15,575	13,756	16,104	14,156
32	15,395	13,619	15,941	14,035
33	15,208	13,477	15,787	13,923
34	15,014	13,327	15,629	13,806
35	14,812	13,170	15,465	13,684
36	14,601	13,006	15,278	13,542
37	14,382	12,833	15,070	13,382
38	14,154	12,652	14,854	13,213
39	13,916	12,462	14,629	13,036
40	13,668	12,261	14,401	12,856
41	13,426	12,065	14,158	12,687
42	13,196	11,880	13,994	12,538
43	12,984	11,710	13,798	12,387
44	12,763	11,532	13,596	12,229
45	12,535	11,347	13,383	12,061
46	12,297	11,153	13,151	11,876
47	12,051	10,951	12,894	11,668
48	11,795	10,738	12,620	11,443
49	11,528	10,516	12,333	11,205
50	11,267	10,298	12,049	10,970
51	11,030	10,100	11,769	10,737
52	10,785	9,895	11,492	10,507
53	10,531	9,682	11,220	10,280
54	10,269	9,460	10,937	10,042
55	9,998	9,229	10,642	9,792
56	9,717	8,988	10,334	9,529
57	9,425	8,736	10,012	9,253
58	9,140	8,489	9,692	8,976
59	8,845	8,232	9,358	8,684
60	8,540	7,963	9,039	8,406
61	8,241	7,700	8,739	8,144
62	7,950	7,442	8,453	7,895
63	7,669	7,193	8,166	7,643
64	7,382	6,938	7,870	7,382
65	7,009	6,676	7,566	7,111
66	6,792	6,408	7,252	6,831
67	6,489	6,134	6,930	6,541
68	6,201	5,872	6,596	6,239
69	5,933	5,628	6,253	5,926
70	5,670	5,389	5,897	5,599

Alter.	Fürs männliche Geschlecht. 4 p. C.	5 p. C.	Fürs weibliche Geschlecht. 4 p. C.	5 p. C.
71	5,418	5,158	5,564	5,293
72	5,180	4,940	5,261	5,013
73	4,940	4,719	4,998	4,770
74	4,724	4,521	4,792	4,581
75	4,487	4,302	4,582	4,388
76	4,253	4,084	4,367	4,189
77	4,024	3,871	4,145	3,983
78	3,768	3,631	3,913	3,767
79	3,512	3,390	3,668	3,536
80	3,260	3,152	3,402	3,285
81	3,017	2,921	3,145	3,041
82	2,792	2,706	2,905	2,812
83	2,600	2,523	2,699	2,615
84	2,473	2,403	2,559	2,480
85	2,371	2,306	2,552	2,476
86	2,281	2,222	2,518	2,446
87	2,154	2,103	2,431	2,365
88	1,955	1,912	2,294	2,236
89	1,698	1,664	2,108	2,059
90	1,417	1,392	1,873	1,833
91	1,154	1,136	1,628	1,596
92	0,835	0,824	1,349	1,325
93	0,477	0,471	1,071	1,054
94	0,240	0,238	0,799	0,788
95	0,000	0,000	0,544	0,537
96	0,000	0,000	0,320	0,317

Tabelle XXI.

Wehrt der beym Tode einer Person zahlbaren Summe 1.

Zinsen zu 4 pr. Cent.

Alter.	Wehrte.	Alter.	Wehrte.	Alter.	Wehrte.
0	0,5427	31	0,4038	61	0,6774
1	0,4059	32	0,4112	62	0,6888
2	0,3390	33	0,4189	63	0,6986
3	0,3047	34	0,4270	64	0,7083
4	0,2864	35	0,4353	65	0,7179
5	0,2799	36	0,4425	66	0,7273
6	0,2753	37	0,4499	67	0,7364
7	0,2714	38	0,4576	68	0,7451
8	0,2698	39	0,4655	69	0,7532
9	0,2693	40	0,4737	70	0,7604
10	0,2700	41	0,4823	71	0,7690
11	0,2736	42	0,4911	72	0,7768
12	0,2788	43	0,5002	73	0,7833
13	0,2842	44	0,5097	74	0,7912
14	0,2898	45	0,5196	75	0,7977
15	0,2956	46	0,5298	76	0,8058
16	0,3016	47	0,5389	77	0,8124
17	0,3079	48	0,5484	78	0,8210
18	0,3145	49	0,5581	79	0,8278
19	0,3213	50	0,5682	80	0,8319
20	0,3284	51	0,5770	81	0,8379
21	0,3343	52	0,5860	82	0,8473
22	0,3400	53	0,5953	83	0,8547
23	0,3469	54	0,6047	84	0,8587
24	0,3536	55	0,6145	85	0,8671
25	0,3605	56	0,6243	86	0,8722
26	0,3677	57	0,6345	87	0,8849
27	0,3752	58	0,6449	88	0,8964
28	0,3830	59	0,6555	89	0,9053
29	0,3897	60	0,6663	90	0,9086
30	0,3966				

Tabelle XXII und XXIII.

Die mittlere Dauer der Verbindung zwoer Personen, ingleichen die mittlere Dauer des Ueberlebens einer Person über eine andere. Nach Süssmilchs Sterblichkeits-Tafel.

Alter der Ueberlebenden.	Alter der verbundenen Personen.	Verbindungsdauer.	Dauer des Ueberlebens.
15	15	27,68	10,88
	20	26,12	12,44
	25	24,55	14,01
	30	22,80	15,76
	35	20,95	17,61
	40	19,12	19,44
	45	17,07	21,49
	50	15,00	23,56
	55	13,09	25,47
20	15	26,12	8,91
	20	24,78	10,25
	25	23,41	11,62
	30	21,85	13,18
	35	20,18	14,85
	40	18,51	16,52
	45	16,59	18,44
	50	14,63	20,40
	55	12,81	22,22
	60	10,88	24,15
25	15	24,55	7,23
	20	23,41	8,37
	25	22,23	9,55
	30	20,88	10,90
	35	19,39	12,39
	40	17,88	13,90
	45	16,11	15,67
	50	14,28	17,50
	55	12,55	19 23
	60	10,70	21,08
	65	8,94	22,84
30	15	22,80	5,77
	20	21,85	6,72
	25	20,88	7,69
	30	19,73	8,84
	35	18,44	10,13
	40	17,11	11,46
	45	15,51	13,06
	50	13,82	14,75
	55	12,21	16,36
	60	10,45	18,12
	65	8,77	19,80
	70	7,41	21,16
35	15	20,95	4,54
	20	20,18	5,31
	25	19,39	6,10
	30	18,44	7,05
	35	17,35	8,14
	40	16,21	9,28
	45	14,80	10,69
	50	13,28	12,21
	55	11,80	13,69
	60	10,16	15,33
	65	8,57	16,92
	70	7,26	18,23
	75	6,13	19,36
40	15	19,12	3,52
	20	18,51	4,13
	25	17,88	4,76
	30	17,11	5,53
	35	16,21	6,43

Alter der Ueberlebenden.	Alter der verbundenen Personen.	Verbindungsdauer.	Dauer des Ueberlebens.
40	40	15,27	7,37
	45	14,05	8,59
	50	12,70	9,94
	55	11,38	11,26
	60	9,87	12,77
	65	8,37	14,27
	70	7,13	15,51
	75	6,05	16,59
	80	5,06	17,58
45	15	17,07	2,65
	20	16,59	3,13
	25	16,11	3,61
	30	15,51	4,21
	35	14,80	4,92
	40	14,05	5,97
	45	13,05	6,67
	50	11,90	7,82
	55	10,76	8,96
	60	9,41	10,31
	65	8,04	11,68
	70	6,89	12,83
	75	5,89	13,83
	80	4,95	14,76
	85	4,00	15,72
50	15	15,00	1,95
	20	14,63	2,32
	25	14,28	2,67
	30	13,82	3,13
	35	13,28	3,67
	40	12,70	4,25
	45	11,90	5,05
	50	10,97	5,98
	55	10,01	6,94
	60	8,85	8,10
	65	7,63	9,32
	70	6,60	10,35
	75	5,67	11,28
50	80	4,80	12,15
	85	3,90	13,05
	90	2,82	14,13
55	15	13,09	1,41
	20	12,81	1,69
	25	12,55	1,95
	30	12,21	2,29
	35	11,80	2,70
	40	11,38	3,12
	45	10,76	3,74
	50	10,01	5,49
	55	9,24	5,26
	60	8,26	6,24
	65	7,20	7,30
	70	6,29	8,21
	75	5,46	9,04
	80	4,66	9,84
	85	3,82	10,68
	90	2,79	11,71
60	20	10,88	1,19
	25	10,70	1,37
	30	10,45	1,62
	35	10,16	1,91
	40	9,87	2,20
	45	9,41	2,66
	50	8,85	3,22
	55	8,26	3,81
	60	7,48	4,59
	65	6,60	5,47
	70	5,83	6,24
	75	5,12	6,95
	80	4,43	7,64
	85	3,68	8,39
	90	2,74	9,33
65	25	8,94	0,94
	30	8,77	1,11

Alter.

Alter der Ueberlebenden.	Alter der verbundenen Perſonen.	Verbindungsdauer.	Dauer des Ueberlebens.
65	35	8,57	1,31
	40	8,37	1,51
	45	8,04	1,84
	50	7,63	2,25
	55	7,20	2,68
	60	6,60	3,28
	65	5,90	3,98
	70	5,27	4,61
	75	4,68	5,20
	80	4,10	5,78
	85	3,47	6,41
	90	2,64	7,24
70	30	7,41	0,77
	35	7,26	0,92
	40	7,13	1,05
	45	6,89	1,29
	50	6,60	1,58
	55	6,29	1,89
	60	5,83	2,35
	65	5,27	2,91
	70	4,77	3,41
	75	4,28	3,90
	80	3,80	4,38
	85	3,26	4,92
	90	2,54	5,64
75	35	6,13	0,63
	40	6,05	0,71
	45	5,89	0,87
	50	5,67	1,09
	55	5,46	1,30
	60	5,12	1,64
	65	4,68	2,08
	70	4,28	2,48
	75	3,89	2,87

Alter der Ueberlebenden.	Alter der verbundenen Perſonen.	Verbindungsdauer.	Dauer des Ueberlebens.
75	80	3,49	3,27
	85	3,04	3,72
	90	2,43	4,33
80	40	5,06	0,47
	45	4,96	0,57
	50	4,80	0,73
	55	4,66	0,87
	60	4,43	1,10
	65	4,10	1,43
	70	3,80	1,73
	75	3,49	2,04
	80	3,18	2,35
	85	2,81	2,72
	90	2,31	3,22
85	45	4,00	0,32
	50	3,90	0,42
	55	3,82	0,50
	60	3,68	0,64
	65	3,47	0,85
	70	3,26	1,06
	75	3,04	1,28
	80	2,81	1,51
	85	2,56	1,76
	90	2,17	2,15
90	50	0,82	0,18
	55	2,79	0,21
	60	2,74	0,26
	65	2,64	0,36
	70	2,54	0,46
	75	2,43	0,57
	80	2,31	0,69
	85	2,17	0,83
	90	2,03	0,97

Tabelle XXIV.

Wehrte der Verbindungsrenten bey zwo Personen.

Nach Süſsmilchs Tafel und dem 4 pr. C. Fuſs.

Alter der Einen.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrente.
15	15	14,6304
	20	14,1329
	25	13,6365
	30	13,0376
	35	12,3645
	40	11,6761
	45	10,7988
	50	9,8279
	55	8,8805
20	20	13,6778
	25	13,2236
	30	12,6711
	35	12,0420
	40	11,3972
	45	10,5645
	50	9,6355
	55	8,7251
	60	7,6517
25	25	12,8127
	30	12,3063
	35	11,7272
	40	11,1269
	45	10,3416
	50	9,4564
	55	8,5844
	60	7,5464
	65	6,4681
30	30	11,8512
	35	11,3253
	40	10,7816
	45	10,0500
	50	9,2181
	55	8,3929
	60	7,3987
	65	6,3571
	70	5,4762
35	35	10,8576
	40	10,3722
	45	9,7091
	50	8,9353
	55	8,1658
	60	7,2234
	65	6,2250
	70	5,3764
	75	4,6101
40	40	9,9484
	45	9,3524
	50	8,6531
	55	7,9396
	60	7,0559
	65	6,1048
	70	5,2907
	75	4,5513
	80	3,8485
45	45	8,8363
	50	8,2175
	55	7,5934
	60	6,7804
	65	5,8976
	70	5,1355

Alter.

Alter der Einen.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrente.
45	75	4,4374
	80	3,7696
	85	3,0543
50	50	7,6865
	55	7,1437
	60	6,4273
	65	5,6241
	70	4,9247
	75	4,2776
	80	3,6520
	85	2,9774
	90	2,1283
55	55	6,6900
	60	6,0685
	65	5,3508
	70	4,7180
	75	4,1262
	80	3,5470
	85	2,9135
	90	2,1008
60	60	5,5575
	65	4,9459
	70	4,3993
	75	3,8814
	80	3,3686
	85	2,8008
	90	2,0547

Alter der Einen.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrente.
65	65	4,4434
	70	3,9875
	75	3,5508
	80	3,1110
	85	2,6199
	90	1,9635
70	70	3,6100
	75	3,2427
	80	2,8678
	85	2,4456
	90	1,8718
75	75	2,9401
	80	2,6248
	85	2,2684
	90	1,7781
80	80	2,3684
	85	2,0738
	90	1,6648
85	85	1,8573
	90	1,5390
90	90	1,4187

Tabelle XXV.

Verbindungsrenten für zwo Personen, nach der Northamptoner Sterblichkeits-Tafel.

Alter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
5	5	15,638	13,591	11,984
	10	15,974	13,933	12,315
	15	15,381	13,479	11,954
	20	14,775	12,993	11,561
	25	14,301	12,633	11,281
	30	13,762	12,220	10,959
	35	13,136	11,732	10,572
	40	12,405	11,150	10,102
	45	11,597	10,500	9,571
10	10	16,339	14,277	12,665
	15	15,762	13,841	12,302
	20	15,151	13,355	11,906
	25	14,683	12,998	11,627
	30	14,150	12,586	11,304
	35	13,525	12,098	10,916
	40	12,791	11,513	10,442
	45	11,976	10,851	9,900
	50	11,044	10,085	9,260
15	15	15,229	13,411	11,960
	20	14,660	12,961	11,585
	25	14,230	12,630	11,324
	30	13,734	12,246	11,021
	35	13,151	11,787	10,655
	40	12,459	11,234	10,205
	45	11,687	10,607	9,690
	50	10,798	9,872	9,076
	55	9,850	9,077	8,403
20	20	14,133	12,535	11,232
	25	13,741	12,229	10,989
	30	13,286	11,873	10,707
	35	12,744	11,445	10,363

Alter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
20	40	12,096	10,924	9,937
	45	11,367	10,330	9,448
	50	10,522	9,630	8,861
	55	9,616	8 869	8,216
	60	8,596	7,995	7,465
25	25	13,383	11,944	10,764
	30	12,966	11,618	10,499
	35	12,463	11,217	10,175
	40	11,854	10,725	9,771
	45	11,164	10,160	9,304
	50	10.356	9,488	8,739
	55	9 484	8,754	8,116
	60	8,495	7,906	7,383
	65	7,370	6,920	6,515
30	30	12,589	11,313	10,255
	35	12,131	10,948	9,954
	40	11,568	10,490	9,576
	45	10,923	9,959	9,135
	50	10,160	9.321	8,596
	55	9,329	8,619	7,999
	60	8,378	7,802	7,292
	65	7,286	6,844	6,447
	70	6,043	5.729	5,442
35	35	11,722	10,612	9,680
	40	11,213	10.196	9,331
	45	10,622	9,706	8.921
	50	9,912	9,110	8,415
	55	9,131	8,448	7.849
	60	8,227	7,669	7,174
	65	7,177	6,747	6,360
	70	5,971	5,663	5,382
	75	4,720	4.516	4,327
40	40	10,764	9,820	9,016
	45	10,235	9,381	8.643
	50	9,590	8.834	8.177
	55	8,870	8.221	7 651
	60	8,025	7,490	7,015
	65	7,029	6,614	6,240
	70	5,870	5,571	5,298

Alter

Alter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
40	75	4,656	4,457	4,272
	80	3,469	3,349	3,236
45	45	9,776	8,990	8,312
	50	9,204	8,503	7,891
	55	8,557	7,948	7,411
	60	7,781	7,274	6,822
	65	6,850	6,453	6,094
	70	5,749	5,460	5,195
	75	4,580	4,386	4,206
	80	3,426	3,308	3,197
	85	2,424	2,356	2,291
50	50	8,714	8,081	7,522
	55	8,151	7,593	7,098
	60	7,460	6,989	6,568
	65	6,611	6,236	5,897
	70	5,582	5,306	5,054
	75	4,472	4,285	4,112
	80	3,362	3,247	3,140
	85	2,388	2,322	2,258
	90	1,685	1,651	1,619
55	55	7,681	7,179	6,735
	60	7,088	6,659	6,272
	65	6,334	5,986	5,671
	70	5,391	5,132	4,893
	75	4,350	4,171	4,006
	80	3,291	3,180	3,076
	85	2,349	2,284	2,222
	90	1,666	1,633	1,601
60	60	6,606	6,226	5,888
	65	5,970	5,658	5,372
	70	5,139	4,900	4,680
	75	4,189	4,021	3,866
	80	3,197	3,092	2,992
	85	2,297	2,234	2,174
	90	1,641	1,608	1,577
65	65	5,471	5,201	4,960
	70	4,782	4,573	4,378
	75	3,958	3,806	3,665
	80	3,063	2,965	2,873

Alter

lter der Einen Person.	Alter der Verbundenen.	Verbindungsrenten. 3 Procent.	4 Procent.	5 Procent.
65	85	2,223	2,163	2,107
	90	1,606	1,575	1,544
70	70	4,261	4,087	3,930
	75	3,599	3,471	3,347
	80	2,843	2,757	2,675
	85	2,096	2,042	1,991
	90	1,545	1,515	1,486
75	75	3,114	3,015	2,917
	80	2,526	2,448	2,381
	85	1,902	1,856	1,811
	90	1,440	1,413	1,387
80	80	2,122	2,068	2,018
	85	1,645	1,608	1,573
	90	1,302	1,278	1,255
85	85	1,309	1,339	1,256
	90	1,074	1,054	1,038
90	90	0,938	0,922	0,909

Tabelle XXVI.

Verbindungsrenten nach der Wargentinischen Tafel.

Zinsen 4 pr. C.

Alter Einer Person.	Alter der Verbundenen.	Rente.
1	1	12,252
	7	13,989
	13	13,894
	19	13,389
	25	12,832
	31	12,196
	37	11,465
	43	10,546
7	7	16,003
	13	15,914
	19	15,351
	25	15,727

Alter Einer Person.	Alter der Verbundenen.	Rente.
7	31	14,006
	37	13,170
	43	12,112
	49	10,915
13	13	15,855
	19	15,327
	25	14,736
	31	14,045
	37	13,234
	43	12,190
	49	11,011
	55	9,644

Alter Einer Person.	Alter der Verbundenen.	Rente.
19	19	14,854
	25	14,320
	31	13,687
	37	12,934
	43	11,951
	49	10,819
	55	9,500
	61	7,928
25	25	13,849
	31	13,284
	37	12,599
	43	11,683
	49	10,612
	55	9,347
	61	7,823
	67	6,275
31	31	12,795
	37	12,192
	43	11,359
	49	10,365
	55	9,167
	61	7,702
	67	6,197
	73	4,646
37	37	11,683
	43	10,953
	49	10,059
	55	8,951
	61	7,561
	67	6,115
	73	4,603
	79	3,352
43	43	10,346
	49	9,581
	55	8,597
	61	7,318
	67	5,957
	73	4,507
	79	3,295
	85	2,305
49	49	8,966
	55	8,139
	61	7,008
	67	5,764
	73	4,398
	79	3,238
	85	2,277
	91	1,090
55	55	7,495
	61	6,555
	67	5,474
	73	4,231
	79	3,150
	85	2,232
	91	1,078
61	61	5,844
	67	4,984
	73	3,927
	79	2,974
	85	2,135
	91	1,050
67	67	4,362
	73	3,527
	79	2,743
	85	2,010
	91	1,017
73	73	2,935
	79	2,355
	85	1,768
	91	0,937
79	79	1,967
	85	1,524
	91	0,863
85	85	1,212
	91	0,725
91	91	0,516

Tabelle XXVII.

Renten-Wehrte auf das Ueberleben einer bestimmten Person über eine andere mit ihr verbundene (Wittwenrenten.)

Ferner:

Auf das längste Leben, und auf das Ueberleben des Längstlebenden. Nach Süssmilchs Tafel.

Zinsen 4 p. C.

Alter der Person, welche überleben soll.)*	*Alter der Verbundenen Person.*	*Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.)* *auf einmal.*	*Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.)* *jährl. Beyträge während der Verbindung.*	*Rente für das längste Leben aus Zweyen.*	*Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.*
15	15	2,9800	0,1907	20,5904	5,9600
	20	3,4775	0,2298	20,2680	6,1351
	25	3,9739	0,2715	19,9609	6,3244
	30	4,5728	0,3258	19,6575	6,6199
	35	5,2459	0,3925	19,3634	6,9989
	40	5,9343	0,4681	19,0908	7,4147
	45	6,8116	0,5773	18,8224	8,0236
	50	7,7825	0,7187	18,5786	8,7507
	55	8,7299	0,8835	18,3693	9,4888
20	15	2,6576	0,1756		
	20	3,1127	0,2121	19,9032	6,2254
	25	3,5669	0,2508	19,5539	6,3303
	30	4,1194	0,3013	19,2041	6,5330
	35	4,7485	0,3641	18,8660	6,8240

Alter

*) Wenn die Renten auf das *längste Leben*, oder auf *das Ueberleben des Längstlebenden* gehen, so ist es gleichviel, welche von beyden Personen die überlebende sey. Da ist diess Alter denn überhaupt das Alter der Einen.

Alter der Person, welche überleben soll	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
20	40	5,3933	0,4350	18,5498	7,1526
	45	6,2260	0,5384	18,2368	7,6723
	50	7,1550	0,0727	17,9511	8,3156
	55	8,0654	0,8293	17,7048	8,9797
	60	9,1388	1,0563	17,4810	9.8293
25	15	2,3505	0,1606		
	20	2,7634	0,1943		
	25	3,1743	0,2298	19,1613	6,3486
	30	3,6807	0,2766	18,7654	6,4591
	35	4,2598	0,3347	18,3773	6,6501
	40	4,8601	0,4008	18,0166	6,8897
	45	5,6454	0,4978	17,6562	7,3146
	50	6,5306	0,6246	17,3267	7,8703
	55	7,4026	0,7724	17,0420	8,4576
	60	8,4406	0,9876	16,7828	9,2364
	65	9,5189	1,2746	16,5717	10,1035
30	15	2,0471	0,1458		
	20	2,4136	0,1765		
	25	2,7784	0,2088		
	30	3,2335	0,2516	18,3182	6,4670
	35	3.7594	0,3050	17.8769	6,5516
	40	4,3031	0,3652	17,4596	6,6780
	45	5,0347	0,4556	17,0455	6,9955
	50	5,8666	0,5741	16.6627	7,4446
	55	6,6918	0,7124	16,3312	7,9383
	60	7,6860	0,9151	16,0282	8,6295
	65	8.7276	1,1863	15,7804	9,4232
	70	9,6085	1,4837	15,5986	10,1224
35	15	1,7530	0,1312		
	20	2,0755	0.1591		
	25	2,3903	0,1878		
	30	2.7922	0,2265		
	35	3,2599	0,2749	17,3774	6,5198

Alter der Person, welche überleben soll.	*Alter der verbundenen Person.*	*Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.)* auf einmal.	*Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.)* jährl. Beyträge während der Verbindung.	*Rente für das längste Leben aus Zweyen.*	*Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.*
35	40	3,7453	0,3293	16,9018	6,5296
	45	4,4084	0,4116	16,4192	6,7101
	50	5,1822	0,5216	15,9783	7,0430
	55	5,9517	0,6493	15,5911	7,4253
	60	6,8941	0,8384	15,2363	8,0129
	65	7,8925	1,0924	14,9453	8,7202
	70	8,7411	1,3709	14,7312	9,3548
	75	9,5074	1,6947	14,5652	9,9551
40	15	1,4804	0,1168		
	20	1,7593	0,1419		
	25	2,0296	0,1674		
	30	2,3749	0,2016		
	35	2,7843	0,2448		
	40	3,2081	0,2930	16,3646	6,4162
	45	3,8041	0,3675	15,8149	6,4625
	50	4,5034	0,4665	15,2995	6,6464
	55	5,2169	0,5836	14,8563	6,9167
	60	6,1006	0,7573	14,4428	7,3869
	65	7,0517	0,9925	14,1045	7,9996
	70	7,8658	1,2504	13,8559	8,5652
	75	8,6052	1,5501	13,6630	9,1117
	80	9,3080	1,9198	13,5103	9,6616
45	15	1,2120	0,1027		
	20	1,4463	0,1251		
	25	1,6692	0,1472		
	30	1,9608	0,1774		
	35	2,3017	0,2149		
	40	2,6584	0,2568		
	45	3,1745	0,3227	15,1853	6,3490
	50	3,7933	0,4115	14,5894	6,3719
	55	4,4174	0,5140	14,0568	6,4634
	60	5,2304	0,6723	13,5726	6,7922
	65	6,1132	0,8863	13,1660	7,2683
	70	6,8753	1,1206	12,8654	7,7299

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
45	75	7,5734	1,3928	12,6312	8,1938
	80	8,2412	1,7279	12,4435	8,6737
	85	8,9565	2,2091	12,2787	9,2246
50	15	0,9682	0,0894		
	20	1,1606	0,1091		
	25	1,3397	0,1281		
	30	1,5780	0,1544		
	35	1,8608	0,1873		
	40	2,1430	0,2220		
	45	2,5786	0,2798		
	50	3,1096	0,3580	13,9058	6,2192
	55	3,6524	0,4485	13,2918	6,1481
	60	4,3688	0,5882	12,7110	6,2837
	65	5,1720	0,7808	12,2248	6,6006
	70	5,8714	0,9910	11,8615	6,9368
	75	6,5185	1,2351	11,5763	7,2987
	80	7,1441	1,5357	11,3464	7,6942
	85	7,8187	1,9658	11,1409	8,1637
	90	8,6678	2,7708	10,9519	8,8235
55	15	0,7589	0,0768		
	20	0,9143	0,0940		
	25	1,0550	0,1101		
	30	1,2465	0,1327		
	35	1,4736	0,1608		
	40	1,6998	0,1901		
	45	2,0460	0,2381		
	50	2,4957	0,3065		
	55	2,9494	0,3835	12,5888	5,8988
	60	3,5709	0,5052	11,9131	5,8446
	65	4,2886	0,6753	11,3414	5,9905
	70	4,9214	0,8607	10,9115	6,1935
	75	5,5132	1,0755	10,5710	6,4448
	80	6,0924	1,3399	10,2947	6,7475
	85	6,7259	1,7187	10,0481	7,1348
	90	7,5386	2,4312	9,8227	7,7218

Alter

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
60	20	0,6905	0,0798		
	25	0,7958	0,0931		
	30	0,9435	0,1123		
	35	1,1188	0,1361		
	40	1,2863	0,1597		
	45	1,5618	0,2007		
	50	1,9149	0,2578		
	55	2,2737	0,3217		
	60	2,7847	0,4247	11,1269	5,5694
	65	3,3963	0,5712	10,4491	5,5033
	70	3,9429	0,7303	9,9330	5,5335
	75	4,4608	0,9138	9,5186	5,6372
	80	4,9736	1,1385	9,1759	5,8071
	85	5,5414	1,4579	8,8636	6,0630
	90	6,2875	2,0583	8,5716	6,5168
65	25	0,5846	0,0783		
	30	0,6956	0,0945		
	35	0,8277	0,1146		
	40	0,9479	0,1334		
	45	1,1551	0,1675		
	50	1,4286	0,2157		
	55	1,7019	0,2680		
	60	2,1068	0,3543		
	65	2,6093	0,4794	9,6621	5,2186
	70	3,0652	0,6146	9,0553	5,0678
	75	3,5019	0,7695	8,5597	5,0089
	80	3,9417	0,9588	8,1440	5,0328
	85	4,4328	1,2246	7,7550	5,1353
	90	5,0892	1,7173	7,3733	5,4097
70	30	0,5139	0,0794		
	35	0,6137	0,0962		
	40	0,6994	0,1112		
	45	0,8546	0,1393		
	50	1,0654	0,1798		

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
70	55	1,2721	0,2225		
	60	1,5906	0,2946		
	65	2,0026	0,4015		
	70	2,3801	0,5163	8,3702	4,7602
	75	2,7474	0,6476	7,8052	4,5625
	80	3,1223	0,8073	7,3246	4,4566
	85	3,5445	1,0287	6,8667	4,4213
	90	4,1183	1,4340	6,4024	4,5305
75	35	0,4477	0,0798		
	40	0,5065	0,0912		
	45	0,6204	0,1141		
	50	0,7802	0,1478		
	55	0,9316	0,1817		
	60	1,1764	0,2409		
	65	1,5070	0,3312		
	70	1,8151	0,4278		
	75	2,1177	0,5375	7,1755	4,2354
	80	2,4330	0,6712	6,6353	4,0103
	85	2,7894	0,8534	6,1116	3,8434
	90	3,2797	1,1806	5,5638	3,7856
80	40	0,3536	0,0729		
	45	0,4325	0,0907		
	50	0,5501	0,1183		
	55	0,6551	0,1441		
	60	0,8335	0,1908		
	65	1,0911	0,2654		
	70	1,3343	0,3450		
	75	1,5773	0,4347		
	80	1,8337	0,5444	6,0360	3,6674
	85	2,1283	0,6924	5,4505	3,3769
	90	2,5373	0,9522	4,8214	3,1565
85	45	0,2681	0,0661		
	50	0,3450	0,0867		

Alter

Alter der Person, welche überleben soll.	Alter der verbundenen Person.	Rente des Ueberlebens für die bestimmte Person (Wittwenrente.) auf einmal.	jährl. Beyträge während der Verbindung.	Rente für das längste Leben aus Zweyen.	Rente für das Ueberleben des Längstlebenden.
85	55	0,4089	0,1045		
	60	0,5216	0,1372		
	65	0,7025	0,1941		
	70	0,8768	0,2545		
	75	1,0546	0,3225		
	80	1,2486	0,4062		
	85	1,4651	0,5128	4,7873	2,9302
	90	1,7834	0,7024	4,0675	2,5284
90	50	0,1557	0,0498		
	55	0,1832	0,0591		
	60	0,2293	0,0751		
	65	0,3205	0,1081		
	70	0,4122	0,1435		
	75	0,5059	0,1821		
	80	0,6192	0,2324		
	85	0,7450	0,2934		
	90	0,8653	0,3578	3,1494	1,7306

Tabelle XXVIII.

Renten auf das Ueberleben einer Person vom weiblichen Geschlecht, über eine verbundene vom männlichen Geschlecht.

Nach *Wargentins* Tafel (oben Tab. XII und XIII.)

Zinsen zu 4 pr. Cent.

Alter der Ueberlebenden.	*Alter der Verbundenen.*	*Renten-Wehrt.* *Auf einmal*	*Renten-Wehrt.* *Die jährl. Beyträge während der Verbindung.*
16	16	3,063	0,187
	22	3,592	0,226
	28	4,208	0,276
	34	4,904	0,338
	40	5,854	0,431
	46	6,862	0,546
	52	8,160	0,724
	58	9,625	0,982
20	20	3,190	0,203
	26	3,728	0,246
	32	4,360	0,300
	38	5,152	0,380
	44	6,121	0,480
	50	7,305	0,631
	56	8,644	0,836
	62	10,214	1,179
24	24	3,232	0,215
	30	3,797	0,262
	36	4,451	0,322
	42	5,379	0,418
	48	6,390	0,538
	54	7,650	0,721
	60	9,155	1,006
28	28	3,264	0,228
	34	3,825	0,277
	40	4,635	0,358
	46	5,516	0,457

Alter

Alter der Ueberlebenden.	Alter der Verbundenen.	Renten-Wehrt. Auf einmal.	Die jährl. Beyträge während der Verbindung.
28	52	6,694	0,614
	58	8,054	0,845
	64	9,556	1,190
32	32	3,316	0,243
	38	3,952	0,304
	44	4,771	0,392
	50	5,813	0,522
	56	7,029	0,709
	62	8,495	1,005
	68	10,024	1,449
36	36	3,374	0,261
	42	4,181	0,386
	48	4,964	0,438
	54	6,171	0,604
	60	7,444	0,843
	66	8,876	1,200
42	42	3,462	0,300
	48	4,181	0,386
	54	5,163	0,525
	60	6,425	0,749
	66	7,769	1,075
	72	9,263	1,616
46	46	3,415	0,318
	52	4,254	0,429
	58	5,310	0,600
	64	6,565	0,865
	70	7,997	1,299
50	50	3,342	0,344
	56	4,175	0,470
	62	5,300	0,683
	68	6,862	1,011
54	54	3,189	0,363
	60	4,123	0,527
	66	5,194	0,770
	72	6,482	1,188
58	58	3,014	0,392
	64	3,904	0,575
	79	5,028	0,887

Tabelle XXIX.

Verbindungsrenten für drey Personen, nach der Northamptoner Tafel.

Zinsen 4pr. C.

Gemeinschaftliches Alter.	Rentenwehrt.	Unterschied des Alters 10 und 20 Jahr.			Rentenwehrt.
1	5,309	1	11	21	8,627
2	8,251	2	12	22	9,914
3	9,632	3	13	23	10,344
4	10,661	4	14	24	10,598
5	11,170	5	15	25	10,655
6	11,707	6	16	26	10,708
7	12,058	7	17	27	10,700
8	12,266	8	18	28	10,654
9	12,298	9	19	29	10,562
10	12,200	10	20	30	10,438
11	12,043	11	21	31	10,305
12	11,865	12	22	32	10,170
13	11,678	13	23	33	10,031
14	11,481	14	24	34	9,887
15	11,274	15	25	35	9,738
16	11,056	16	26	36	9,584
17	10,845	17	27	37	9,429
18	10,656	18	28	38	9,278
19	10,490	19	29	39	9,131
20	10,342	20	30	40	8,986
21	10,222	21	31	41	8,850
22	10,118	22	32	42	8,718
23	10,012	23	33	43	8,586
24	9,905	24	34	44	8,451
25	9,769	25	35	45	8,313
26	9,685	26	36	46	8,171
27	9,572	27	37	47	8,027
28	9,457	28	38	48	7,878
29	9,340	29	39	49	7,725
30	9,221	30	40	50	7,571

Gemeinschaftliches Alter.	Rentenwehrt.	Unterschied des Alters 10 und 20 Jahr.			Rentenwehrt.
31	9,099	31	41	51	7,420
32	8,975	32	42	52	7,272
33	8,848	33	43	53	7,123
34	8,718	34	44	54	6,971
35	8,585	35	45	55	6,816
36	8,448	36	46	56	6,658
37	8,309	37	47	57	6,497
38	8,165	38	48	58	6,332
39	8,015	39	49	59	6,164
40	7,865	40	50	60	5,994
41	7,714	41	51	61	5,827
42	7,567	42	52	62	5,662
43	7,423	43	53	63	5,494
44	7,276	44	54	64	5,322
45	7,126	45	55	65	5,145
46	6,972	46	56	66	4,965
47	6,813	47	57	67	4,782
48	6,650	48	58	68	4,597
49	6,482	49	59	69	4,408
50	6,317	50	60	70	4,219
51	6,161	51	61	71	4,032
52	6,011	52	62	72	3,847
53	5,859	53	63	73	3,660
54	5,705	54	64	74	3,477
55	5,550	55	65	75	3,298
56	5,393	56	66	76	3,298
57	5,235	57	67	77	2,959
58	5,076	58	68	78	2,785
59	4,916	59	69	79	2,598
60	4,755	60	70	80	2,408
61	4,593	61	71	81	2,224
62	4,432	62	72	82	2,044
63	4,263	63	73	83	1,875
64	4,039	64	74	84	1,743
65	3,914	65	75	85	1,623

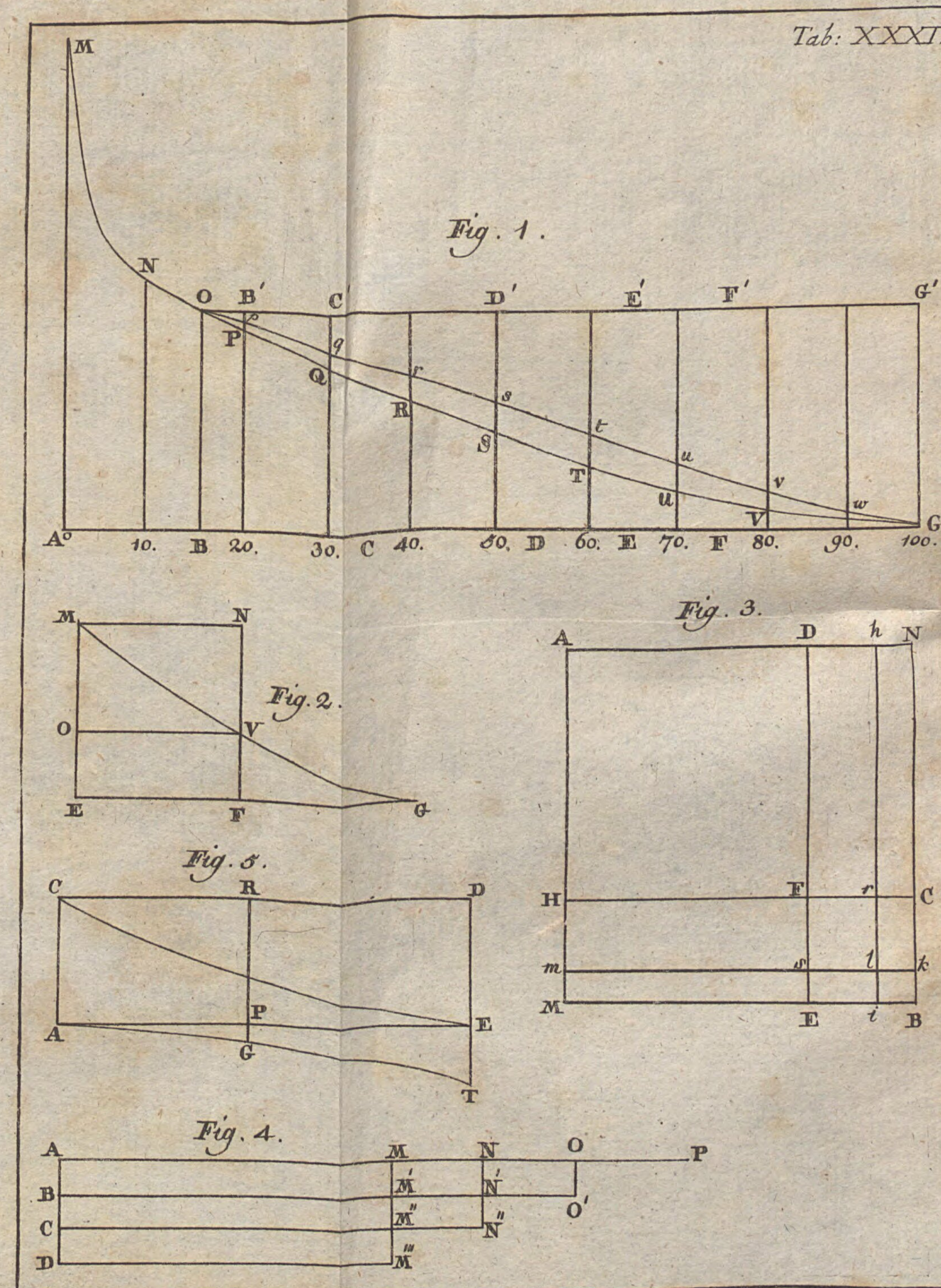
Gemeinschaftliches Alter.	*Rentenwehrt.*	*Unterschied des Alters 10 und 20 Jahr.*			*Rentenwehrt.*
66	3,733	66	76	86	1,519
67	3,550	67	77	87	1,425
68	3,366	68	78	88	1,350
69	3,181	69	79	89	1,248
70	2,995	70	80	90	1,122
71	2,810	71	81	91	0,951
72	2,627	72	82	92	0,767
73	2,448	73	83	93	0,548
74	2,277	74	84	94	0,362
75	2,119	75	85	95	0,169
76	1,985				
77	1,855				
78	1,720				
79	1,563				
80	1,400				
81	1,245				
82	1,097				
83	0,949				
84	0,860				
85	0,782				
86	0,716				
87	0,662				
88	0,646				
89	0,614				
90	0,563				
91	0,452				
92	0,337				
93	0,185				
94	0,085				
95	0,015				

Tabelle XXX.

Leibrenten nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben aus der mittlern Lebensdauer berechnet, Süssmilchs Tafel gemäss.

Alter.	Leibrente. 4 p. C.	Leibrente. 5 p. C.	Alter.	Leibrente. 4 p. C.	Leibrente. 5 p. C.
0	14,8133	13,0863	31	14,6730	12,9800
1	16,6460	14,4400	32	14,5209	12,8542
2	17,3445	14,9387	33	14,3354	12,7226
3	17,6257	15,1370	34	14,1583	12,5866
4	17,7427	15,2189	35	13,9764	12,4464
5	17,7471	15,2221	36	13,7317	12,3138
6	17,7338	15,2127	37	13,6305	12,1773
7	17,7100	15,1960	38	13,4498	12,0367
8	17,6651	15,1645	39	13,2653	11,8920
9	17,6089	15,1252	40	13,0760	11,7429
10	17,5396	15,0764	41	12,8785	11,5866
11	17,4439	15,0090	42	12,6758	11,4255
12	17,3347	14,9318	43	12,4648	11,2568
13	17,2209	14,8512	44	12,2516	11,0856
14	17,1026	14,7671	45	12,0289	10,9044
15	16,9810	14,6804	46	11,7961	10,7172
16	16,8563	14,5912	47	11,5812	10,5419
17	16,7283	14,4993	48	11,3608	10,3672
18	16,5967	14,4044	49	11,1308	10,1720
19	16,4556	14,3053	50	10,8996	9,9808
20	16,3168	14,2016	51	10,6844	9,8021
21	16,1863	14,1067	52	10,4599	9,6146
22	16,0505	14,0073	53	10,2394	9,4293
23	15,9111	13,9051	54	10,0044	9,2314
24	15,7743	13,7997	55	9,7733	9,0358
25	15,6191	13,6895	56	9,5322	8,8307
26	15,4659	13,5759	57	9,2857	8,6199
27	15,3063	13,4568	58	9,0386	8,4077
28	15,1448	13,3360	59	8,7804	8,1846
29	14,9916	13,2240	60	8,5218	7,9603
30	14,8343	13,1021			

	Leibrente.			Leibrente.	
Alter.	4 p.C.	5 p.C.	Alter.	4 p.C.	5 p.C.
61	8,2511	7,7245	76	5,0085	4,8069
62	7,9803	7,4869	77	4,8400	4,6511
63	7,7443	7,2791	78	4,6171	4,4443
64	7,5029	7,0658	79	4,4429	4,2814
65	7,2610	6,8519	80	4,3175	4,1650
66	7,0273	6,6425	81	4,1566	4,0143
67	6,7990	6,4380	82	3,9117	3,7844
68	6,5841	6,2448	83	3,7263	3,6096
69	6,3751	6,0563	84	3,6054	3,4954
70	6,1880	5,8868	85	3,3863	3,2882
71	5,9685	5,6873	86	3,2413	3,1500
72	5,7647	5,5010	87	2,9263	2,8506
73	5,5957	5,3470	88	2,6323	2,5691
74	5,3909	5,1589	89	2,3979	2,3441
75	5,2194	5,0015	90	2,2842	2,2350


Tab: XXXI.
Fig. 1.
M
N
O B' C' D' E' F' G'
P q Q r R s S t T u U v V w
A 10. B 20. 30. C 40. 50. D 60. E 70. F 80. 90. 100. G
Fig. 2.
M N
O V
E F G
Fig. 3.
A D h N
H F r C
m s l k
M E i B
Fig. 5.
C R D
A P E
G T
Fig. 4.
A M N O P
B M' N'
O'
C M'' N''
D M'''

X 6/1999

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Tetens, Johann Nicolaus, 1736-1807

Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen

Bd.: [1]

Leipzig (1785)

Math.a. 237-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081185-7
VD18 90049071